Vers l'inégalité isopérimétrique

Erik Thomas *

Résumé

Le but de cet article est d'établir l'inégalité isopérimétrique dans $\mathbb{R}^n$ pour les ensembles compacts.

Pour cela, nous nous intéressons au transport optimal dans $\mathbb{R}$ (partie 2). Ensuite, nous prouvons l'inégalité de Prékopa-Leindler dans $\mathbb{R}$ grâce au transport (partie 3) ; une récurrence permet de prouver l'inégalité de Prékopa-Leindler dans $\mathbb{R}^n$. Cette inégalité permet de démontrer simplement l'inégalité de Brunn-Minkowski (partie 4). Enfin, dans la partie 5, nous définissons la notion de périmètre d'un compact de $\mathbb{R}^n$ et nous prouvons l'inégalité isopérimétrique.

1 Introduction

1.1 Sur la mesure de Lebesgue

Avant de passer au cœur du sujet, nous donnons dans cette sous-partie les rappels indispensables sur la mesure de Lebesgue. Nous renvoyons à [6] pour un exposé détaillé sur la notion de mesurabilité et sur la mesure de Lebesgue ou à [3] pour un cours précis de théorie de la mesure et la construction de la mesure de Lebesgue.

La mesure de Lebesgue est la mesure de la taille d'une partie. Ainsi, cette notion mesure la longueur d'une partie de $\mathbb{R}$, l'aire d'une partie de $\mathbb{R}^2$, ou encore le volume d'une partie de $\mathbb{R}^3$.

Avant de donner la définition précise de la mesure de Lebesgue, il faut dire ce que l'on entend par ensemble mesurable.

Définition 1.1. *Tribu borélienne sur $\mathbb{R}^n$.*

La tribu borélienne sur $\mathbb{R}^n$ est la tribu engendrée par les ouverts de $\mathbb{R}^n$: c'est la plus petite tribu (au sens de l'inclusion) contenant tous les ouverts de $\mathbb{R}^n$.

La proposition suivante permet de définir la mesure de Borel sur $\mathbb{R}^n$.

Proposition 1.1. *Existence et unicité de la mesure de Borel.*

Il existe une unique mesure $\lambda_n^{\mathscr{B}}$ définie sur la tribu borélienne sur $\mathbb{R}^n$, invariante par translation et telle que :

$$\text{pour tout pavé ouvert } P = \prod_{i=1}^{n}]a_i, b_i[\subset \mathbb{R}^n, \quad \lambda_n^{\mathscr{B}}(P) = \sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i).$$

On définit la tribu de Lebesgue comme la complétion de la tribu borélienne.

Définition 1.2. *Tribu de Lebesgue.*

La tribu de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$ est la tribu borélienne sur $\mathbb{R}^n$ complétée, c'est-à-dire que la tribu borélienne à laquelle on ajoute les parties de $\mathbb{R}$ incluses dans un borélien de mesure nulle.

Remarque 1. La complétion d'une mesure est une opération « abstraite » : cette opération peut être faite dans n'importe quel ensemble X munit d'une tribu $\mathscr{A}$.

On définit ainsi la mesure de Lebesgue :

Proposition 1.2. *Mesure de Lebesgue.*

La mesure de Borel $\lambda_n^{\mathscr{B}}$ sur $\mathbb{R}^n$ se prolonge d'une unique façon à la tribu de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$ en une mesure dite mesure de Lebesgue que l'on note λ_n.

*erik.thomas@ens-rennes.fr

Définition 1.3. *Notion de presque partout.*

On dit qu'une propriété est vraie presque partout lorsque l'ensemble des valeurs pour lesquelles cette propriété est fausse est de mesure nulle.

Dans cet article, la notion de « presque partout » sera toujours relative à la mesure de Lebesgue.

Définition 1.4. *Fonction mesurable.*

Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$*. On dit que* f *est mesurable si l'image réciproque de tout ensemble mesurable de* $\mathbb{R}$ *est un ensemble mesurable de* $\mathbb{R}^n$*.*

Dans toute la suite, toutes les intégrales sont calculées par rapport à la mesure de Lebesgue.

1.2 Contexte historique et but de l'article

La décennie 1996-2006 montre la puissance du transport optimal pour montrer certaines inégalités fonctionnelles en analyse. Par exemple, les inégalités de convolution de Young et leurs formes inverses ont pu être retrouvées par Barthe dans [1] en utilisant le transport optimal. On peut encore citer les inégalités de Sobolev dans [2], l'inégalité de Prékopa-Leindler ou le traitement des inégalités isopérimétriques. Nous renvoyons à [7] pour un exposé plus exhaustif.

Notre but ici est de donner un (petit) aperçu de la puissance du transport optimal. Dans une première partie, nous exposons brièvement le transport optimal dans $\mathbb{R}$ (nous renvoyons à [4] ou [7] pour un exposé plus complet). Du fait de la relation d'ordre naturelle sur $\mathbb{R}$, le transport optimal ressemble à une reparamétrisation. Dans une deuxième partie, nous prouvons l'inégalité de Prékopa-Leindler qui est une forme inverse de l'inégalité de Hölder (voir [5]) :

Théorème 1.1. *Inégalité de Prékopa-Leinder.*

Soient f *et* g *deux fonctions définies sur* $\mathbb{R}^n$*, mesurables, positives et intégrables. Soit* $\lambda \in [0,1]$*. Soit* h *définie sur* $\mathbb{R}^n$*, mesurable et telle que*

$$h\left(\lambda x + (1-\lambda)\, y\right) \geq f\left(x\right)^{\lambda} g\left(y\right)^{1-\lambda}$$

pour presque tout x*,* y *dans* $\mathbb{R}^n$*. Alors*

$$\int_{\mathbb{R}^n} h \geq \left(\int_{\mathbb{R}^n} f\right)^{\lambda} \left(\int_{\mathbb{R}^n} g\right)^{1-\lambda}.$$

Avant d'aborder le sujet de l'inégalité de Brunn-Minkowski (partie 4), nous définissons la somme de Minkowski de deux ensembles. Si A et B sont deux parties de $\mathbb{R}^n$, alors la somme de Minkowski $A + B$ est définie par

$$A + B := \{a + b,\ (a,b) \in A \times B\}\,.$$

Cette opération est plus compliquée qu'elle n'y paraît. Ainsi, par exemple si $A = B = [0,1] \times \{0\} \subset \mathbb{R}^2$, alors $A + B = [0,2] \times \{0\}$, mais si $A = [0,1] \times \{0\} \subset \mathbb{R}^2$ et $B = \{0\} \times [0,1] \subset \mathbb{R}^2$, alors $A + B = [0,1]^2$.

L'inégalité de Brunn-Minkowski, qui lie $\lambda_n(A)$, $\lambda_n(B)$ et $\lambda_n(A+B)$, fut découverte par Brunn en 1887 en dimension 3 et seulement pour des corps convexes (convexes d'intérieur non vide) et généralisée par Minkowski en toute dimension pour les corps convexes. Il faut attendre les travaux de Lusternik, Hadwiger, Ohmann, Henstock et Macbeath pour établir l'inégalité de Brunn-Minkowski lorsque A, B et $A + B$ sont mesurables.

Théorème 1.2. *Inégalité de Brunn-Minkowski.*

Soient A *et* B *deux compacts non vides de* $\mathbb{R}^n$*. Alors*

$$\lambda_n^{1/n}(A+B) \geq \lambda_n^{1/n}(A) + \lambda_n^{1/n}(B)\,,$$

où λ_n *désigne la mesure de Lebesgue de* $\mathbb{R}^n$*.*

L'hypothèse « A et B compacts » sera discutée dans la partie 4. L'inégalité de Prékopa-Leindler est une forme fonctionnelle de l'inégalité de Brunn-Minkowski, c'est-à-dire qu'en prenant des fonctions indicatrices d'ensembles compacts dans cette inégalité, cela permet d'obtenir l'inégalité de Brunn-Minkowski.

L'inégalité isopérimétrique est abordée ici comme une conséquence de l'inégalité de Brunn-Minkowski.

Les problèmes isopérimétriques occupent une place importante depuis l'Antiquité et la première personne à avoir intuité cette inégalité est peut-être la reine Didon ! La légende veut que, lorsqu'elle arriva sur les côtes tunisiennes pour y fonder une ville qui deviendra Carthage, les indigènes lui proposèrent de lui donner des terres qui pourraient tenir dans la peau d'un bœuf.

La reine découpa la peau d'un bœuf en très fines lanières et entoura une zone circulaire car, à périmètre donné, le cercle est la figure géométrique qui maximise l'aire.

Ainsi, plus formellement, pour toute « figure géométrique » d'aire $\mathscr{A}$ et de périmètre $\mathscr{P}$, on a :

$$\mathscr{P}^2 \geq 4\pi\mathscr{A} \tag{1}$$

avec égalité pour les disques uniquement. Ici, nous montrons l'inégalité suivante :

Théorème 1.3. *Inégalité isopérimétrique.*

Pour tout compact $A \subset \mathbb{R}^n$ non vide

$$p_n(A) \geq n\lambda_n^{1-1/n}(A)\,\lambda_n^{1/n}(B_2^n)$$

où B_2^n est la boule unité pour la norme euclidienne usuelle sur $\mathbb{R}^n$ et p_n est le périmètre (la notion est définie dans la partie 5).

2 Sur le transport optimal dans $\mathbb{R}$

Dans cette partie, nous nous intéressons au transport optimal dans $\mathbb{R}$. Grâce à la relation d'ordre naturelle $\leq$ sur $\mathbb{R}$, les résultats sont beaucoup plus faciles à obtenir que dans le cas général. Nous renvoyons à [4] dans le cas général.

Nous n'énonçons pas le résultat avec des hypothèses optimales mais seulement un résultat qui nous est suffisant. Encore une fois, nous renvoyons à [4].

Théorème 2.1. *Transport optimal dans $\mathbb{R}$.*

Soient f et F deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$, mesurables, à valeurs positives et dans $L^1(\mathbb{R})$. On suppose que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f = \int_{\mathbb{R}} F > 0$. Alors, il existe une fonction $u : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \int_{-\infty}^{u(t)} f = \int_{-\infty}^{t} F.$$

De plus, u est croissante, dérivable presque partout sur $\mathbb{R}$ et pour presque tout $t \in \mathbb{R}$, on a la relation suivante, dite équation de Monge-Ampère :

$$u'(t)\,f(u(t)) = F(t).$$

Avant de prouver le théorème 2.1, nous utiliserons le résultat classique suivant :

Lemme 2.1. *Régularité de l'intégrale d'une fonction L^1.*

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction mesurable et appartenant à $L^1(\mathbb{R})$. Alors, la fonction $x \longmapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$ est continue et croissante sur $\mathbb{R}$. La fonction $x \longmapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$ est dérivable presque partout sur $\mathbb{R}$, et pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t\right) = f(x).$$

De plus,

$$\lim_{x\to+\infty}\int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}} f \quad \text{et} \quad \lim_{x\to-\infty}\int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

La preuve de ce résultat classique d'intégration est renvoyée à [6].

Nous prouvons le théorème 2.1.

Démonstration. • Soient les fonctions

$$\widetilde{f} : x \longmapsto \int_{-\infty}^{x} f \quad \text{et} \quad \widetilde{F} : x \longmapsto \int_{-\infty}^{x} F.$$

Soient aussi les ensembles

$$I_f = \left\{ x \in \mathbb{R},\ \int_{-\infty}^{x} f \in \left] 0, \int_{\mathbb{R}} f \right[\right\} \quad \text{et} \quad I_F = \left\{ x \in \mathbb{R},\ \int_{-\infty}^{x} F \in \left] 0, \int_{\mathbb{R}} F \right[\right\}.$$

D'après le lemme 2.1, les fonctions $\widetilde{f}$ et $\widetilde{F}$ sont continues et croissantes, ainsi les ensembles I_f et I_F sont des intervalles ouverts non vides de $\mathbb{R}$. On écrit

$$I_f = \left] a_f, b_f \right[\quad \text{et} \quad I_F = \left] a_F, b_F \right[,$$

a_f, a_F pouvant être égaux à $-\infty$ et b_f, b_F pouvant être égaux à $+\infty$.

- Soit $t \in \mathbb{R}$.
  - ⋆ Si $t \in I_F$. D'après le lemme 2.1, la fonction $\widetilde{f}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et

    $$\lim_{x \to a_f} \int_{-\infty}^{x} f = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to b_f} \int_{-\infty}^{x} f = \int_{\mathbb{R}} F.$$

    Comme $\int_{-\infty}^{t} F \in \left] 0, \int_{\mathbb{R}} F \right[$, par le théorème des valeurs intermédiaires, l'ensemble des éléments x de I_f tels que

    $$\int_{-\infty}^{x} f = \int_{-\infty}^{t} F \tag{2}$$

    n'est pas vide : on le note A_t. De plus, par croissance de $\widetilde{f}$, A_t est un intervalle fermé inclus dans I_f. On pose alors

    $$u(t) = \sup(A_t).$$

    Par continuité de $\widetilde{f}$, on a alors

    $$\widetilde{f}(u(t)) = \widetilde{F}(t),$$

    soit

    $$\int_{-\infty}^{u(t)} f = \int_{-\infty}^{t} F.$$

  - ⋆ Si $t \leq a_F$, on pose $u(t) = a_f$ de sorte que

    $$\int_{-\infty}^{u(t)} f = \int_{-\infty}^{t} F \,(= 0).$$

  - ⋆ Si $t \geq b_F$, on pose $u(t) = b_f$ de sorte que

    $$\int_{-\infty}^{u(t)} f = \int_{-\infty}^{t} F \left(= \int_{\mathbb{R}} f = \int_{\mathbb{R}} F \right).$$

  Il est clair que la fonction u ainsi définie est croissante sur $\mathbb{R}$ et on a

  $$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \int_{-\infty}^{u(t)} f = \int_{-\infty}^{t} F. \tag{3}$$

- La relation (3) se réécrit en

  $$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \widetilde{f}(u(t)) = \widetilde{F}(t).$$

  D'après le lemme 2.1, les fonctions $\widetilde{f}$ et $\widetilde{F}$ sont dérivables presque partout sur $\mathbb{R}$. D'après le théorème de dérivation de Lebesgue, u est dérivable presque partout sur $\mathbb{R}$. Ainsi, pour presque tout $t \in \mathbb{R}$, on a

  $$u'(t)\, f(u(t)) = F(t).$$

□

3 Inégalité de Prékopa-Leindler

Le but de cette partie est de montrer le théorème suivant :

Théorème 3.1. *Inégalité de Prékopa-Leindler.*
Soient f, g et h trois fonctions mesurables et positives sur $\mathbb{R}^n$. Soit $\lambda \in [0,1]$. On suppose que f et g sont intégrables et que

$$h\left(\lambda x + (1-\lambda) y\right) \geq f(x)^{\lambda} g(y)^{1-\lambda}$$

pour presque tout $x \in \mathbb{R}^n$ et $y \in \mathbb{R}^n$. Alors, on a

$$\int_{\mathbb{R}^n} h \geq \left(\int_{\mathbb{R}^n} f\right)^{\lambda} \left(\int_{\mathbb{R}^n} g\right)^{1-\lambda}.$$

Démonstration. La preuve se fait par récurrence sur la dimension $n \in \mathbb{N}^*$.

- On traite ici le cas où $n = 1$.
  Si $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f = 0$ ou $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} g = 0$, alors l'inégalité à montrer est claire. On suppose $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f > 0$ et $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} g > 0$.
  Soit $k : t \longmapsto \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-|t|}$ de sorte que $k > 0$ et $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} k = 1$.
  Comme les fonctions $x \longmapsto \dfrac{f(x)}{\int_{\mathbb{R}} f}$ et $x \longmapsto \dfrac{g(x)}{\int_{\mathbb{R}} g}$ sont mesurables et d'intégrales 1, d'après la section 2, il existe deux fonctions croissantes u et v dérivables presque partout sur $\mathbb{R}$, et donc un ensemble $\mathscr{N} \subset \mathbb{R}$ mesurable et de mesure de Lebesgue nulle, telles que :

$$\forall t \in \mathbb{R}\backslash\mathscr{N}, \quad u'(t)\frac{f(u(t))}{\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f} = k(t) \quad \text{et} \quad v'(t)\frac{g(v(t))}{\displaystyle\int_{\mathbb{R}} g} = k(t).$$

  Comme $k(t) > 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, on remarque donc que

$$\forall t \in \mathbb{R}\backslash\mathscr{N}, \quad u'(t) > 0, \quad v'(t) > 0, \quad f(u(t)) > 0 \quad \text{et} \quad g(v(t)) > 0.$$

  On définit sur $\mathbb{R}\backslash\mathscr{N}$ la fonction z par :

$$\forall t \in \mathbb{R}\backslash\mathscr{N}, \quad z(t) = \lambda u(t) + (1-\lambda) v(t)$$

  de sorte que

$$\forall t \in \mathbb{R}\backslash\mathscr{N}, \quad z'(t) = \lambda u'(t) + (1-\lambda) v'(t) \geq u'(t)^{\lambda} v'(t)^{1-\lambda}$$

  où l'on a utilisé l'inégalité arithmético-géométrique.
  On peut donc écrire

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} h &= \int_{\mathbb{R}\backslash\mathscr{N}} h \\
&\geq \int_{\mathbb{R}\backslash\mathscr{N}} h(z(t))\, z'(t)\,\mathrm{d}t \\
&\geq \int_{\mathbb{R}\backslash\mathscr{N}} h\left(\lambda u(t) + (1-\lambda) v(t)\right) u'(t)^{\lambda} v'(t)^{1-\lambda}\,\mathrm{d}t \\
&\geq \int_{\mathbb{R}\backslash\mathscr{N}} f^{\lambda}(u(t))\, g^{1-\lambda}(v(t)) \left(\frac{k(t)\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f}{f(u(t))}\right)^{\lambda} \left(\frac{k(t)\displaystyle\int_{\mathbb{R}} g}{g(v(t))}\right)^{1-\lambda} \mathrm{d}t \\
&\geq \left(\int_{\mathbb{R}\backslash\mathscr{N}} f\right)^{\lambda} \left(\int_{\mathbb{R}\backslash\mathscr{N}} g\right)^{1-\lambda} \left(\int_{\mathbb{R}\backslash\mathscr{N}} k\right).
\end{aligned}$$

Comme $\mathscr{N}$ est négligeable, on a $\displaystyle\int_{\mathbb{R}\setminus\mathscr{N}} k = \int_{\mathbb{R}} k = 1$, on en déduit donc

$$\int_{\mathbb{R}} h \geq \left(\int_{\mathbb{R}} f\right)^{\lambda} \left(\int_{\mathbb{R}} g\right)^{1-\lambda}.$$

- Soient f et g deux fonctions mesurables définies sur $\mathbb{R}^{n+1}$ positives et intégrales. Soit $\lambda \in [0,1]$ et soit $h : \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que : pour presque tout x, y dans $\mathbb{R}^{n+1}$

$$h\left(\lambda x + (1-\lambda)\, y\right) \geq f\left(x\right)^{\lambda} g\left(y\right)^{1-\lambda}.$$

Dans la suite de cette preuve, on assimile $\mathbb{R}^{n+1}$ à $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. On définit sur $\mathbb{R}^n$ les fonctions F, G et H par

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad F\left(x\right) = \int_{\mathbb{R}} f\left(t,x\right) \mathrm{d}t, \quad G\left(x\right) = \int_{\mathbb{R}} g\left(t,x\right) \mathrm{d}t \quad \text{et} \quad H\left(x\right) = \int_{\mathbb{R}} h\left(t,x\right) \mathrm{d}t.$$

Par le théorème de Fubini, on a :

$$\int_{\mathbb{R}^n} F = \int_{\mathbb{R}^{n+1}} f, \quad \int_{\mathbb{R}^n} G = \int_{\mathbb{R}^{n+1}} g \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{R}^n} H = \int_{\mathbb{R}^{n+1}} h.$$

Or, pour presque tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$h\left(t, \lambda x + (1-\lambda)\, y\right) = h\left(\lambda\left(t,x\right) + (1-\lambda)\left(t,y\right)\right) \geq f\left(t,x\right)^{\lambda} g\left(t,y\right)^{1-\lambda},$$

ainsi, en utilisant le cas où $n = 1$, on remarque que pour tout presque tout x, y dans $\mathbb{R}^n$, on a :

$$\begin{aligned} H\left(\lambda x + (1-\lambda)\, y\right) &= \int_{\mathbb{R}} h\left(t, \lambda x + (1-\lambda)\, y\right) \mathrm{d}t \\ &\geq \left(\int_{\mathbb{R}} f\left(t,x\right) \mathrm{d}t\right)^{\lambda} \left(\int_{\mathbb{R}} g\left(t,y\right) \mathrm{d}t\right)^{1-\lambda} \\ &\geq F\left(x\right)^{\lambda} G\left(y\right)^{1-\lambda} \end{aligned}$$

Ainsi, en utilisant l'hypothèse de récurrence, on a

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^{n+1}} h &= \int_{\mathbb{R}^n} H \\ &\geq \left(\int_{\mathbb{R}^n} F\right)^{\lambda} \left(\int_{\mathbb{R}^n} G\right)^{1-\lambda} \\ &\geq \left(\int_{\mathbb{R}^{n+1}} f\right)^{\lambda} \left(\int_{\mathbb{R}^{n+1}} g\right)^{1-\lambda}. \end{aligned}$$

Ceci termine la récurrence.

□

Remarque 2. Dans la preuve de l'inégalité de Prékopa-Leindler pour $n = 1$, nous aurions pu utiliser à la place de k toute fonction strictement positive et d'intégrale égale à 1.

4 Inégalité de Brunn-Minkowski

Le but de cette partie est d'établir l'inégalité de Brunn-Minkowski dans $\mathbb{R}^n$.

Théorème 4.1. *Inégalité de Brunn-Minkowski, forme log-concave.*
Pour tout A et B compacts non vides inclus dans $\mathbb{R}^n$, on a

$$\forall t \in [0,1], \quad \lambda_n\left(tA + (1-t)\, B\right) \geq \lambda_n\left(A\right)^t \lambda_n\left(B\right)^{1-t}.$$

Remarque 3. L'hypothèse « A et B compacts » peut paraître surprenante. Cette hypothèse est placée pour s'assurer de la mesurabilité de $tA + (1-t)\,B$. En effet, $tA + (1-t)\,B$ est compact, donc mesurable car il est l'image du compact $A \times B$ par l'application continue $(x, y) \longmapsto tx + (1-t)\,y$. Il est à noter que, même si A et B sont mesurables, $tA + (1-t)\,B$ **n'est pas nécessairement mesurable**. L'hypothèse peut cependant être relaxée en « A, B et $tA + (1-t)\,B$ mesurables ».

Démonstration. Soient A et B deux compacts non vides de $\mathbb{R}^n$. Soit $t \in [0, 1]$.

Soient f, g et h les fonctions indicatrices respectives de A, B et $tA + (1-t)\,B$. Il est clair que

$$\forall\,(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \quad h\,(tx + (1-t)\,y) \geq f\,(x)^t\,g\,(y)^{1-t}.$$

L'inégalité de Prékopa-Leindler donne

$$\int_{\mathbb{R}^n} h \geq \left(\int_{\mathbb{R}^n} f\right)^t \left(\int_{\mathbb{R}^n} g\right)^{1-t},$$

soit

$$\lambda_n\,(tA + (1-t)\,B) \geq \lambda_n\,(A)^t\,\lambda_n\,(B)^{1-t}.$$

□

Théorème 4.2. *Inégalité de Brunn-Minkowski, forme dimensionnelle.*

Pour tout A et B compacts non vides inclus dans $\mathbb{R}^n$, on a

$$\lambda_n^{1/n}\,(A + B) \geq \lambda_n^{1/n}\,(A) + \lambda_n^{1/n}\,(B).$$

Démonstration. Soient A et B deux compacts de $\mathbb{R}^n$.

Si $\lambda_n\,(A) = 0$ ou $\lambda_n\,(B) = 0$, alors l'inégalité est claire. En effet, si par exemple $\lambda_n\,(A) = 0$, alors en prenant $x \in A$ (A est supposé non vide), on a $x + B \subset A + B$. Ainsi, par croissance de λ_n et par invariance de λ_n par translation, on en déduit

$$\lambda_n^{1/n}\,(A + B) \geq \lambda_n^{1/n}\,(x + B) = \lambda_n^{1/n}\,(B) + \lambda_n^{1/n}\,(A).$$

On suppose donc $\lambda_n\,(A) > 0$ et $\lambda_n\,(B) > 0$.

Soit $t := \dfrac{\lambda_n^{1/n}\,(A)}{\lambda_n^{1/n}\,(A) + \lambda_n^{1/n}\,(B)} \in \,]0, 1[$ de sorte que $1 - t = \dfrac{\lambda_n^{1/n}\,(B)}{\lambda_n^{1/n}\,(A) + \lambda_n^{1/n}\,(B)} \in \,]0, 1[$. Soient aussi les ensembles $\widetilde{A}$ et $\widetilde{B}$ définis par :

$$\widetilde{A} := \frac{1}{\lambda_n^{1/n}\,(A)} A \quad \text{et} \quad \widetilde{B} := \frac{1}{\lambda_n^{1/n}\,(B)} B.$$

Il est clair que $\widetilde{A}$ et $\widetilde{B}$ sont compacts. En utilisant l'homogénéité de la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$, on a aussi

$$\lambda_n\left(\widetilde{A}\right) = \lambda_n\left(\widetilde{B}\right) = 1.$$

En utilisant le théorème 4.1, on a

$$\lambda_n\left(t\widetilde{A} + (1-t)\,\widetilde{B}\right) \geq \lambda_n\left(\widetilde{A}\right)^t \lambda_n\left(\widetilde{B}\right)^{1-t} = 1. \tag{4}$$

Or, en utilisant l'homogénéité de λ_n, on a

$$\begin{aligned}
\lambda_n\left(t\widetilde{A} + (1-t)\,\widetilde{B}\right) &= \lambda_n\left(\frac{1}{\lambda_n^{1/n}\,(A) + \lambda_n^{1/n}\,(B)} A + \frac{1}{\lambda_n^{1/n}\,(A) + \lambda_n^{1/n}\,(B)} B\right) \\
&= \lambda_n\left(\frac{1}{\lambda_n^{1/n}\,(A) + \lambda_n^{1/n}\,(B)}\,(A + B)\right) \\
&= \frac{\lambda_n\,(A + B)}{\left(\lambda_n^{1/n}\,(A) + \lambda_n^{1/n}\,(B)\right)^n}.
\end{aligned}$$

Cette égalité utilisée dans (4) donne

$$\lambda_n (A+B) \geq \left(\lambda_n^{1/n}(A) + \lambda_n^{1/n}(B)\right)^n,$$

ce qui termine la preuve de l'inégalité de Brunn-Minkowski.

□

Remarque 4. Nous avons montrer que le théorème 4.1 implique le théorème 4.2. On peut en fait montrer que ces deux résultats sont équivalents.

Nous le montrerons pas ici mais l'inégalité de Brunn-Minkowski est une égalité si, et seulement si, A et B sont des convexes homothétiques (l'un se déduit de l'autre par une homothétie).

5 Inégalité isopérimétrique

Avant d'énoncer l'inégalité isopérimétrique, nous définissons la notion de périmètre dans $\mathbb{R}^n$. On munit $\mathbb{R}^n$ de son produit scalaire canonique. La métrique est donc la métrique qui découle de ce produit scalaire.
On note B_2^n la boule unité de centre 0 et de rayon 1.

Définition 5.1. *Périmètre.*
Soit A un ensemble compact de $\mathbb{R}^n$. On définit son périmètre $p_n(A)$ par

$$p_n(A) := \liminf_{\varepsilon \to 0} \frac{\lambda_n(A+\varepsilon B_2^n) - \lambda_n(A)}{\varepsilon}.$$

Remarque 5. La définition 5.1 fait intervenir une limite inférieure plutôt qu'une limite pour en assurer l'existence.

Proposition 5.1. *Des formules vues en petites classes !*
Le périmètre d'un carré de côté $a > 0$ est $4a$ et le périmètre d'un cercle de rayon $R > 0$ est $2\pi R$.

Remarque 6. Cette proposition semble triviale : elle ne l'est pas car il n'est pas clair que notre définition du périmètre coïncide avec la notion intuitive du périmètre. Pour que la définition donnée soit bonne, il faut que les notions coïncident, au moins pour les « figures géométriques » usuelles.

Démonstration. 1. *Le cercle.*
Soit A un disque de centre $x_0 \in \mathbb{R}^2$ rayon $R > 0$. Par invariance de la mesure de Lebesgue par translation, on peut supposer que A est le disque de centre 0 et de rayon $R > 0$.
Son aire est donnée par :

$$\lambda_2(A) = \int_{\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\, x^2+y^2\leq R\}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^R \int_0^{2\pi} r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r = \pi R^2,$$

où l'on a fait un changement de variable pour utiliser les coordonnées polaires.
Or, $A + \varepsilon B_2^2$ est le disque ouvert de centre 0 et de rayon $R+\varepsilon$ dont l'aire est $\pi(R+\varepsilon)^2$. Ainsi,

$$p_2(A) = \liminf_{\varepsilon\to 0} \frac{\lambda_2\left(A+\varepsilon B_2^2\right) - \lambda_2(A)}{\varepsilon} = \liminf_{\varepsilon\to 0} \frac{\pi(R+\varepsilon)^2 - \pi R^2}{\varepsilon} = 2\pi R.$$

2. *Le carré.*
Soit A un rectangle dont les côtés sont de longueurs $\ell > 0$ et $L > 0$. Par invariance de la mesure de Lebesgue par translation, on peut supposer que $A = [0,\ell]\times[0,L]$. Son aire est donnée par :

$$p_2(A) = \int_{[0,\ell]\times[0,L]} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \left(\int_0^\ell \mathrm{d}x\right)\left(\int_0^L \mathrm{d}y\right) = \ell \times L.$$

Soit C un carré de longueur $a > 0$. Soit $\varepsilon > 0$.
La partie hachurée ci-dessous correspond à la partie $\left(C+\varepsilon B_2^2\right)\setminus B_2^2$ dont la mesure est $\lambda_2\left(\left(C+\varepsilon B_2^2\right)\setminus C\right) = \lambda_2\left(C+\varepsilon B_2^2\right) - \lambda_2(C)$.

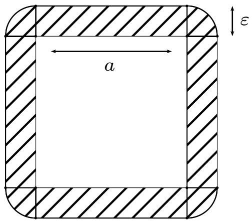

FIGURE 1 – La mesure de la partie hachurée est $\lambda_2\left(C+\varepsilon B_2^2\right)-\lambda_2\left(C\right)$.

D'après le calcul de la mesure d'un rectangle et la première partie de la proposition 5.1, on a

$$\lambda_2\left(C+\varepsilon B_2^2\right)=4a\varepsilon+\pi\varepsilon^2.$$

Il s'ensuit que

$$p_2\left(C\right)=\liminf_{\varepsilon\to 0}\frac{4a\varepsilon+\pi\varepsilon^2}{\varepsilon}=4a.$$

□

Théorème 5.1. *Inégalité isopérimétrique.*
Pour tout compact $A\subset\mathbb{R}^n$, on a

$$p_n\left(A\right)\geq n\lambda_n^{1-1/n}\left(A\right)\lambda_n^{1/n}\left(B_2^n\right).$$

Remarque 7. En utilisant le fait que l'aire de la boule unité de centre 0 et de rayon 1 est π, cette version de l'inégalité isopérimétrique permet de retrouver, lorsque $n=2$, la célèbre formule

$$p_2\left(A\right)^2\geq 4\pi\lambda_2\left(A\right).$$

Démonstration. La preuve se base sur l'inégalité de Brunn-Minkowski. On suppose évidemment que A est non vide, sinon le résultat n'a que peu d'intérêt. Par l'inégalité de Brunn-Minkowski et la formule du binôme de Newton, on a :

$$\lambda_n\left(A+\varepsilon B_2^n\right)\geq\left(\lambda_n^{1/n}\left(A\right)+\varepsilon\lambda_n^{1/n}\left(B_2^n\right)\right)^n\underset{\varepsilon\to 0}{=}\lambda_n\left(A\right)+n\varepsilon\lambda_n^{1-1/n}\left(A\right)\lambda_n^{1/n}\left(B_2^n\right)+o\left(\varepsilon\right).$$

On en déduit donc que

$$p_n\left(A\right)=\liminf_{\varepsilon\to 0}\frac{\lambda_n\left(A+\varepsilon B_2^n\right)-\lambda_n\left(A\right)}{\varepsilon}\geq n\lambda_n^{1-1/n}\left(A\right)\lambda_n^{1/n}\left(B_2^n\right).$$

□

Références

[1] F. Barthe, *Optimal Young's inequality and its converse : a simple proof.* Geom. Funct. Anal., 8, pp. 234-242, 1998.

[2] D. Cordero-Erausquin, B. Nazaret, C. Villani, *A mass-transportation approach to sharp Sobolev and Gagliardo–Nirenberg inequalities.* Advances in Math. 182, pp. 307-332, 2004.

[3] J. Gapaillard, *Intégration pour la Licence.* Dunos, 2-ème édition, 2002.

[4] R. J. McCann, *Existence and uniqueness of monotone measure-preserving maps.* Duke Math. Journal,80 (2), pp. 309–323, 1995.

[5] A. Prékopa, *On logarithmic concave measures and functions.* Acta Scient. Math., 34, pp. 335–343, 1973.

[6] W. Rudin, *Analyse réelle et complexe.* Dunod, 3$^{\text{ème}}$ édition, 2009.

[7] C. Villani, *Topics in mass transportation.* Graduate Studies in Mathematics, Vol. 58, Amer. Math. Soc., Providence.