Quadrature n° () 1-4

Sur l'exponentielle de matrices

par Erik THOMAS*

Résumé.

Dans cet article, nous commençons par montrer que pour toute matrice carrée A, il existe un unique polynôme de plus petit degré P_A tel que $P_A(A) = \exp(A)$. Nous étudions ensuite la continuité de l'application $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{C}) \longmapsto P_A$.

I Quelques rappels sur l'exponentielle de matrices

Avant de passer au but de cet article, faisons quelques rappels. Déjà, dans tout l'article, $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ est muni d'une norme $\|\cdot\|$, par exemple

$$\left\|\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right\| = \max\{|a|,|b|,|c|,|d|\}.$$

Toutes les notions de topologie utilisées dans cet article sont relatives à cette norme (adhérence, ouvert, convergence, continuité, etc.).

Définition 1. *Exponentielle d'une matrice.*

Soit $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{C})$. On rappelle que la série $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!}A^n$ converge absolument et on note

$$\exp(A) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}A^n.$$

De plus, la série $\left(\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!}A^n\right)_{n\geq 0}$ converge normalement sur tout compact de $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$, ainsi, l'application

$$A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{C}) \longmapsto \exp(A)$$

est continue sur $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$.

Proposition 2. $\exp(A)$ *est un polynôme en A.*

Pour tout $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{C})$, il existe un unique polynôme P_A de plus petit degré tel que

$$\exp(A) = P_A(A).$$

* erik.thomas@ens-rennes.fr

Démonstration. 1. *Existence d'un tel polynôme.*

Soit $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ et soit π_A son polynôme minimal dont on note $d \in \mathbb{N}^*$ le degré (on montrera que $d \leq 2$, mais c'est inutile ici).

Une simple récurrence montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n \in \operatorname{Vect}\left(I_2, A, \ldots, A^{d-1}\right)$.

Il s'ensuit que pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!}A^n \in \operatorname{Vect}\left(I_2, A, \ldots, A^{d-1}\right).$$

On remarque que $\operatorname{Vect}\left(I_2, A, \ldots, A^{d-1}\right)$ est fermé dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ car c'est un espace vectoriel de dimension finie. Ainsi,

$$\begin{aligned} \exp(A) = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!}A^n \quad &\in \quad \overline{\operatorname{Vect}(I_2, A, \ldots, A^{d-1})} \\ &= \quad \operatorname{Vect}\left(I_2, A, \ldots, A^{d-1}\right). \end{aligned}$$

Cela prouve qu'il existe un polynôme P (de degré au plus $d-1$) tel que

$$\exp(A) = P(A).$$

2. *Unicité d'un polynôme de plus petit degré.*

Soit $\mathscr{A} = \{\deg(P),\ P \in \mathbb{C}[X] \text{ tel que } P(A) = \exp(A)\}$. Comme le polynôme nul n'appartient pas à $\mathscr{A}$, donc $\mathscr{A} \subset \mathbb{N}$. De plus, $\mathscr{A}$ est non vide, donc il contient un plus petit élément p. D'après le point précédent, on notera que $p \leq d-1$.

Soient P et Q deux polynômes de degré p et tels que

$$P(A) = Q(A) = \exp(A).$$

On en déduit que $(P-Q)(A)=0$. Comme $\deg(P-Q)\leq d-1$, par définition de d, on en déduit que $P=Q$.

□

Remarque 3. *On montrerait de la même manière que le résultat de la proposition 2 reste valable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.*

Voici le résultat principal de cet article.

Théorème 4. *Régularité de $A\longmapsto P_A$.*

L'application $A\in\mathscr{M}_2(\mathbb{C})\longmapsto P_A$ n'est pas continue sur $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$.

II Quelques résultats préliminaires

Proposition 5. *Polynôme annulateur pour les matrices 2×2.*

Pour tout $A\in\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$, on a

$$A^2-\mathrm{tr}(A)A+\det(A)I_2=0.$$

Démonstration. Le lecteur pourra vérifier directement la relation ou remarquer que $X^2-\mathrm{tr}(A)X+\det(A)$ est le polynôme caractéristique de A et utiliser le théorème de Cayley-Hamilton. □

Proposition 6. *Exponentielle d'une matrice 2×2.*

Soit $A\in\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$. Alors,

$$\exp(A)=\begin{cases}\mathrm{e}^{\lambda}I_2 & \text{si } A=\lambda I_2\\ \mathrm{e}^{\lambda}A+\mathrm{e}^{\lambda}(1-\lambda)I_2 & \text{si } \mathrm{Sp}(A)=\{\lambda\}\\ & \text{et } A\neq\lambda I_2\\ \frac{\mathrm{e}^{\lambda_1}-\mathrm{e}^{\lambda_2}}{\lambda_1-\lambda_2}A+\frac{\lambda_1\mathrm{e}^{\lambda_2}-\lambda_2\mathrm{e}^{\lambda_1}}{\lambda_1-\lambda_2}I_2 & \text{si } \mathrm{Sp}(A)=\{\lambda_1,\lambda_2\}\\ & \text{et } \lambda_1\neq\lambda_2\end{cases}.$$

Démonstration. Soit $A\in\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$. Comme dans l'énoncé de la proposition 6, on distingue trois cas :

1. Cas où $A=\lambda I_2$. Par continuité de l'application exponentielle, on a
$$\exp(A)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}(\lambda I_2)^n=\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\lambda^n}{n!}\right)I_2=\mathrm{e}^{\lambda}I_2.$$

2. Cas où $\mathrm{Sp}(A)=\{\lambda\}$ et $A\neq\lambda I_2$. Si l'on note P le polynôme $X^2-\mathrm{tr}(A)X+\det(A)$, on a
$$P=(X-\lambda)^2.$$
Soit $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$. En faisant la division euclidienne de X^n par P, il existe $Q\in\mathbb{C}[X]$ et deux complexes a_n et b_n tels que
$$X^n=(X-\lambda)^2Q+a_nX+b_n.\tag{1}$$
En évaluant (1) en λ, on obtient
$$\lambda^n=a_n\lambda+b_n\tag{2}$$
En dérivant (1) et en évaluant en λ, on obtient
$$n\lambda^{n-1}=a_n\tag{3}$$
D'où
$$a_n=n\lambda^{n-1}\quad\text{et}\quad b_n=-(n-1)\lambda^n.$$
On en déduit que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$,
$$A^n=n\lambda^{n-1}A-(n-1)\lambda^nI_2.\tag{4}$$
On remarque que la relation (4) reste valable lorsque $n=0$ ou $n=1$ avec la convention, lorsque $n=0$ et $\lambda=0$, que $0\times\frac{1}{0}=0$ (notons que cette convention n'est pas absurde : en théorie de l'intégration la convention $0\times\infty=0$ est fréquemment utilisée).
En utilisant (4), on en déduit que
$$\begin{aligned}\exp(A)&=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}A^n\\ &=\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n\lambda^{n-1}}{n!}\right)A-\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n\lambda^n}{n!}\right)I_2\\ &+\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\lambda^n}{n!}\right)I_2.\end{aligned}$$
Donc,
$$\exp(A)=\mathrm{e}^{\lambda}A-\left(\lambda\mathrm{e}^{\lambda}-\mathrm{e}^{\lambda}\right)I_2=\mathrm{e}^{\lambda}A+\mathrm{e}^{\lambda}(1-\lambda)I_2.$$

3. Cas où $\mathrm{Sp}(A)=\{\lambda_1,\lambda_2\}$ avec $\lambda_1\neq\lambda_2$. Dans ce cas, on a
$$X^2-\mathrm{tr}(A)X+\det(A)=(X-\lambda_1)(X-\lambda_2).$$
Soit $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$. En faisant la division euclidienne de X^n par $X^2-\mathrm{tr}(A)X+\det(A)=(X-\lambda_1)(X-\lambda_2)$, il existe $Q\in\mathbb{C}[X]$ et deux complexes a_n et b_n tels que
$$X^n=(X-\lambda_1)(X-\lambda_2)Q+a_nX+b_n.\tag{5}$$
En évaluant (5) en λ_1 et λ_2, on obtient le système
$$\begin{cases}\lambda_1^n &=a_n\lambda_1+b_n\\ \lambda_2^n &=a_n\lambda_2+b_n\end{cases}\Longleftrightarrow\begin{cases}a_n &=\frac{\lambda_1^n-\lambda_2^n}{\lambda_1-\lambda_2}\\ b_n &=\frac{\lambda_1\lambda_2^n-\lambda_2\lambda_1^n}{\lambda_1-\lambda_2}\end{cases}.$$
On en déduit que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$,
$$A^n=\frac{\lambda_1^n-\lambda_2^n}{\lambda_1-\lambda_2}A+\frac{\lambda_1\lambda_2^n-\lambda_2\lambda_1^n}{\lambda_1-\lambda_2}I_2.\tag{6}$$

On remarque que la relation (6) reste valable lorsque $n=0$ ou $n=1$.

Puis, en utilisant (6), on obtient

$$\begin{aligned}\exp(A) &= \frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\lambda_1^n}{n!}-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\lambda_2^n}{n!}\right)A \\ &+ \frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\left(\lambda_1\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\lambda_1^n}{n!}-\lambda_2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\lambda_1^n}{n!}\right)I_2.\end{aligned}$$

Comme annoncé, il s'ensuit que

$$\exp(A)=\frac{e^{\lambda_1}-e^{\lambda_2}}{\lambda_1-\lambda_2}A+\frac{\lambda_1 e^{\lambda_2}-\lambda_2 e^{\lambda_1}}{\lambda_1-\lambda_2}I_2.$$

□

On en déduit le corollaire :

Corollaire 7. *Valeur explicite de P_A.*

Pour tout $A\in\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$, on a

$$P_A=\begin{cases} e^{\lambda} & si\ A=\lambda I_2 \\ e^{\lambda}X+e^{\lambda}(1-\lambda) & si\ \mathrm{Sp}(A)=\{\lambda\} \\ & et\ A\neq\lambda I_2 \\ \frac{e^{\lambda_1}-e^{\lambda_2}}{\lambda_1-\lambda_2}X+\frac{\lambda_1 e^{\lambda_2}-\lambda_2 e^{\lambda_1}}{\lambda_1-\lambda_2} & si\ \mathrm{Sp}(A)=\{\lambda_1,\lambda_2\} \\ & et\ \lambda_1\neq\lambda_2\end{cases}.$$

Démonstration. Le preuve de ce corollaire est évidente et est laissée au lecteur.

□

III Preuve du résultat principal et prolongements

III.1 Preuve du théorème 4

Démonstration. Soit $A=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$. D'après la corollaire 7, on a $P_A=e^0=1$. Soit la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad A_n=\begin{pmatrix}\frac{1}{n}&\frac{1}{n}\\0&\frac{1}{n}\end{pmatrix}.$$

D'après le corollaire 7, on a $P_{A_n}=e^{\frac{1}{n}}X+e^{\frac{1}{n}}\left(1-\frac{1}{n}\right)$.

Il est clair que

$$\lim_{n\to+\infty}A_n=A\quad\text{et}\quad\lim_{n\to+\infty}P_{A_n}=X+1\neq P_A,$$

ce qui prouve que $A\longmapsto P_A$ n'est pas continue sur $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$.

□

III.2 Une application continue sur l'ouvert des matrices possédant deux valeurs propres distinctes

Lemme 8. *L'ensemble Ω des matrices de $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ ayant deux valeurs propres distinctes est un ouvert de $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$.*

Démonstration. Soit $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$.

A a deux valeurs propres distinctes si, et seulement si, le polynôme caractéristique de A, $\chi_A=\det(XI_2-A)=X^2-\mathrm{tr}(A)X+\det(A)$ est scindé à racines simples. Or, le polynôme χ_A est scindé à racines simples si, et seulement si, le discriminant de χ_A qui vaut $\mathrm{tr}^2(A)-4\det(A)=(a+d)^2-4(ad-bc)\neq 0$.

Il s'ensuit que

$$\Omega=f^{-1}(\mathbb{C}^*),$$

où $f:\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in\mathscr{M}_2(\mathbb{C})\longmapsto(a+d)^2-4(ad-bc)$.
Comme f est continue car polynomiale en les coefficients de la matrice et $\mathbb{C}^*$ est un ouvert de $\mathbb{C}$, il s'ensuit que Ω est ouvert dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$.

□

Voici le résultat que nous allons prouver.

Proposition 9. *Continuité de $A\in\Omega\longmapsto P_A$.*

L'application $A\in\Omega\longmapsto P_A$ est continue.

Avant de prouver la proposition 9, nous aurons besoin du lemme suivant (le lecteur peut se reporter à [3]) :

Lemme 10. *Racine carrée complexe.*

Il existe une unique fonction racine carrée définie et holomorphe (donc continue) sur $\mathbb{C}$ privé d'une demi-droite.

Nous prouvons la proposition 9.

Démonstration. On note $f:A\in\Omega\longmapsto P_A$.

Soit $M=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in\Omega$.

Soit $\left(M_n=\begin{pmatrix}a_n&b_n\\c_n&d_n\end{pmatrix}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de matrices de Ω qui converge vers M. Soit $\chi_M=X^2-(a+d)X+(ad-bc)$ le polynôme caractéristique de M et $\chi_{M_n}=X^2-(a_n+d_n)X+(a_nd_n-b_nc_n)$ celui de M_n.

On note Δ_M le discriminant de χ_M et Δ_{M_n} celui de M_n. Notons que $\Delta_M\neq 0$ car χ_M a deux racines distinctes.

Soit D la demi-droite de $\mathbb{C}$ issue de l'origine et passant par le point d'affixe $-\Delta_M$. On note $\sqrt{\cdot}$ l'unique fonction racine carrée définie sur $\mathbb{C}\backslash D$ (qui existe car $\Delta_M\neq 0$ et d'après le lemme 10).

Comme $(\Delta_{M_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\Delta_M \in \mathbb{C}\backslash D$ et $\mathbb{C}\backslash D$ est ouvert dans $\mathbb{C}$, à partir d'un certain rang, $\Delta_{M_n} \in \mathbb{C}\backslash D$. Quitte à considérer la suite $(\Delta_{M_n})_{n\in\mathbb{N}}$ à partir de ce rang, on peut supposer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\Delta_{M_n} \in \mathbb{C}\backslash D$.

On note

$$\lambda_1 = \frac{\operatorname{tr}(M) + \sqrt{\Delta_M}}{2} \quad \text{et} \quad \lambda_2 = \frac{\operatorname{tr}(M) - \sqrt{\Delta_M}}{2}$$

les deux racines distinctes de χ_M et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note

$$\lambda_{1,n} = \frac{\operatorname{tr}(M_n) + \sqrt{\Delta_{M_n}}}{2}, \ \lambda_{2,n} = \frac{\operatorname{tr}(M_n) - \sqrt{\Delta_{M_n}}}{2}$$

celles de χ_{M_n}. Comme

$$\lim_{n\to+\infty} \operatorname{tr}(M_n) = \operatorname{tr}(M)$$

et (par continuité de $\sqrt{\cdot}$ sur $\mathbb{C}\backslash D$)

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{\Delta_{M_n}} = \sqrt{\Delta_M},$$

on en déduit que pour tout $i \in \{1,2\}$,

$$\lim_{n\to+\infty} \lambda_{i,n} = \lambda_i.$$

Cela prouve que, pour tout $i \in \{1,2\}$, l'application

$$M \in \Omega \longmapsto \lambda_i(M)$$

est continue.

Il s'ensuit que les applications

$$M \in \Omega \longmapsto \frac{\mathrm{e}^{\lambda_1} - \mathrm{e}^{\lambda_2}}{\lambda_1 - \lambda_2}$$

et

$$M \in \Omega \longmapsto \frac{\lambda_1 \mathrm{e}^{\lambda_2} - \lambda_2 \mathrm{e}^{\lambda_1}}{\lambda_1 - \lambda_2}$$

sont continues sur Ω comme quotient (le dénominateur ne s'annule pas sur Ω) et composées de fonctions continues sur Ω. On en déduit finalement que l'application

$$M \in \Omega \longmapsto P_M = \frac{\mathrm{e}^{\lambda_1} - \mathrm{e}^{\lambda_2}}{\lambda_1 - \lambda_2} X + \frac{\lambda_1 \mathrm{e}^{\lambda_2} - \lambda_2 \mathrm{e}^{\lambda_1}}{\lambda_1 - \lambda_2}$$

est continue sur Ω.

□

Références

[1] X. Gourdon, *Algèbre*. Ellipses, 2ème édition, 2009.

[2] X. Oudot, *Maths MP/MP**. Vuibert, 2014.

[3] W. Rudin, *Analyse réelle et complexe*. Dunod, 3ème édition, 2009.