Formules de Taylor à l'ordre 2 pour les fonctions convexes

Erik Thomas

Résumé

Dans cette courte note, nous nous intéressons à un théorème d'Aleksandrov qui stipule que toute fonction convexe définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$ est deux fois dérivable presque partout. Nous donnons une preuve élémentaire dans $\mathbb{R}$. Nous donnons aussi une formule de Taylor avec un reste intégral à l'ordre 2 pour les fonctions convexes.

1 Introduction et rappels

Il fait parti du folklore que «les fonctions convexes sont deux fois dérivable». Le but de cet article est de préciser ce que l'on entend par deux fois dérivable.

On y établit deux formules de Taylor à l'ordre deux pour les fonctions convexes : une formule locale (du type Taylor-Young) et une autre globale qui rappelle la formule de Taylor avec reste intégral ; le fait qu'une fonction convexe n'est pas nécessairement de classe $\mathscr{C}^2$ fait apparaître un second reste en plus du reste intégral usuel qui disparaît lorsque la fonction considérée est de classe $\mathscr{C}^2$.

Nous utiliserons la proposition suivante :

Proposition 1.1. *Continuité et régularité des fonctions convexes.*

Soit I un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$ et soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe.

Alors, f est continue sur I, dérivable à gauche et à droite en tout point de I.

Les dérivées à gauche et à droite sont égales en tout point de I sauf éventuellement sur un ensemble au plus dénombrable $\mathscr{N}$.

Les fonctions f'_g et f'_d (qui désignent respectivement les dérivées à gauche et à droite de f sur I) sont croissantes sur I et

$$\forall (a,x) \in I^2 \quad f(x) = f(a) + \int_a^x f'_d(t)\,\mathrm{d}t.$$

La plupart des résultats classiques utilisés se trouvent dans [2]. On indique aussi [1] référence classique en analyse convexe.

2 Une formule de Taylor locale

Le but de cette partie est d'établir une première formule de Taylor locale :

Proposition 2.1. *Développement limité à l'ordre 2 pour les fonctions convexes.*

Soit I un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$ et soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe.

Pour presque-tout $a \in I$, il existe réel $f''(a) \geq 0$ tel que

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + o\left((x-a)^2\right).$$

Démonstration. La preuve utilise le théorème de dérivation de Lebesgue :

Théorème 2.1. *Théorème de dérivation de Lebesgue.*

Si J est un intervalle de $\mathbb{R}$ et $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction monotone, alors g est dérivable presque-partout sur J.

La preuve du théorème 2.1 est renvoyé à [2].

Nous passons à la preuve de la proposition 2.1.

D'après la proposition 1.1, la fonction f'_d est croissante sur I, ainsi, d'après le théorème 2.1, f'_d est dérivable presque-partout sur I. Soit $a \in I$ un point en lequel f'_d est dérivable, on a donc :

$$f'_d(t) = f'_d(a) + f''_d(a)(t-a) + (t-a)\varepsilon(t)$$

avec $\lim_{t \to a} \varepsilon(t) = 0$ et $f''_d(a) \geq 0$. En utilisant à nouveau la proposition 1.1, on a :

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + \int_a^x f'_d(t)\,\mathrm{d}t \\ &= f(a) + \int_a^x \left(f'_d(a) + f''_d(a)(t-a)\right)\mathrm{d}t + \int_a^x \left(f'_d(t) - f'_d(a) - f''_d(a)(t-a)\right)\mathrm{d}t \\ &= f(a) + f'_d(a)(x-a) + \frac{f''_d(a)}{2}(x-a)^2 + \int_a^x \left(f'_d(t) - f'_d(a) - f''_d(a)(t-a)\right)\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$ et soit $\eta > 0$ tel que

$$\forall t \in I \quad (t \in]a-\eta, a+\eta[\cap I) \Longrightarrow (|\varepsilon(t)| \leq \varepsilon).$$

Pour $x \in]a-\eta, a+\eta[\cap I$, on a donc

$$\left|\int_a^x \left(f'_d(t) - f'_d(a) - f''_d(a)(t-a)\right)\mathrm{d}t\right| \leq \varepsilon \left|\int_a^x (t-a)\,\mathrm{d}t\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}(x-a)^2.$$

Il s'ensuit que

$$\int_a^x \left(f'_d(t) - f'_d(a) - f''_d(a)(t-a)\right)\mathrm{d}t \underset{x \to a}{=} o\left((x-a)^2\right).$$

□

3 Une formule de Taylor globale

Le but de cette partie est d'établir la proposition suivante :

Proposition 3.1. *Formule de Taylor avec reste intégral.*

Pour tout $b \in I$, on pose $I_b := \{x \in I,\ x > b\}$.

En tout point $a \in I$ où f'_d est continue, il existe une fonction $f'' : I_a \longrightarrow \mathbb{R}_+$ mesurable (rien à voir avec la dérivée seconde de f, a priori, même si la notation n'est pas totalement innocente !) et une mesure positive μ_2 définie sur I_a singulière par rapport à la mesure de Lebesgue restreinte à I_a telles que

$$\forall x \in I_a \quad f(x) = f(a) + f'_d(a)(x-a) + \int_a^x (x-u) f''(u)\,\mathrm{d}u + \int_a^x \mu_2(]a,t[)\,\mathrm{d}t.$$

Pour prouver la proposition 3.1, nous utiliserons les résultats suivants :

Proposition 3.2. *Caractérisation des fonctions à variations bornées.*

Soit J un intervalle ouvert non trivial de $\mathbb{R}$. Soit $a \in J$ et $f : J \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction à variations bornées. Alors, il existe $c \in \mathbb{R}$ et une mesure borélienne réelle μ définie sur $\{x \in J,\ x > a\}$ telle que

$$\forall x > a \quad \text{et} \quad \forall x \in J \quad f(x) = c + \mu(]a,x[).$$

Nous renvoyons la preuve de la proposition 3.2 à [2].

Théorème 3.1. *Théorème de Radon-Nikodym.*

Soit $(X, \mathscr{X})$ un espace mesurable. Soit μ une mesure positive σ-finie sur $(X, \mathscr{X})$. Soit ν une mesure positive sur $(X, \mathscr{X})$ aussi σ-finie. Alors, il existe deux mesures positives uniques ν_1 et ν_2 définies $(X, \mathscr{X})$ avec $\nu_1 \ll \mu$ et $\nu_2 \perp \nu$ telles que

$$\nu = \nu_1 + \nu_2.$$

Comme ν_1 est absolument continue par rapport à μ, il existe une fonction g unique μ-presque partout telle que

$$\forall A \in \mathscr{X} \quad \nu(A) = \int_A g\,\mathrm{d}\mu + \nu_2(A).$$

On prouve la proposition 3.1.

Démonstration. On utilise à nouveau la relation de la proposition 1.1

$$\forall (x,a) \in I^2 \quad f(x) = f(a) + \int_a^x f'_d(t)\,\mathrm{d}t.$$

On fixe $a \in I$ un point en lequel f'_d est continue.

D'après la proposition 1.1, la fonction f'_d est croissante sur I_a, donc est à variations bornées sur I_a, ainsi d'après la proposition 3.2, il existe une mesure borélienne μ (nécessairement positive car f'_d est croissante sur I_a) définie sur I_a et $c \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall x \in I_a \quad f'_d(x) = c + \mu(]a,x[).$$

Par croissance monotone, on a

$$\lim_{x \to a} \mu(]a,x[) = 0,$$

par continuité de f'_d en a, on récupère

$$c = f'_d(a).$$

D'après le théorème de Radon-Nikodym, il existe une fonction f'' (attention, la notation f'' est utilisée car elle est commode, mais f n'est, a priori, pas deux fois dérivable) et une mesure μ_2 singulière par rapport à la mesure de Lebesgue (i.e. elle est supportée sur un ensemble dont la mesure de Lebesgue est nulle) telles que

$$\forall A \in \mathscr{B}(I_a) \quad \mu(A) = \int_A f''(x)\,\mathrm{d}x + \mu_2(A).$$

Pour tout $x \in I_a$, on a

$$f(x) = f(a) + \int_a^x \left(f'_d(a) + \int_a^t f''(u)\,\mathrm{d}u + \mu_2(]a,t[) \right) \mathrm{d}t.$$

En utilisant le théorème de Fubini, on récupère

$$f(x) = f(a) + f'_d(a)(x-a) + \int_a^x \left(\int_t^x f''(u)\,\mathrm{d}t \right) \mathrm{d}u + \int_a^x \mu_2(]a,t[)\,\mathrm{d}t,$$

soit

$$f(x) = f(a) + f'_d(a)(x-a) + \int_a^x (x-u) f''(u)\,\mathrm{d}u + \int_a^x \mu_2(]a,t[)\,\mathrm{d}t.$$

□

Remarque 1. Lorsque f est de classe $\mathscr{C}^2$, la fonction f'' donnée par le théorème de Radon-Nikodym coïncide avec la fonction f'' usuelle. La mesure μ_2 est alors nulle et on retrouve la formule de Taylor avec reste intégral usuelle.

Références

[1] R. Tyrell Rockafellar, *Convex Analysis*. Princeton Landmarks in Mathematics and Physics, 1997.

[2] W. Rudin, *Analyse réelle et complexe*. Dunod, 3ème édition, 2009.