Distributions et séries trigonométriques

par Érik Thomas

Lycée Olympe de Gouges, Noisy-le-Sec

Résumé

Le but de cet article est de donner une démonstration du théorème d'unicité des séries trigonométriques de Cantor et du théorème de du Bois-Reymond en utilisant les distributions.

Abstract

In this paper, we give an other proof of Cantor uniqueness theorem for trigonometric series using distributions. We also prove du Bois-Reymond's lemma using again distributions.

Mots clés : distribution, série trigonométrique

1 Introduction et notations

1.1 Historique

Pour voir apparaître les premiers résultats d'unicité pour les séries trigonométriques, il faut remonter au 19^{e} siècle avec des noms prestigieux comme Riemann, Heine ou Cantor. Voici l'énoncé du théorème d'unicité.

Théorème. *Théorème de Cantor.*

Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ deux suites réelles telles que

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\right) = 0. \tag{1}$$

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = b_n = 0$.

Les développements de ces résultats furent concomitants avec les développements de la théorie des ensembles : «par quels ensembles peut-on remplacer $\mathbb{R}$ et obtenir la même conclusion ?» C'est en partie grâce aux questions sur l'unicité pour les séries trigonométriques que Cantor a introduit la notion de nombre ordinal.

La preuve classique de ce résultat est dûe à Riemann. Sa preuve est astucieuse car elle utilise la notion de dérivée seconde symétrique.

Si la trame de la preuve reste la même que celle de Riemann, la nôtre utilise la notion de distributions. L'utilisation des distributions permet de se «débarasser» des questions de convergence des séries trigonométriques et de les dériver (au sens des distributions) sans hypothèse supplémentaire.

Cet article est découpé en deux parties : dans la première partie, nous mettons en place le vocabulaire relatif aux distributions, nous définissons aussi la dérivation au sens des distributions et la convergence de suite de distributions ; dans une seconde partie, nous démontrons le théorème de Cantor et le théorème de du Bois-Reymond.

1.2 Notations utilisées

On munit $\mathbb{R}^n$ de son produit scalaire usuel : si $x, y \in \mathbb{R}^n$, $(x \mid y) := \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$. On note $\|\cdot\|$ la norme associée.

La notion de «presque-partout» sera toujours relative à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$. On rappelle qu'une propriété est vraie presque-partout si l'ensemble des valeurs pour lesquelles la propriété est fausse est un ensemble de mesure nulle.

2 Généralités sur les distributions

2.1 Généralités

Soit Ω un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$. On définit l'espace vectoriel réel $\mathscr{D}(\Omega)$ des fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ à support compact inclus dans Ω et, si K est un compact inclus dans Ω, $\mathscr{D}(K)$ l'ensemble de ces fonctions dont le support est inclus dans K. Il n'est pas évident, même pour $n = 1$, que cet espace vectoriel n'est pas réduit à $\{0\}$. C'est un exercice classique de montrer que la fonction $\widetilde{\rho}$ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\widetilde{\rho}(x) := \begin{cases} \mathrm{e}^{-1/x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$$

est une fonction $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. On remarque que la fonction définie sur $\mathbb{R}^n$ par

$$\rho(x) := \widetilde{\rho}\left(1 - \|x\|^2\right)$$

est $\mathscr{C}^\infty$ avec un support $\operatorname{supp}(\rho) = B'(0,1)$. On rappelle que le support $\operatorname{supp}(\rho)$ d'une fonction est l'adhérence de l'ensemble $\{x \in \mathbb{R}^n \; ; \; \rho(x) \neq 0\}$. Avant de donner la définition d'une distribution, on donne la

Définition 2.1. *Multi-indice.*

Soit $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. On appelle multi-indice tout élément $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$. Ces éléments fournissent des notations commodes pour les monômes et les dérivées partielles :

$$\begin{aligned} x^\alpha &= x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} \; ; \\ \partial_i &= \partial / \partial x_i \; ; \\ \partial^\alpha f &= \partial_1^{\alpha_1} \cdots \partial_n^{\alpha_n} f = \frac{\partial^{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}. \end{aligned}$$

La notation ci-dessus doit être reservée pour les fonctions dont on sait que l'ordre de dérivation n'intervient pas : c'est heureusement le cas des fonctions $\mathscr{C}^\infty$ (lemme de Schwarz).

L'entier $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ est noté $|\alpha|$ et est appelé la longueur du multi-indice α.

Définition 2.2. *Distribution.*

Soit $T : \mathscr{D}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ une application linéaire. On dit que T est une distribution sur l'ouvert Ω si elle satisfait la propriété de continuité suivante : pour tout compact K de Ω, il existe un entier naturel p et une constante C tels que

$$\forall \varphi \in \mathscr{D}(K) \qquad |T(\varphi)| \leqslant C \sup_{\substack{x \in K \\ |\alpha| \leqslant p}} |\partial^\alpha \varphi(x)|. \tag{2}$$

On note $\mathscr{D}'(\Omega)$ l'ensemble des distributions sur Ω.

La notation $T(\varphi)$ est communément remplacée par la notation $\langle T, \varphi \rangle$, que l'on utilisera dans toute la suite.

Donnons des exemples de distributions.

Exemple 1. Soit $a \in \mathbb{R}^n$. On définit l'application δ_a par

$$\forall \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n) \qquad \langle \delta_a, \varphi \rangle := \varphi(a).$$

Il est clair que δ_a est linéaire et que $|\langle \delta_a, \varphi \rangle| \leqslant \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |\varphi(x)|$. Ainsi, δ_a est une distribution sur $\mathbb{R}^n$.

Exemple 2. On note

$$L^1_{\text{loc}}(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R} \text{ mesurable telle que pour tout compact } K \subset \Omega, \; \int_K |f| < +\infty \right\}.$$

À toute fonction $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, on associe une application T_f définie par

$$\forall \varphi \in \mathscr{D}(\Omega) \qquad \langle T_f, \varphi \rangle := \int f(x) \varphi(x) \, \mathrm{d}x.$$

Il est facile de voir que T_f est linéaire et que pour tout compact K de Ω et pour tout φ appartenant à $\mathscr{D}(K)$

$$\left|\langle T_f, \varphi\rangle\right| \leqslant \left(\int_K |f(x)|\,\mathrm{d}x\right)\left(\sup_{x\in K}|\varphi(x)|\right).$$

Par conséquent, T_f est une distribution sur Ω.

2.2 Lemme de du Bois-Reymond

Lemme 2.1. *Lemme de du Bois-Reymond.*

Soient Ω un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$ et $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ tels que pour tout $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$, $\displaystyle\int f\varphi = 0$. Alors $f = 0$ presque-partout sur Ω.

Démonstration. Si Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, on utilisera la densité de $\mathscr{D}(\Omega)$ dans $L^1(\Omega)$: pour toute fonction $g \in L^1(\Omega)$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $g_\varepsilon \in \mathscr{D}(\Omega)$ telle que $\|g - g_\varepsilon\|_{L^1(\Omega)} \leqslant \varepsilon$.

Soit $\omega \subset \Omega$ ouvert tel que $\overline{\omega}$ soit compact et inclus dans Ω. Soit $\widetilde{f} = f_{|\omega}$. Soit $\varepsilon > 0$. Comme $\widetilde{f} \in L^1(\omega)$, il existe $g_\varepsilon \in \mathscr{D}(\omega)$ telle que $\|\widetilde{f} - g_\varepsilon\|_{L^1(\omega)} \leqslant \varepsilon$. On a :

$$\forall\varphi \in \mathscr{D}(\omega) \qquad \int_\omega g_\varepsilon\varphi = \int_\omega \left(g_\varepsilon - \widetilde{f}\right)\varphi + \int_\omega \widetilde{f}\varphi = \int_\omega \left(g_\varepsilon - \widetilde{f}\right)\varphi + 0$$

car $\displaystyle\int_\omega \widetilde{f}\varphi = \int_\Omega f\varphi = 0$. On en déduit

$$\left|\int_\omega g_\varepsilon\varphi\right| \leqslant \int_\omega \left|g_\varepsilon - \widetilde{f}\right| \times |\varphi| \leqslant \varepsilon\|\varphi\|_{L^\infty(\omega)}. \tag{3}$$

Soit $\alpha > 0$. On pose $\varphi := \frac{g_\varepsilon}{\sqrt{\alpha^2+g_\varepsilon^2}} \in \mathscr{D}(\omega)$. On a $\|\varphi\|_{L^\infty(\omega)} \leqslant 1$ et $g_\varepsilon\varphi = \frac{g_\varepsilon^2}{\sqrt{\alpha^2+g_\varepsilon^2}}$ et donc, d'après (3),

$$\forall\alpha > 0 \qquad \int_\omega \frac{g_\varepsilon^2}{\sqrt{\alpha^2+g_\varepsilon^2}} \leqslant \varepsilon.$$

On applique le théorème de convergence dominée pour obtenir

$$\int_\omega |g_\varepsilon| = \lim_{\alpha\to 0}\int_\omega \frac{g_\varepsilon^2}{\sqrt{\alpha^2+g_\varepsilon^2}} \leqslant \varepsilon,$$

puis

$$\|\widetilde{f}\|_{L^1(\omega)} \leqslant \|\widetilde{f} - g_\varepsilon\|_{L^1(\omega)} + \|g_\varepsilon\|_{L^1(\omega)} \leqslant \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

Donc $\|\widetilde{f}\|_{L^1(\omega)} = 0$, ce qui entraîne que $\widetilde{f}$ est nulle presque-partout sur ω. Ceci étant vrai pour tout ouvert $\omega \subset \Omega$ relativement compact, on a montré que f est nulle presque-partout sur Ω.

□

Remarque 1. Soit Ω un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$ et soit l'application

$$T : \begin{cases} L^1_{\text{loc}}(\Omega) & \longrightarrow \mathscr{D}'(\Omega) \\ f & \longmapsto T_f \end{cases},$$

où T_f est la distribution définie à l'*exemple* 2.

Il est clair que T est linéaire. Le lemme 2.1 assure que le noyau de T est réduit à $\{0\}$, ainsi T est injective. Cela nous autorise, et nous le ferons systématiquement par la suite, à assimiler une fonction $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ à sa distribution naturellement associée T_f.

2.3 Dérivation d'une distribution, suites de distributions

Définition 2.3. *Convergence de distributions.*

Soit $(T_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *une suite de distributions de* $\mathscr{D}'(\Omega)$. *Soit* $T \in \mathscr{D}'(\Omega)$.

On dit que la suite de distributions $(T_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *converge vers* T *au sens des distributions si pour tout* $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$, *on a*

$$\lim_{k\to+\infty} \langle T_k, \varphi\rangle = \langle T, \varphi\rangle .$$

Exemple 3. Soit f_k la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_k(x) := \cos(kx)$. Montrons que la suite de distributions $(f_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ converge vers la distribution nulle. Pour tout $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$, on a

$$\begin{aligned}\langle f_k, \varphi\rangle &= \int \cos(kx)\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{k}\int \sin(kx)\,\varphi'(x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{par intégration par parties.}\end{aligned}$$

On recupère donc

$$|\langle f_k, \varphi\rangle| \leqslant \frac{1}{k}\int \left|\varphi'(x)\right|\mathrm{d}x,$$

et

$$\lim_{k\to+\infty} \langle f_k, \varphi\rangle = 0.$$

Définition 2.4. *Dérivation d'une distribution.*

Soit $T \in \mathscr{D}'(\Omega)$. *Pour* $i \in \{1,\ldots,n\}$ *et* $\alpha \in \mathbb{N}^n$ *un multi-indice, on définit les applications linéaires* $\partial_i T$ *et* $\partial^\alpha T$ *par : pour tout* $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$

$$\langle \partial_i T, \varphi\rangle := -\langle T, \partial_i\varphi\rangle \qquad \textit{et} \qquad \langle \partial^\alpha T, \varphi\rangle := (-1)^\alpha \langle T, \partial^\alpha \varphi\rangle .$$

Il faut vérifier que ces applications vérifient la propriété de continuité (2). Par exemple, pour $\partial_i T$,

$$\begin{aligned}|\langle \partial_i T, \varphi\rangle| &= |\langle T, \partial_i\varphi\rangle| \\ &\leqslant C \sup_{x\in K,\ |\alpha|\leqslant p} \left|\partial^\alpha \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x)\right| \\ &\leqslant C \sup_{x\in K,\ |\beta|\leqslant p+1} \left|\partial^\beta \varphi(x)\right|.\end{aligned}$$

Ainsi $\partial_i T$ vérifie la propriété de continuité (2) et $\partial_i T$ est bien une distribution sur Ω. On procède de même pour montrer que $\partial^\alpha T$ est une distribution sur Ω.

Il est facile de voir que la dérivation est une opération linéaire sur $\mathscr{D}'(\Omega)$, i.e. si T_1 et T_2 sont deux éléments de $\mathscr{D}'(\Omega)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors, pour tout multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^n$, on a

$$\partial^\alpha (T_1 + \lambda T_2) = \lambda \partial^\alpha T_1 + \partial^\alpha T_2.$$

Remarque 2. Il est facile de montrer que si $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de classe ad hoc sur Ω, alors les dérivées partielles $\partial_i f$ au sens classique et au sens des distributions coïncident.

Exemple 4. Soit H la fonction de Heaviside définie par

$$H(x) := \begin{cases} 1 & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

Calculons la dérivée de H au sens des distributions. Pour tout $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$, on a

$$\left\langle H', \varphi\right\rangle = -\left\langle H, \varphi'\right\rangle = -\int_{\mathbb{R}} H(x)\,\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = -\int_0^{+\infty} \varphi'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Comme $\varphi' \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi'(x) = 0$, puis

$$\left\langle H', \varphi\right\rangle = -\left[\varphi(x)\right]_0^{+\infty} = \varphi(0).$$

Cela signifie que $H' = \delta_0$.

La proposition suivante est fondamentale : la dérivation est une opération continue dans $\mathscr{D}'(\Omega)$.

Proposition 2.1. *Soient $(T_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathscr{D}'(\Omega)$ et $T \in \mathscr{D}'(\Omega)$. On suppose que la suite $(T_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers T au sens des distributions.*

Alors, pour tout multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^n$, la suite $(\partial^\alpha T_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers $\partial^\alpha T$ au sens des distributions.

Démonstration. Pour tout $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$, on a

$$\langle \partial^\alpha T_k, \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T_k, \partial^\alpha \varphi\rangle .$$

Or $\lim\limits_{k\to+\infty} (-1)^{|\alpha|} \langle T_k, \partial^\alpha \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, \partial^\alpha \varphi\rangle$. Comme $(-1)^{|\alpha|} \langle T, \partial^\alpha \varphi\rangle = \langle \partial^\alpha T, \varphi\rangle$, on récupère

$$\lim_{k\to+\infty} \langle \partial^\alpha T_k, \varphi\rangle = \langle \partial^\alpha T, \varphi\rangle .$$

□

Remarque 3. La proposition précédente s'applique en particulier au série de distributions : si la série $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} T_k$ converge au sens des distributions (c'est-à-dire que la suite des sommes partielles convergent au sens des distributions), alors pour tout multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^n$, on a

$$\partial^\alpha \left(\sum_{k=1}^{+\infty} T_k\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} \partial^\alpha T_k.$$

2.4 Lemme utile

Le but de ce paragraphe est la résolution de l'équation différentielle (au sens des distributions) $T'' = 0$.

Lemme 2.2. *Soit $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ telle que $T' = 0$ (distribution nulle). Alors, T est une fonction constante presque-partout.*

Démonstration. Soit $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ telle que $T' = 0$. Ainsi pour tout $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$, on a

$$\langle T', \varphi\rangle = -\langle T, \varphi'\rangle = 0,$$

soit

$$\langle T, \varphi'\rangle = 0.$$

Remarquons déjà que si $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ et $\int \varphi = 0$, alors $\langle T, \varphi\rangle = 0$. En effet, la fonction ψ définie par $\psi(x) := \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)\,\mathrm{d}t$ appartient bien à $\mathscr{D}(\mathbb{R})$ car $\int \varphi = 0$ et $\psi' = \varphi$. De plus,

$$\langle T, \varphi\rangle = \langle T, \psi'\rangle = -\langle T', \psi\rangle = 0.$$

Fixons $\phi_0 \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ telle que $\int \phi_0 = 1$, dont l'existence est assurée par une construction antérieure. Pour $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$, on écrit

$$\varphi = \left(\int \varphi\right)\phi_0 + \left(\varphi - \left(\int \varphi\right)\phi_0\right).$$

Comme $\int \left(\varphi - \left(\int \varphi\right)\phi_0\right) = 0$, on a

$$\langle T, \varphi\rangle = \left\langle T, \left(\int \varphi\right)\phi_0\right\rangle = \langle T, \phi_0\rangle \left(\int \varphi\right) = T_{f_0}(\varphi),$$

où f_0 est la fonction constante presque-partout égale à $\langle T, \phi_0\rangle$. Ainsi, T est la fonction constante f_0.
La synthèse est claire : une fonction T constante presque-partout vérifie $T' = 0$.

□

Corollaire 2.1. *Soit $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ telle que $T'' = 0$, alors il existe deux réels a et b tels que pour $T(x) = ax + b$ presque-partout.*

Démonstration. Soit $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ telle que $T'' = 0$. Soit $S = T'$. Grâce à la définition, on vérifie que $(T')' = T''$. Comme $S' = 0$, d'après le lemme 2.2, S est une fonction constante presque-partout égale à a.

On note abusivement x la fonction $x \longmapsto x$. Comme la dérivée de ax au sens des distributions est à égale à a (voir remarque 2), on a

$$T' = a \iff (T - ax)' = 0$$

D'après le lemme 2.2, la distribution $T - ax$ est constante presque-partout ; ainsi il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que

$$T - ax = b \iff T = ax + b.$$

La synthèse est claire, une distribution T égale à une fonction affine presque-partout vérifie $T'' = 0$.

□

Avant de clore ce paragraphe, donnons une conséquence du lemme 2.1 et du lemme 2.2.

Proposition 2.2. *Soient f et g deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$ telles que $f' = g$ au sens des distributions. Alors, $f' = g$ au sens classique ; en particulier f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.*

Démonstration. Soit G une primitive de g sur $\mathbb{R}$, i.e. $G' = g$ au sens classique, ainsi G est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. D'après la remarque 2, on a $G' = g$ au sens des distributions. Par linéarité de la dérivation au sens des distributions, on a $(f - G)' = f' - G' = 0$.

D'après le lemme 2.2, la distribution $f - G$ est une fonction constante presque-partout. Par continuité de f et G, il s'ensuit que $f - G$ est constante (partout !) : il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que **pour tout** $x \in \mathbb{R}$, $f(x) - G(x) = k$.

Ainsi f est dérivable au sens classique et $f' = G' = g$ au sens classique.

□

3 Résultats principaux

3.1 Un dernier lemme

Lemme 3.1. *Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ deux suites telles que*

$$\forall x \in [0, 2\pi[\qquad \lim_{n\to+\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) = 0. \tag{4}$$

Alors $\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n = 0$.

Démonstration. En prenant $x = 0$ dans (4), on obtient $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$. En particulier,

$$\forall x \in [0, 2\pi[\qquad \lim_{n\to+\infty} b_n \sin(nx) = 0.$$

On raisonne par l'absurde et on suppose que la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne converge pas vers 0. Il existe $\varepsilon > 0$ et une application $\psi : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ strictement croissante tels que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\left|b_{\psi(n)}\right| \geqslant \varepsilon$. Ainsi, pour tout $x \in [0, 2\pi[$, on a $\lim_{n\to+\infty} \sin(\psi(n)x) = 0$. Par le théorème de convergence dominée, il vient que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{2\pi} \sin^2(\psi(n)x)\,\mathrm{d}x = 0. \tag{5}$$

Or

$$\int_0^{2\pi} \sin^2(\psi(n)x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} \left(\frac{1 - \cos(2\psi(n)x)}{2}\right)\mathrm{d}x = \pi,$$

ce qui nous donne une contradiction avec (5).

On a bien montré que les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergent vers 0.

□

3.2 Démonstration des résultats principaux

3.2.1 Théorème d'unicité de Cantor

Théorème 3.1. *Soient* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *et* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *deux suites réelles telles que*

$$\exists\, b \in \mathbb{R} \;\; \forall x \in \mathbb{R} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\right) = b. \tag{6}$$

La convergence de la série de gauche fait bien entendu partie des hypothèses.
Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = b_n = 0$.

Démonstration. • Commençons par montrer ce résultat dans le cas particulier où

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(|a_n| + |b_n|\right) < +\infty.$$

Rappelons que, par linéarisation, la famille $(x \longmapsto \cos(nx))_{n\in\mathbb{N}} \cup (x \longmapsto \sin(nx))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est orthogonale pour le produit scalaire $(f, g) \longmapsto \int_0^{2\pi} fg$. Multiplions scalairement l'égalité de l'hypothèse par $\cos(jx)$, pour $j \in \mathbb{N}^*$. La série sous le signe de l'intégrale converge normalement sur $[0, 2\pi]$, ce qui permet d'intégrer terme à terme et d'obtenir $a_j \int_0^{2\pi} \cos^2(jx)\,\mathrm{d}x = 0$, donc $a_j = 0$. On obtient de même $b_j = 0$.
Ainsi le théorème 3.1 est établi lorsque $\sum_{n\geqslant 1} (|a_n| + |b_n|) < +\infty$.

• Passons à la démonstration du théorème 3.1 dans le cas général : on ne suppose plus $\sum_{n\geqslant 1} (|a_n| + |b_n|) < +\infty$.

Soit la série de fonctions $-\sum_{n\geqslant 1} \left(\frac{a_n}{n^2}\cos(nx) + \frac{b_n}{n^2}\sin(nx)\right)$.

D'après le lemme 3.1, les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergent vers 0, donc la série de fonctions précédente converge normalement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction continue sur $\mathbb{R}$ que l'on notera F. Pour $N \in \mathbb{N}^*$, on définit F_N la somme partielle d'ordre N de F :

$$F_N(x) := -\sum_{k=1}^{N} \left(\frac{a_k}{k^2}\cos(kx) + \frac{b_k}{k^2}\sin(kx)\right).$$

On remarque que $(F_N)_{N\in\mathbb{N}^*}$ converge vers F au sens des distributions. En effet, (F_N) converge normalement sur tout compact de $\mathbb{R}$, donc $\left(\int F_N\varphi\right)$ tend vers $\int F\varphi$ pour tout fonction $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$.

D'après la proposition 2.1 et la remarque 2, on a, au sens des distributions :

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left(\sum_{k=1}^{+\infty}\left(-\frac{a_k}{k^2}\cos(kx) - \frac{b_k}{k^2}\sin(kx)\right)\right)'' \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty}\left(-\frac{a_k}{k^2}\cos(kx) - \frac{b_k}{k^2}\sin(kx)\right)'' \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty}\left(a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx)\right) \\ &= 0 \qquad \text{par hypothèse.} \end{aligned}$$

Ainsi la distribution F'' est nulle. D'après le corollaire 2.1, la distribution F est une fonction affine : il existe a et b tels que pour presque-tout $x \in \mathbb{R}$,

$$-\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{a_n}{n^2}\cos(nx) + \frac{b_n}{n^2}\sin(nx)\right) = ax + b.$$

Or, la fonction $x \longmapsto -\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{a_n}{n^2}\cos(nx)+\frac{b_n}{n^2}\sin(nx)\right)$ est 2π-périodique et continue, donc elle est bornée, ainsi $a=0$.
Mais $\sum_{n\geqslant 1}\left(\left|\frac{a_n}{n^2}\right|+\left|\frac{b_n}{n^2}\right|\right)<+\infty$ car les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont convergentes donc bornées.
D'après la première partie, on a $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\frac{a_n}{n^2}=\frac{b_n}{n^2}=0$.

□

3.2.2 Théorème de du Bois-Reymond

Dans ce paragraphe, nous donnons une nouvelle démonstration du théorème de du Bois-Reymond.

Théorème 3.2. *Théorème de du Bois-Reymond.*
Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction continue et 2π-périodique. On suppose qu'il existe deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telles que :

$$\forall x\in\mathbb{R}\qquad f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)\right).$$

Alors, f est somme de sa série de Fourier, c'est-à-dire que l'on a

$$\forall n\in\mathbb{N}^*\qquad a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t\quad \text{et}\quad b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t.$$

Remarque 4. Du Bois-Reymond a prouvé le théorème en supposant seulement f Riemann-intégrable.

Démonstration. Nous reprenons les notations et les calculs de la seconde partie de la démonstration du théorème 3.1. Soit F la fonction 2π-périodique définie sur $\mathbb{R}$ par

$$F(x):=-\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{a_n}{n^2}\cos(nx)+\frac{b_n}{n^2}\sin(nx)\right).$$

Pour tout $j\in\mathbb{N}^*$, on a, par convergence normale et formules d'orthogonalité,

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}F(x)\cos(jx)\,\mathrm{d}x=-\frac{a_j}{j^2}.$$

Lors de la démonstration du théorème 3.1, on a déjà montré que la série de fonctions converge normalement sur $\mathbb{R}$, donc F existe et que $F''=f$ au sens des distributions.
Par la proposition 2.2, on a $F''=f$ au sens classique, en particulier, F est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$. Ainsi, deux intégrations par parties dans $\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}F(x)\cos(jx)\,\mathrm{d}x$ montrent que

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\cos(jx)\,\mathrm{d}x=a_j.$$

On montre de la même façon que

$$\forall j\in\mathbb{N}^*\qquad b_j=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\sin(jx)\,\mathrm{d}x.$$

□

Références

[1] N.K. Bary, *A Treatise on Trigonometric Series : Volume* 1. Pergamon, Press Limited, Oxford, England, 1964.

[2] W. Rudin, *Analyse réelle et complexe.* Dunod, 3ème édition, 2009.

[3] A. Zygmund, *Trigonometric Series.* Cambridge Press University, Cambridge, England, 1979.