Sur un modèle pré-gaussien : des mesures de Cauchy à la gaussienne

Erik Thomas*

Résumé

Dans cet article, nous établissons une inégalité isopérimétrique pour les mesures de Cauchy. En passant à la limite, nous retrouvons la célèbre inégalité isopérimétrique pour la mesure gaussienne.

Dans un second temps, nous retrouvons des inégalités intégrales à poids déjà mentionnées dans [1].

1 Introduction

1.1 Motivations

Le but de cet article est l'étude d'une inégalité isopérimétrique pour une famille de mesures : les mesures de Cauchy. Avant de définir correctement le cadre, précisons ce que l'on entend par inégalité isopérimétrique.

On appelle inégalité isopérimétrique toute inégalité qui lie le périmètre et l'aire (ou le volume) d'une « figure géométrique ». Ainsi le lecteur est sûrement familier avec la célèbre formule

$$\mathscr{P}^2 \geq 4\pi\mathscr{A}$$

où $\mathscr{P}$ et $\mathscr{A}$ désignent respectivement le périmètre et l'aire d'une figure géométrique du plan.

Dans cet article, nous nous plaçons uniquement dans $\mathbb{R}$. Ainsi, l'aire est remplacée par la mesure de la longueur d'une partie de $\mathbb{R}$ et le périmètre est la mesure de son bord (mesure de Hausdorff $\mathscr{H}^0$). Ainsi, par exemple, si γ_1 est la mesure gaussienne centrée et réduite dont la densité est $\varphi(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-x^2/2}$, on peut définir la mesure de bord associée γ_1^+ par

$$\gamma_1^+(A) := \int_{\partial A} \varphi(t)\,\mathrm{d}\mathscr{H}^0(t).$$

L'inégalité isopérimétrique gaussienne stipule que pour tout borélien A, on a

$$\gamma_1^+(A) \geq \varphi\left(\Phi^{-1}(\gamma_1(A))\right) \tag{1}$$

où Φ est la fonction de répartition de γ_1.

Cette inégalité est déjà connue de C. Borell. Dans [2] (voir aussi [6]), il est est le premier à établir l'inégalité suivante : pour tout borélien $A \subset \mathbb{R}^n$, pour tout réel $r > 0$,

$$\Phi^{-1}(\gamma_n(A + B_n(0,r))) \geq \Phi^{-1}(\gamma_n(A)) + r, \tag{2}$$

où γ_n est la mesure gaussienne dans $\mathbb{R}^n$, $B_n(0,r)$ est la boule euclidienne de centre 0 et de rayon r et $A + B_n(0,r)$ est la somme de Minkowski définie par

$$A + B_n(0,r) := \{a + b,\ a \in A,\ b \in B_n(0,r)\}.$$

L'inégalité de Borell (2) entraîne l'inégalité (1), mais dans [7], nous retrouvons (1) par des moyens élémentaires.

Dans cet article, nous nous intéressons plus attentivement aux mesures de Cauchy : ce sont des mesures de la forme

$$\mathrm{d}\mu_\beta(t) := \frac{1}{Z_\beta}\left(1 + \frac{t^2}{2\beta}\right)^{-\beta}\mathrm{d}t$$

*erik.thomas@ens-rennes.fr

où Z_β est une constante (précisée plus loin, voir la ligne (6)) choisie pour que μ_β soit une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}$.

Comme pour la mesure gaussienne, nous définissons une mesure de bord pour la mesure μ_β (définition 1.1), qui ne sera pas exactement la même car nous y ajoutons un poids. Nous établissons ensuite une inégalité isopérimétrique analogue à celle pour la mesure gaussienne (théorème 1.1).

Ce modèle intéressant en soi, permet de retrouver lorsque β tend vers $+\infty$ l'inégalité isopérimétrique gaussienne (1). Ainsi, les mesures de Cauchy forment un modèle pré-gaussien : le cas gaussien apparaît comme un cas limite du cas des mesures de Cauchy (théorème 3.1).

Par l'utilisation de la formule de la co-aire (proposition 4.1), l'inégalité isopérimétrique pour les mesures de Cauchy permettent de donner des inégalités intégrales du type (théorème 4.1)

$$\int_{\mathbb{R}} |u'(t)| \left(1+\frac{t^2}{2\beta}\right)^{-(\beta-1)} \mathrm{d}t \geq c_\beta \int_{\mathbb{R}} |u(t)-m| \left(1+\frac{t^2}{2\beta}\right)^{-\beta} \mathrm{d}t \tag{3}$$

où m est une médiane de u pour la mesure μ_β (définition 4.1) et $c_\beta > 0$ est une constante précisée et dépendant uniquement de β.

Cette inégalité L^1 permet, grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz d'obtenir des inégalités analogues mais de type L^2 (théorème 4.2)

$$\sqrt{\int_{\mathbb{R}} u'^2(t) \left(1+\frac{t^2}{2\beta}\right)^{-(\beta-2)} \mathrm{d}t} \geq d_\beta \sqrt{\int_{\mathbb{R}} \left(u(t)-\int_{\mathbb{R}} u \,\mathrm{d}\mu_\beta\right)^2 \left(1+\frac{t^2}{2\beta}\right)^{-\beta} \mathrm{d}t} \tag{4}$$

où $d_\beta > 0$ est une constante précisée.

Les inégalités du type (3) et (4) sont déjà connues, voir par exemple [1]. Dans [1], Bobkov et Ledoux établissent ces inégalités pour les mesures de Cauchy dans $\mathbb{R}^n$. Leur approche est différente car ils établissent d'abord une inéqualité de type Brascamp-Lieb et en déduisent des inégalités des inégalités comme (3) ou (4).

1.2 Notations

Nous commençons cette sous-partie par une proposition qui nous servira plus loin.

Proposition 1.1. *Calcul d'une intégrale.*

Pour tout $\beta > 1/2$, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^\beta}$ *converge et vaut* $\displaystyle\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\beta-\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\beta)}$.

Démonstration. On introduit la fonction B sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ par

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*, \quad B(x,y) := \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t.$$

On peut montrer que (on renvoie les preuves à [5]) que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*, \quad B(x,y) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+y}}\mathrm{d}t = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}. \tag{5}$$

On revient à l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^\beta}$. La convergence est laissée au lecteur. La parité et le changement de variable $u = x^2$ donnent

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^\beta} = \int_0^{+\infty} \frac{u^{-1/2}}{(1+u)^\beta}\mathrm{d}u.$$

En utilisant (5), on en déduit que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^\beta} = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\beta-\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\beta)}.$$

Or, il est classique que $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ (intégrale de Gauss), ce qui termine la preuve.

□

Pour tout $\beta \geq 1$, on introduit les fonctions φ_β et ψ_β par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi_\beta(x) := \left(1 + \frac{x^2}{2\beta}\right)^{-\beta} \quad \text{et} \quad \psi_\beta(x) := \left(1 + \frac{x^2}{2\beta}\right)^{-(\beta-1)}.$$

On définit sur $\mathbb{R}$ la mesure à densité μ_β par

$$\mathrm{d}\mu_\beta = \frac{1}{Z_\beta}\varphi_\beta(x)\,\mathrm{d}x$$

où la constante Z_β est choisie pour que μ_β soit une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}$. Plus précisément, on a :

$$Z_\beta := \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\left(1 + \frac{x^2}{2\beta}\right)^\beta}.$$

Le changement de variable $u = \dfrac{x}{\sqrt{2\beta}}$ et la proposition 1.1 donnent

$$Z_\beta = \sqrt{2\pi\beta}\frac{\Gamma\left(\beta - \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\beta)}. \tag{6}$$

On note Φ_β la fonction de répartition associée à la mesure de probabilité μ_β, ainsi

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \Phi_\beta(x) := \int_{-\infty}^{x} \mathrm{d}\mu_\beta(t) = \frac{1}{Z_\beta}\int_{-\infty}^{x} \varphi_\beta(t)\,\mathrm{d}t.$$

Il est facile de constater que Φ_β est une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $]0,1[$.

On définit maintenant la notion de mesure de bord μ_β^+ associée à la mesure μ_β.

Définition 1.1. *Mesure de bord associée à μ_β.*
On définit la mesure borélienne de bord μ_β^+ par : pour tout borélien $A \subset \mathbb{R}$,

$$\mu_\beta^+(A) := \int_{\partial A} \frac{\varphi_\beta(t)}{Z_\beta^{-1/\beta}} \times \frac{\varphi_\beta(t)^{-\beta}}{Z_\beta}\mathrm{d}\mathscr{H}^0(t) = \frac{1}{Z_\beta^{1-1/\beta}}\int_{\partial A} \psi_\beta(t)\,\mathrm{d}\mathscr{H}^0(t),$$

où ∂A est le bord topologique de A défini par $\partial A := \mathrm{adh}(A) \setminus \mathrm{int}(A)$ (l'adhérence privé de l'intérieur) et $\mathscr{H}^0$ est la mesure de Hausdorff 0-dimensionnelle.

Remarque 1. Deux remarques :

1. Cette définition mérite quelques commentaires. La définition exacte des mesures de Hausdorff est inutile ici car on peut montrer (voir [3]) que la mesure $\mathscr{H}^0$ est la mesure de comptage sur $\mathbb{R}$, i.e.

$$\forall A \subset \mathbb{R}, \quad \mathscr{H}^0(A) = \begin{cases} \mathrm{card}(A) & \text{si } A \text{ est fini} \\ +\infty & \text{si } A \text{ n'est pas fini} \end{cases}.$$

   Ainsi, si A est un intervalle, disons $A = (a,b)$ avec $a = -\infty$ et/ou $b = +\infty$ possibles (la notation (a,b) signifie que les bornes sont ouvertes ou fermées), alors

$$\mu_\beta^+(A) = \frac{1}{Z_\beta^{1-1/\beta}}\left(\psi_\beta(a) + \psi_\beta(b)\right)$$

   avec la convention que $\psi_\beta(-\infty) = \psi_\beta(+\infty) = 0$.

2. La deuxième remarque concerne la définition de la mesure de bord : la définition donnée est moins classique à cause du poids $\dfrac{\varphi_\beta(t)}{Z_\beta^{-1/\beta}}$. La présence de ce poids est indispensable pour s'assurer d'une inégalité isopérimétrique. En effet, si l'on définissait la mesure de bord sans poids, on peut montrer alors que la mesure de Cauchy ne satisfait pas d'inégalité isopérimétrique.

On définit enfin la fonction $\mathscr{I}_\beta$ sur $]0,1[$ par

$$\forall t \in]0,1[\,, \quad \mathscr{I}_\beta(t) := \frac{1}{Z_\beta^{1-1/\beta}} \left(\psi_\beta \circ \Phi_\beta^{-1}\right)(t)\,.$$

On prolonge $\mathscr{I}_\beta$ par continuité sur $[0,1]$ en posant $\mathscr{I}_\beta(0) = \mathscr{I}_\beta(1) = 0$.

Enfin, on note $\mathscr{O}$ l'ensemble des parties de $\mathbb{R}$ qui s'écrivent comme une union au plus dénombrable d'intervalles ouverts ou fermés.

Notre principal résultat est le suivant :

Théorème 1.1. *Inégalité isopérimétrique pour les mesures de Cauchy.*

Pour tout $A \in \mathscr{O}$ et pour tout $\beta \geq 1$

$$\mu_\beta^+(A) \geq \mathscr{I}_\beta\left(\mu_\beta(A)\right). \tag{7}$$

2 Preuve du résultat principal

Dans toute la suite, sauf mention explicite du contraire, β est un réel supérieur ou égal à 1.

On remarque que l'inégalité (7) à prouver est triviale lorsque $\mu_\beta(A) = 0$ ou 1. En effet, lorsque $\mu_\beta(A) = 0$ ou 1, on a

$$\mathscr{I}_\beta\left(\mu_\beta(A)\right) = 0.$$

Ainsi, on peut supposer $\mu_\beta(A) \in]0,1[$. De plus, comme $\partial A = \partial \overline{A}$ ($\overline{A}$ désigne le complémentaire de A dans $\mathbb{R}$), on a $\mu_\beta^+(A) = \mu_\beta^+\left(\overline{A}\right)$. Il s'ensuit que pour toute partie A réunion au plus dénombrable d'intervalles, on a

$$\begin{aligned} \mu_\beta^+(A) \geq \mathscr{I}_\beta\left(\mu_\beta(A)\right) \quad &\Longleftrightarrow \quad \mu_\beta^+\left(\overline{A}\right) \geq \mathscr{I}_\beta\left(1 - \mu_\beta\left(\overline{A}\right)\right) \\ &\Longleftrightarrow \quad \mu_\beta^+\left(\overline{A}\right) \geq \mathscr{I}_\beta\left(\mu_\beta\left(\overline{A}\right)\right), \end{aligned}$$

car, pour tout $x \in]0,1[$, $\Phi_\beta^{-1}(1-x) = 1 - \Phi_\beta^{-1}(x)$ et en utilisant la parité de la fonction $\Phi_\beta' = \dfrac{1}{Z_\beta}\varphi_\beta$.

Ces équivalences montrent qu'il suffit de prouver le théorème 1.1 pour les parties A dont la mesure de Cauchy est comprise entre 0 et $\frac{1}{2}$.

2.1 Cas où A est un intervalle

D'après la définition de μ_β^+, il suffit de s'intéresser aux intervalles fermés.

Soit $p \in \left]0, \frac{1}{2}\right]$ et soit $A := [a,b]$ tel que $\mu_\beta(A) = p$. Notons que l'on peut avoir $a = -\infty$ ou $b = +\infty$.

L'idée est d'étudier, parmi les intervalles dont la mesure gaussienne vaut p, ceux dont la mesure de bord est la plus petite.

On introduit le point médian m de A pour μ_β, il vérifie les conditions suivantes :

$$\begin{cases} \Phi_\beta(m) - \Phi_\beta(a) = \frac{p}{2} \\ \Phi_\beta(b) - \Phi_\beta(m) = \frac{p}{2} \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} a = \Phi_\beta^{-1}\left(\Phi_\beta(m) - \frac{p}{2}\right) \\ b = \Phi_\beta^{-1}\left(\Phi_\beta(m) + \frac{p}{2}\right) \end{cases}.$$

D'après la définition 1.1, on a donc

$$\mu_\beta^+(A) = \frac{1}{Z_\beta^{1-1/\beta}}\left(\psi_\beta(a) + \psi_\beta(b)\right) = \frac{1}{Z_\beta^{1-1/\beta}}\left(\psi_\beta\left(\Phi_\beta^{-1}\left(\Phi_\beta(m) - \frac{p}{2}\right)\right) + \psi_\beta\left(\Phi_\beta^{-1}\left(\Phi_\beta(m) + \frac{p}{2}\right)\right)\right).$$

Pour trouver les intervalles de mesure de Cauchy égale à p pour lesquels la mesure de bord est minimale, nous allons optimiser la fonction

$$f_\beta : m \longmapsto \frac{1}{Z_\beta^{1-1/\beta}}\left(\psi_\beta\left(\Phi_\beta^{-1}\left(\Phi_\beta(m) - \frac{p}{2}\right)\right) + \psi_\beta\left(\Phi_\beta^{-1}\left(\Phi_\beta(m) + \frac{p}{2}\right)\right)\right).$$

On remarque que $f_\beta(m)$ est défini si, et seulement si, $m \in \left]\Phi_\beta^{-1}\left(\frac{p}{2}\right), \Phi_\beta^{-1}\left(1 - \frac{p}{2}\right)\right[$.

Par des arguments standards, f_β est dérivable sur $\left]\Phi_\beta^{-1}\left(\frac{p}{2}\right), \Phi_\beta^{-1}\left(1-\frac{p}{2}\right)\right[$ et, en utilisant les formules de dérivation des fonctions composées et des fonctions réciproques, on a

$$\begin{aligned} f'_\beta(m) = & \frac{1}{Z_\beta^{1-1/\beta}}\left(\psi'_\beta\left(\Phi_\beta^{-1}\left(\Phi_\beta(m)-\frac{p}{2}\right)\right) \times \frac{\Phi'_\beta(m)}{\Phi'_\beta \circ \Phi_\beta^{-1}\left(\Phi_\beta(m)-\frac{p}{2}\right)}\right. \\ + & \left.\psi'_\beta\left(\Phi_\beta^{-1}\left(\Phi_\beta(m)+\frac{p}{2}\right)\right) \times \frac{\Phi'_\beta(m)}{\Phi'_\beta \circ \Phi_\beta^{-1}\left(\Phi_\beta(m)+\frac{p}{2}\right)}\right). \end{aligned}$$

Comme $\Phi'_\beta = \frac{1}{Z_\beta}\varphi_\beta$ et, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\frac{\psi'_\beta(t)}{\varphi_\beta(t)} = -\frac{\beta-1}{\beta}t$, on en déduit donc

$$f'_\beta(m) = -\frac{(\beta-1)\varphi_\beta(m)}{\beta Z_\beta^{2-1/\beta}}\left(\Phi_\beta^{-1}\left(\Phi_\beta(m)-\frac{p}{2}\right)+\Phi_\beta^{-1}\left(\Phi_\beta(m)+\frac{p}{2}\right)\right).$$

Les fonctions Φ_β et Φ_β^{-1} étant strictement croissantes sur leurs ensembles de définition respectifs, la fonction $m \longmapsto \Phi_\beta^{-1}\left(\Phi_\beta(m)-\frac{p}{2}\right)+\Phi_\beta^{-1}\left(\Phi_\beta(m)+\frac{p}{2}\right)$ est donc strictement croissante sur $\left]\Phi_\beta^{-1}\left(\frac{p}{2}\right), \Phi_\beta^{-1}\left(1-\frac{p}{2}\right)\right[$. De plus,

$$f'_\beta(0) = -\frac{(\beta-1)\varphi_\beta(0)}{\beta Z_\beta^{2-1/\beta}}\left(\Phi_\beta^{-1}\left(\Phi_\beta(0)-\frac{p}{2}\right)+\Phi_\beta^{-1}\left(\Phi_\beta(0)+\frac{p}{2}\right)\right).$$

Or, $\Phi_\beta(0) = \frac{1}{2}$, on récupère donc

$$\begin{aligned} f'_\beta(0) &= -\frac{(\beta-1)\varphi'_\beta(0)}{\beta Z_\beta^{2-1/\beta}}\left(\Phi_\beta^{-1}\left(\frac{1-p}{2}\right)+\Phi_\beta^{-1}\left(\frac{1+p}{2}\right)\right) \\ &= -\frac{(\beta-1)\varphi'_\beta(0)}{\beta Z_\beta^{2-1/\beta}}\left(\Phi_\beta^{-1}\left(1-\frac{1+p}{2}\right)+\Phi_\beta^{-1}\left(\frac{1+p}{2}\right)\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

car pour tout $x \in]0,1[$, $\Phi_\beta^{-1}(1-x) = -\Phi_\beta^{-1}(x)$. De plus, on a

$$\lim_{m \to \Phi_\beta^{-1}(p/2)} f_\beta(m) = \frac{1}{Z_\beta^{1-1/\beta}}\psi_\beta\left(\Phi_\beta^{-1}(p)\right) \quad \text{et} \quad \lim_{m \to \Phi_\beta^{-1}(1-p/2)} f_\beta(m) = \frac{1}{Z_\beta^{1-1/\beta}}\psi_\beta\left(\Phi_\beta^{-1}(1-p)\right).$$

Par parité de ψ_β, ces deux limites sont égales. On en déduit le tableau suivant :

m	$\Phi_\beta^{-1}\left(\frac{p}{2}\right)$		0		$\Phi_\beta^{-1}\left(1-\frac{p}{2}\right)$
$f'_\beta(m)$		$+$	0	$-$	
f_β	$\frac{1}{Z_\beta^{1-1/\beta}}\psi_\beta\left(\Phi_\beta^{-1}(p)\right)$	$\nearrow$		$\searrow$	$\frac{1}{Z_\beta^{1-1/\beta}}\psi_\beta\left(\Phi_\beta^{-1}(p)\right)$

On a montré que pour tout intervalle A tel que $\mu_\beta(A) = p$, on a

$$\mu_\beta^+(A) \geq \frac{1}{Z_\beta^{1-1/\beta}}\psi_\beta\left(\Phi_\beta^{-1}(p)\right) = \mathscr{I}_\beta\left(\mu_\beta(A)\right).$$

2.2 Cas d'une réunion finie d'intervalles deux à deux disjoints

Soit $p \in \left]0, \frac{1}{2}\right]$. Dans ce paragraphe, A est une réunion finie d'intervalles deux à deux disjoints. Comme $\mu_\beta^+(A) = \mu_\beta^+(\mathrm{adh}(A))$ et $\mu_\beta(A) = \mu_\beta(\mathrm{adh}(A))$, on peut supposer que A est fermé.

On écrit $A := \bigcup_{i=1}^{n} [a_i, b_i]$ où l'union est disjointe.

Si, par exemple $a_1 = b_1$, alors en considérant $B := A \backslash \{a_1\}$, on a $\mu_\beta(B) = \mu_\beta(A)$ et $\mu_\beta^+(A) \geq \mu_\beta^+(B)$, ainsi on peut supposer que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $a_i < b_i$.

Enfin, quitte à renuméroter les a_i et b_i, on peut supposer que $a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < \cdots < a_n < b_n$. Notons que l'on peut avoir $a_1 = -\infty$ et/ou $b_n = +\infty$.

On distingue trois cas :

i) Si $b_n \leq 0$, alors $A \subset \mathbb{R}_-$.
Comme $A \subset]-\infty, b_n]$, par croissance de la mesure, on a $p = \mu_\beta(A) \leq \mu_\beta(]-\infty, b_n]) = \Phi_\beta(b_n)$. Ainsi, par croissance de Φ_β^{-1} sur $]0,1[$, on obtient $b_n \geq \Phi_\beta^{-1}(p)$. En utilisant la croissance de ψ_β sur $\mathbb{R}_-$, on a $\psi_\beta(b_n) \geq \psi_\beta\left(\Phi_\beta^{-1}(p)\right)$. On en déduit que

$$\mu_\beta^+(A) = \frac{1}{Z_\beta^{1-1/\beta}} \sum_{i=1}^{n} \left(\psi_\beta(a_i) + \psi_\beta(b_i)\right) \geq \frac{1}{Z_\beta^{1-1/\beta}} \psi_\beta(b_n) \geq \frac{1}{Z_\beta^{1-1/\beta}} \psi_\beta\left(\Phi_\beta^{-1}(\mu_\beta(A))\right) = \mathscr{I}_\beta(\mu_\beta(A)).$$

ii) Si $a_n \geq 0$, alors $A \subset \mathbb{R}_+$. Si l'on note $-A = \{-a,\ a \in A\} \subset \mathbb{R}_-$, la parité de φ_β et i) donnent

$$\mu_\beta^+(A) = \mu_\beta^+(-A) \geq \mathscr{I}_\beta(\mu_\beta(-A)) = \mathscr{I}_\beta(\mu_\beta(A)).$$

iii) Si $b_n > 0$ et $a_n < 0$. Ce cas se divise en deux sous-cas :

- Si $0 \notin A$, ainsi pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, $0 \notin [a_j, b_j]$.
Soit k l'indice de $[\![1, n-1]\!]$ tel que

$$\bigcup_{i=1}^{k} [a_i, b_i] \subset \mathbb{R}_- \quad \text{et} \quad \bigcup_{i=k+1}^{n} [a_i, b_i] \subset \mathbb{R}_+.$$

On note

$$p_1 = \mu_\beta\left(\bigcup_{i=1}^{k} [a_i, b_i]\right) \quad \text{et} \quad p_2 = \mu_\beta\left(\bigcup_{i=k+1}^{n} [a_i, b_i]\right)$$

de sorte que $p = p_1 + p_2$. D'après les études faites en i) et ii) ci-dessus, on a

$$\mu_\beta^+(A) \geq \mu_\beta^+\left(\left]-\infty, \Phi_\beta^{-1}(p_1)\right]\right) + \mu_\beta^+\left(\left[\Phi_\beta^{-1}(1-p_2), +\infty\right[\right).$$

- Si $0 \in A$, il existe $k \in [\![1, n]\!]$ tel que $0 \in [a_k, b_k]$. On écrit alors :

$$A = \bigcup_{i=1}^{k-1} [a_i, b_i] \cup [a_k, b_k] \cup \bigcup_{i=k+1}^{n} [a_i, b_i].$$

On note

$$p_1 = \mu_\beta\left(\bigcup_{i=1}^{k-1} [a_i, b_i]\right), \quad p_2 = \mu_\beta([a_k, b_k]) \quad \text{et} \quad p_3 = \mu_\beta\left(\bigcup_{i=k+1}^{n} [a_i, b_i]\right).$$

L'union précédente étant disjointe, on a $p_1 + p_2 + p_3 = p$.
Comme p_1, p_2 sont deux éléments de $\left]0, \frac{1}{2}\right[$, d'après les cas i) et ii), on a

$$\mu_\beta^+\left(\left]-\infty, \Phi_\beta^{-1}(p_1)\right]\right) \leq \mu_\beta^+\left(\bigcup_{i=1}^{k-1} [a_i, b_i]\right) \quad \text{et} \quad \mu_\beta^+\left(\left[\Phi_\beta^{-1}(1-p_3), +\infty\right[\right) \leq \mu_\beta^+\left(\bigcup_{i=k+1}^{n} [a_i, b_i]\right),$$

ce qui donne

$$\mu_\beta^+\left(\left]-\infty, \Phi_\beta^{-1}(p_1)\right] \cup [a_k, b_k] \cup \left[\Phi_\beta^{-1}(1-p_2), +\infty\right[\right) \leq \mu_\beta^+(A)$$

avec

$$\mu_\beta\left(\left]-\infty, \Phi^{-1}(p_1)\right] \cup [a_k, b_k] \cup \left[\Phi^{-1}(1-p_2), +\infty\right[\right) = \mu_\beta(A).$$

De plus, en supposant que le point médian de l'intervalle $[a_k, b_k]$ est positif, l'étude de fonction faite au paragraphe 2.1 montre que la mesure de bord de l'intervalle $[a_k, b_k]$ décroît si on le « pousse vers la droite », ainsi

$$\mu_\beta^+\left(\left[\Phi_\beta^{-1}(1-(p_2+p_3)), +\infty\right[\right) \leq \mu_\beta^+\left([a_k, b_k] \cup \left[\Phi_\beta^{-1}(1-p_3), +\infty\right[\right)$$

avec

$$\mu_\beta\left(\left[\Phi_\beta^{-1}(1-(p_2+p_3)), +\infty\right[\right) = \mu_\beta\left([a_k, b_k] \cup \left[\Phi_\beta^{-1}(1-p_3), +\infty\right[\right).$$

Dans ce point iii), on a montré que pour n'importe quelle réunion finie d'intervalles fermés A de mesure de Cauchy $p \in \left]0, \frac{1}{2}\right]$, il existe une réunion de deux demi-droites D telle que

$$\mu_\beta^+(D) \leq \mu_\beta^+(A) \quad \text{avec} \quad \mu_\beta(D) = \mu_\beta(A).$$

On va maintenant se ramener à une seule demi-droite, c'est-à-dire, étant donné une réunion de deux demi-droites $]-\infty, a] \cup [b, +\infty[$ de mesure de Cauchy $p \in \left]0, \frac{1}{2}\right]$, nous allons montrer qu'il existe une demi-droite Δ de mesure de Cauchy p et telle que

$$\mu_\beta^+(\Delta) \leq \mu_\beta^+(D).$$

Un des deux seuls candidats possibles est $\Delta := \left]-\infty, \Phi_\beta^{-1}(p)\right]$ (l'autre est $\left[\Phi_\beta^{-1}(1-p), +\infty\right[$), ainsi il suffit de montrer que l'on a

$$\mu_\beta^+(\Delta) \leq \mu_\beta^+(D) \iff \frac{1}{Z_\beta^{1-1/\beta}}\psi_\beta\left(\Phi_\beta^{-1}(p_1+p_2)\right) \leq \frac{1}{Z_\beta^{1-1/\beta}}\psi_\beta\left(\Phi_\beta^{-1}(p_1)\right) + \frac{1}{Z_\beta^{1-1/\beta}}\psi_\beta\left(\Phi_\beta^{-1}(p_2)\right) \tag{8}$$

où l'on a noté $p_1 := \mu_\beta(]-\infty, a])$ et $p_2 := \mu_\beta([b, +\infty[)$. On notera que la parité de la fonction ψ_β assure que

$$\psi_\beta\left(\Phi_\beta^{-1}(1-p_2)\right) = \psi_\beta\left(\Phi_\beta^{-1}(p_2)\right).$$

On aura alors

$$\mu_\beta^+(A) \geq \mu_\beta^+\left(\left]-\infty, \Phi_\beta^{-1}(p)\right]\right) = \frac{1}{Z_\beta^{1-1/\beta}}\psi_\beta\left(\Phi_\beta^{-1}(p)\right) = \mathscr{I}_\beta(p) = \mathscr{I}_\beta(\mu_\beta(A)).$$

Pour prouver (8), nous utiliserons le lemme suivant :

Lemme 2.1. *Propriétés de la fonction $\mathscr{I}_\beta$.*

a) *La fonction $\mathscr{I}_\beta$ est concave sur $[0,1]$;*

b) *pour tout $(r,s) \in]0,1[^2$ avec $r+s<1$, on a*

$$\mathscr{I}_\beta(r+s) \leq \mathscr{I}_\beta(r) + \mathscr{I}_\beta(s).$$

Démonstration. a) Pour tout $t \in]0,1[$, on a

$$\mathscr{I}_\beta'(t) = \frac{1}{Z_\beta^{1-1/\beta}}\left(\psi_\beta \circ \Phi_\beta^{-1}\right)'(t) = \frac{1}{Z_\beta^{1-1/\beta}}\frac{\psi_\beta' \circ \Phi_\beta^{-1}(t)}{\Phi_\beta' \circ \Phi_\beta^{-1}(t)} = \frac{1}{Z_\beta^{-1/\beta}}\left(\frac{\psi_\beta'}{\varphi_\beta}\right)\left(\Phi_\beta^{-1}(t)\right)$$

car $\Phi_\beta' = \frac{1}{Z_\beta}\varphi_\beta$. Toujours en utilisant le fait que $\frac{\psi_\beta'(t)}{\varphi_\beta(t)} = -\frac{\beta-1}{\beta}t$, on obtient

$$\mathscr{I}_\beta'(t) = -\frac{\beta-1}{\beta \times Z_\beta^{-1/\beta}}\Phi_\beta^{-1}(t).$$

Or, Φ_β^{-1} est croissante sur $]0,1[$, il s'ensuit que $\mathscr{I}_\beta'$ est décroissante sur $]0,1[$, donc $\mathscr{I}_\beta$ est concave sur $]0,1[$.

Comme $\mathscr{I}_\beta$ est continue sur $[0,1]$, $\mathscr{I}_\beta$ est concave sur $[0,1]$.

b) Soit $s \in]0,1[$ fixé. Pour tout $r \in]0,1-s[$, on a

$$\frac{\mathrm{d}\left(\mathscr{I}_\beta(r+s)-\mathscr{I}_\beta(r)-\mathscr{I}_\beta(s)\right)}{\mathrm{d}r} = \mathscr{I}'_\beta(r+s)-\mathscr{I}'_\beta(r) \leq 0$$

car $\mathscr{I}_\beta$ est concave sur $]0,1[$. Ainsi $r \longmapsto \mathscr{I}_\beta(r+s)-\mathscr{I}_\beta(r)-\mathscr{I}_\beta(s)$ est décroissante sur $]0,1[$, d'où

$$\forall r \in]0,1-s[\quad \mathscr{I}_\beta(r+s)-\mathscr{I}_\beta(r)-\mathscr{I}_\beta(s) \leq \mathscr{I}_\beta(s)-\mathscr{I}_\beta(0)-\mathscr{I}_\beta(s) = -\mathscr{I}_\beta(0) \leq 0.$$

□

Le lemme (2.1) assure la véracité de la ligne (8), ce qui conclut iii).

2.3 Cas d'une réunion dénombrable d'intervalles

Soit $A := \bigcup_{i=1}^{+\infty}(a_i,b_i)$, avec les (a_i,b_i) deux à deux disjoints (on rappelle que la notation (a_i,b_i) signifie que les bornes sont ouvertes ou fermées) de mesure gaussienne $p \in \left]0,\frac{1}{2}\right]$.

Soit $B := \bigcup_{i=1}^{+\infty}[a_i,b_i]$.

Comme $\partial A = \partial B$, on a bien sûr $\mu_\beta^+(A) = \mu_\beta^+(B)$.

De plus, $B = A \cup \mathscr{N}$ où $\mathscr{N}$ est un ensemble au plus dénombrable, donc $\mu_\beta(A) = \mu_\beta(B)$.

Ainsi, on peut supposer que A est réunion d'intervalles fermés deux à deux disjoints.

En introduction, nous avons dit que le bord d'une réunion dénombrable d'intervalles fermés n'est « pas si simple ». Le lemme suivant permet une simplification.

Lemme 2.2. *Minoration de la mesure de bord d'une réunion d'intervalles.*

Soit $B := \bigcup_{i=1}^{+\infty}[a_i,b_i]$ *avec les intervalles* $[a_i,b_i]$ *deux à deux disjoints. On a :*

$$\partial B \supset \bigcup_{i=1}^{+\infty}\partial([a_i,b_i]) = \bigcup_{i=1}^{+\infty}\{a_i,b_i\}.$$

Démonstration. Soit $x \in \bigcup_{i=1}^{+\infty}\{a_i,b_i\}$.

Il est clair que $x \in A$, donc $x \in \operatorname{adh}(B)$.

Soit $\varepsilon > 0$. Comme l'union est composée d'intervalles deux à deux disjoints, on a $]x-\varepsilon,x+\varepsilon[\cap B \not\subset B$, ainsi $x \notin \operatorname{int}(B)$.

Cela prouve que $x \in \partial B = \operatorname{adh}(B) \setminus \operatorname{int}(B)$.

□

Le lemme 2.2 asure en particulier que

$$\mu_\beta^+(A) = \frac{1}{Z_\beta^{1-1/\beta}}\int_{\partial A}\psi_\beta(t)\,\mathrm{d}\mathscr{H}^0(t) \geq \frac{1}{Z_\beta^{1-1/\beta}}\int_{\bigcup_{i=1}^{+\infty}\{a_i,b_i\}}\psi_\beta(t)\,\mathrm{d}\mathscr{H}^0(t) = \frac{1}{Z_\beta^{1-1/\beta}}\sum_{i=1}^{+\infty}\left(\psi_\beta(a_i)+\psi_\beta(b_i)\right).$$

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Avec les mêmes notations que celles du lemme 2.2 et en supposant $\mu_\beta(A) \in \left]0,\frac{1}{2}\right]$, d'après le lemme 2.2, on a

$$\mu_\beta^+(A) \geq \frac{1}{Z_\beta^{1-1/\beta}}\sum_{i=1}^{N}\left(\psi_\beta(a_i)+\psi_\beta(b_i)\right) \geq \mu_\beta^+\left(\bigcup_{i=1}^{N}[a_i,b_i]\right).$$

D'après le paragraphe 2.2, en notant $p_N := \mu_\beta \left(\bigcup_{i=1}^{N} [a_i, b_i] \right) \in \left[0, \frac{1}{2} \right]$, on a

$$\mu_\beta^+ (A) \geq \mu_\beta^+ \left(\bigcup_{i=1}^{N} [a_i, b_i] \right) \geq \mathscr{I}_\beta (p_N) .$$

Or, par convergence monotone,

$$\lim_{N \to +\infty} p_N = \lim_{N \to +\infty} \mu_\beta \left(\bigcup_{i=1}^{N} [a_i, b_i] \right) = \mu_\beta (A) .$$

Par continuité de $\mathscr{I}_\beta$, on en déduit que

$$\mu_\beta^+ (A) \geq \mathscr{I}_\beta \left(\mu_\beta (A) \right) .$$

3 Retour sur l'inégalité isopérimétrique gaussienne

Les notations utilisées sont les mêmes que celles de [7]. Soit la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\varphi (x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-x^2/2}$$

la densité d'une loi normale centrée réduite. On note γ_1 la mesure de probabilité dont φ est la densité ainsi, pour tout borélien $A \subset \mathbb{R}$,

$$\gamma_1 (A) := \int_A \varphi (x) \, \mathrm{d}x.$$

Soit Φ la fonction de répartition de γ_1 : on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \Phi (x) := \int_{-\infty}^{x} \varphi (t) \, \mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-x^2/2} \mathrm{d}t.$$

Il est facile de constater que Φ est une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $]0,1[$.

On définit la mesure de bord gaussienne γ_1^+ par la

Définition 3.1. *Mesure de bord gaussienne.*

On définit la mesure borélienne de bord gaussienne γ_1^+ par : pour tout borélien $A \subset \mathbb{R}$,

$$\gamma_1^+ (A) := \int_{\partial A} \varphi (t) \, \mathrm{d}\mathscr{H}^0 (t) .$$

On définit la fonction $\mathscr{I}$ sur $]0,1[$ par :

$$\forall t \in \,]0,1[\, , \quad \mathscr{I} (t) := \left(\varphi \circ \Phi^{-1} \right) (t) .$$

On prolonge $\mathscr{I}$ par continuité sur $[0,1]$ en posant $\mathscr{I}(0) = \mathscr{I}(1) = 0$.

Le but de cette partie est de montrer l'inégalité isopérimétrique suivante pour la gaussienne.

Théorème 3.1. *Inégalité isopérimétrique pour la mesure gaussienne.*

$$\gamma_1^+ (A) \geq \mathscr{I} (\gamma_1 (A)) . \tag{9}$$

La preuve de ce résultat a déjà été faite dans [7] et la preuve est très similaire à celle du théorème 1.1. Ici, nous montrons comment le théorème 1.1 entraîne le théorème 3.1 en faisant tendre β vers $+\infty$. Ainsi, l'inégalité isopérimétrique gaussienne s'obtient par passage à la limite dans l'inégalité isopérimétrique pour les mesures de Cauchy.

Pour ne pas alourdir la preuve du théorème 3.1, nous utiliserons les lemmes suivants. Les deux premiers lemmes sont des résultats classiques et généraux et nous renvoyons leurs preuves à [4].

Lemme 3.1. *Théorème de Dini.*

Soit $[a,b]$ un segment de $\mathbb{R}$ et soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est croissante (resp. décroissante) et que la suite de fonctions converge simplement sur $[a,b]$ vers une fonction continue f.

Alors, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[a,b]$.

Lemme 3.2. *Un critère de convergence uniforme pour les fonctions convexes (resp. concaves).*

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions convexes (resp. concaves) définies sur un intervalle $[a,b]$ qui converge simplement continue f sur $[a,b]$.

Alors, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[a,b]$.

Remarque 2. Les deux lemmes 3.1 et 3.2 sont énoncés pour une variable discrète n qui tend vers $+\infty$. Une simple adaptation des preuves permet de se convaincre que ces deux résultats restent valables lorsque la variable n est remplacée par une variable continue.

Lemme 3.3. *Étude de la fonction $\beta \longmapsto \varphi_\beta(x)$.*

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $\beta \in [1,+\infty[\longmapsto \varphi_\beta(x)$ est décroissante sur $[1,+\infty[$.

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{R}$ Le cas où $x = 0$ est trivial. On suppose $x \neq 0$. Comme

$$\varphi_\beta(x) = \left(1 + \frac{x^2}{2\beta}\right)^{-\beta} = \exp\left(-\beta \ln\left(1 + \frac{x^2}{2\beta}\right)\right)$$

et par croissance de la fonction exp sur $\mathbb{R}$, il suffit de prouver la décroissance de la fonction

$$g : \beta \in [1,+\infty[\longmapsto -\beta \ln\left(1 + \frac{x^2}{2\beta}\right).$$

g est dérivable sur $[1,+\infty[$ et

$$\forall \beta \geq 1, \quad g'(\beta) = -\left(\ln\left(1 + \frac{x^2}{2\beta}\right) - \frac{\frac{x^2}{2\beta}}{1 + \frac{x^2}{2\beta}}\right) = -\left(\ln(1+u) - \frac{u}{1+u}\right)$$

où l'on a posé $u := \dfrac{x^2}{2\beta} > 0$. Une simple étude de fonction laissée au lecteur permet de montrer que

$$\forall x > 0, \quad -\left(\ln(1+x) - \frac{x}{1+x}\right) \leq 0.$$

Il s'ensuit que $g'(\beta) \leq 0$ pour tout $\beta > 1$, ainsi g est décroissante sur $[1,+\infty[$. $\square$

Lemme 3.4. *Convergence des mesures de Cauchy vers la gaussienne.*

Pour tout $A \in \mathscr{O}$, on a

$$\lim_{\beta\to+\infty} \mu_\beta(A) = \gamma_1(A).$$

Démonstration. Par définition, pour tout $\beta \geq 1$,

$$\mu_\beta(A) = \frac{1}{Z_\beta} \int_A \varphi_\beta(x)\,\mathrm{d}x.$$

D'après la formule de Stirling, on a

$$Z_\beta = \sqrt{2\pi\beta} \frac{\Gamma\left(1 + \beta - \frac{3}{2}\right)}{\Gamma(1 + \beta - 1)} \underset{\beta\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi\beta} \frac{\left(\frac{\beta - 3/2}{\mathrm{e}}\right)^{\beta-3/2} \sqrt{2\pi(\beta - 3/2)}}{\left(\frac{\beta-1}{\mathrm{e}}\right)^{\beta-1} \sqrt{2\pi(\beta-1)}} \underset{\beta\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi\mathrm{e}} \frac{\left(1 - \frac{3}{2\beta}\right)^{\beta-3/2}}{\left(1 - \frac{1}{\beta}\right)^{\beta-1}}.$$

Or, il est classique que

$$\lim_{\beta\to+\infty}\left(1-\frac{3}{2\beta}\right)^{\beta-3/2}=\mathrm{e}^{-3/2}\quad\text{et}\quad\lim_{\beta\to+\infty}\left(1-\frac{1}{\beta}\right)^{\beta-1}=\mathrm{e}^{-1},$$

ainsi

$$\lim_{\beta\to+\infty}Z_\beta=\sqrt{2\pi}.$$

On en déduit donc

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad\lim_{\beta\to+\infty}\frac{1}{Z_\beta}\varphi_\beta(x)=\lim_{\beta\to+\infty}\frac{1}{Z_\beta}\left(1+\frac{x^2}{2\beta}\right)^{-\beta}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-x^2/2}.$$

Comme $\beta\in[1,+\infty[\longmapsto Z_\beta$ est continue, strictement positive et admet une limite finie non nulle en $+\infty$, on en déduit que la fonction $\beta\in[1,+\infty[\longmapsto\dfrac{1}{Z_\beta}$ est majorée : soit M un majorant. Ainsi, en utilisant le lemme 3.3, on a

$$\forall\beta\geq1,\forall x\in\mathbb{R},\quad0\leq\frac{1}{Z_\beta}\varphi_\beta(x)\leq M\varphi_1(x)\in L^1(\mathbb{R}).$$

Le théorème de convergence dominée assure alors que

$$\lim_{\beta\to+\infty}\mu_\beta(A)=\lim_{\beta\to+\infty}\frac{1}{Z_\beta}\int_A\varphi_\beta(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_A\varphi(x)\,\mathrm{d}x=\gamma_1(A).$$

□

Lemme 3.5. *Convergence uniforme de Φ_β vers Φ sur $\mathbb{R}$.*
La famille $\left(\Phi_\beta\right)_{\beta\geq1}$ converge uniformément vers Φ sur $\mathbb{R}$ lorsque β tend vers $+\infty$.

Démonstration. Le lemme 3.4 utilisée avec $A=\,]-\infty,x]$ assure que la famille $\left(\Phi_\beta\right)_{\beta\geq1}$ converge simplement vers Φ lorsque β tend vers $+\infty$.

Soit $\varepsilon>0$. Comme

$$\lim_{x\to+\infty}\Phi(x)=1\quad\text{et}\quad\lim_{x\to-\infty}\Phi(x)=0,$$

il existe $B_1\leq0$ et $B_2\geq0$ tels que

$$\forall x\leq B_1,\quad|\Phi(x)|\leq\frac{\varepsilon}{2}\quad\text{et}\quad\forall x\geq B_2,\quad|\Phi(x)-1|\leq\frac{\varepsilon}{2}.\tag{10}$$

Or,

$$\lim_{\beta\to+\infty}\Phi_\beta(B_1)=\Phi(B_1)\quad\text{et}\quad\lim_{\beta\to+\infty}\Phi_\beta(B_2)=\Phi(B_2),$$

il existe donc $B\geq1$ tel que

$$\forall\beta\geq B,\quad\left|\Phi_\beta(B_1)-\Phi(B_1)\right|\leq\frac{\varepsilon}{2}\quad\text{et}\quad\left|\Phi_\beta(B_2)-\Phi(B_2)\right|\leq\frac{\varepsilon}{2}.\tag{11}$$

Par croissance de Φ_β sur $\mathbb{R}$, et en utilisant (10) et (11), on en déduit que

$$\forall x\leq B_1,\ \forall\beta\geq B,\quad\left|\Phi(x)-\Phi_\beta(x)\right|\leq\Phi(x)+\Phi_\beta(x)\leq\Phi(x)+\Phi_\beta(B_1)\leq\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon\tag{12}$$

et

$$\forall x\geq B_2,\ \forall\beta\geq B,\quad\left|\Phi(x)-\Phi_\beta(x)\right|\leq1-\Phi(x)+1-\Phi_\beta(B_2)\leq\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon\tag{13}$$

Pour conclure, il suffit de traiter le cas du segment $[B_1,B_2]$. Comme la famille $\left(\Phi_\beta\right)_{\beta\geq1}$ est une famille de fonctions croissantes qui converge simplement vers Φ continue sur $[B_1,B_2]$, le lemme 3.1 assure que la convergence est uniforme sur $[B_1,B_2]$: il existe $C\geq1$ tel que

$$\forall\beta\geq C,\ \forall x\in[B_1,B_2],\quad\left|\Phi_\beta(x)-\Phi(x)\right|\leq\varepsilon.$$

Il s'ensuit que, pour tout $\beta\geq\max\{B,C\}$

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad\left|\Phi(x)-\Phi_\beta(x)\right|\leq\varepsilon.$$

□

Lemme 3.6. *Une première étude de la famille* $\Phi_\beta^{-1}(t)$.

Soit $t \in]0,1[$. *La famille* $\left(\Phi_\beta^{-1}(t)\right)_{\beta \geq 1}$ *est bornée lorsque* β *est dans un voisinage de* $+\infty$.

Démonstration. On pose $u_\beta = \Phi_\beta^{-1}(t)$ de sorte que $\Phi_\beta(u_\beta) = t$. On distingue deux cas :

- Si $1/2 \leq t < 1$. Il est alors clair que $u_\beta \geq 0$.
  De plus, par définition
  $$t = \Phi_\beta(u_\beta) = \frac{1}{Z_\beta}\int_{-\infty}^{u_\beta}\left(1+\frac{x^2}{2\beta}\right)^{-\beta}\mathrm{d}x = \frac{1}{Z_\beta}\int_{-\infty}^{u_\beta}\exp\left(-\beta\ln\left(1+\frac{x^2}{2\beta}\right)\right)\mathrm{d}x.$$
  En utilisant la majoration classique $\ln(1+x) \leq x$, valable pour $x > -1$, on en déduit que
  $$t \geq \frac{1}{Z_\beta}\int_{-\infty}^{u_\beta}\mathrm{e}^{-x^2/2}\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{2\pi}}{Z_\beta}\Phi(u_\beta).$$
  Soit $\alpha \in]t,1[$. Comme $\lim_{\beta\to+\infty} Z_\beta = \sqrt{2\pi}$ et $t < 1$, il existe $B \geq 1$ tel que pour tout $\beta \geq B$, $\dfrac{Z_\beta t}{\sqrt{2\pi}} \leq \alpha$, on en déduit que
  $$\forall \beta \geq B, \quad u_\beta \leq \Phi^{-1}(\alpha).$$
- Si $0 < t < 1/2$. Il est clair que $u_\beta \leq 0$. On pose $v_\beta = -u_\beta$. On a donc
  $$\Phi_\beta(u_\beta) + \Phi_\beta(v_\beta) = 1,$$
  ainsi
  $$\Phi_\beta(v_\beta) = 1 - \Phi_\beta(u_\beta) = 1 - t > 1/2.$$
  D'après le premier point de cette preuve, pour tout $\beta \geq B$, $v_\beta \leq \Phi^{-1}(\alpha)$, ainsi $u_\beta \geq -\Phi^{-1}(\alpha)$.

On a prouvé que pour tout $t \in]0,1[$, la famille $\Phi_\beta^{-1}(t)$ est bornée pour β assez grand. □

Lemme 3.7. *Une inégalité utile.*

Pour tout compact $K \subset \mathbb{R}$, *il existe* $c > 0$ *tel que*
$$\forall (x,x') \in K^2, \quad |x-x'| \leq c\,|\Phi(x) - \Phi(x')|.$$

Démonstration. Soit K un compact de $\mathbb{R}$. Soit $K' = \Phi(K)$; K' est un compact de $]0,1[$ comme l'image d'un compact par une fonction continue.

Soit $(x,x') \in K^2$: il existe t et t' deux éléments de K' tels que $x = \Phi^{-1}(t)$ et $x' = \Phi^{-1}(t')$. Comme Φ^{-1} est de classe $\mathscr{C}^1$ sur K', $\left|\Phi^{-1}\right|$ y est bornée : on note c un majorant. D'après l'inégalité des accroissements finis, on a
$$|x-x'| = \left|\Phi^{-1}(t) - \Phi^{-1}(t')\right| \leq c\,|t-t'| = c\,|\Phi(x) - \Phi(x')|.$$
□

Lemme 3.8. *Convergence de* Φ_β^{-1} *vers* Φ^{-1}.

La famille de fonctions $\left(\Phi_\beta^{-1}\right)_{\beta\geq 1}$ *converge simplement vers* Φ^{-1} *sur* $]0,1[$.

Démonstration. Soit $t \in]0,1[$. En posant $u_\beta = \Phi_\beta^{-1}(t) \iff t = \Phi_\beta(u_\beta)$, on a :
$$\left|\Phi_\beta^{-1}(t) - \Phi^{-1}(t)\right| = \left|u_\beta - \Phi^{-1}(\Phi_\beta(u_\beta))\right|.$$
D'après le lemme 3.6, la famille $(u_\beta)_{\beta\geq 1}$ est bornée, au moins pour les valeurs de β grande ; plus formellement, il existe $K \subset \mathbb{R}$ un compact et $B \geq 1$ tel que : pour tout $\beta \geq B$, $u_\beta \in K$.

D'après le lemme 3.7, il existe une constante $c > 0$ telle que
$$\left|\Phi_\beta^{-1}(t) - \Phi^{-1}(t)\right| = \left|u_\beta - \Phi^{-1}(\Phi_\beta(u_\beta))\right| \leq c\left|\Phi(u_\beta) - \Phi\left(\Phi^{-1}(\Phi_\beta(u_\beta))\right)\right| = c\left|\Phi(u_\beta) - \Phi_\beta(u_\beta)\right|. \tag{14}$$

Soit $\varepsilon > 0$. D'après le lemme 3.5, il existe $C \geq 1$ tel que pour tout $\beta \geq C$,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \left|\Phi(x) - \Phi_\beta(x)\right| \leq \varepsilon / c.$$

Cette ligne utilisée dans (14) avec $x = u_\beta$ donne

$$\left|\Phi_\beta^{-1}(t) - \Phi^{-1}(t)\right| \leq \varepsilon$$

ce qu'il fallait justement montrer.

□

Lemme 3.9. *Convergence uniforme de $\mathscr{I}_\beta$ vers $\mathscr{I}$.*
$\mathscr{I}_\beta$ converge uniformément vers $\mathscr{I}$ sur tout compact de $]0,1[$ lorsque β tend vers $+\infty$.

Démonstration. Nous avons déjà remarqué avec le lemme 2.1 que pour tout $\beta \geq 1$, $\mathscr{I}_\beta$ est concave sur $[0,1]$. Un raisonnement analogue montre que la fonction $\mathscr{I}$ est concave sur $[0,1]$. D'après le lemme 3.2 , il suffit de prouver la convergence simple de $\mathscr{I}_\beta$ vers $\mathscr{I}$ lorsque β tend vers $+\infty$.

Il est clair que $\left(I_\beta(0)\right)_{\beta\geq 1}$ et $\left(I_\beta(1)\right)_{\beta\geq 1}$ convergent respectivement vers $\mathscr{I}(0)$ et $\mathscr{I}(1)$. Soit $t \in]0,1[$. On écrit

$$\begin{aligned}
\left|\mathscr{I}_\beta(t) - \mathscr{I}(t)\right| &= \left|\frac{1}{Z_\beta^{1-1/\beta}}\psi_\beta \circ \Phi_\beta^{-1}(t) - \varphi \circ \Phi^{-1}(t)\right| \\
&= \left|\frac{1}{Z_\beta^{1-1/\beta}}\psi_\beta \circ \Phi_\beta^{-1}(t) - \frac{1}{Z_\beta^{1-1/\beta}}\psi_\beta \circ \Phi^{-1}(t) + \frac{1}{Z_\beta^{1-1/\beta}}\psi_\beta \circ \Phi^{-1}(t) - \varphi \circ \Phi^{-1}(t)\right| \\
&\leq \frac{1}{Z_\beta^{1-1/\beta}}\left|\psi_\beta \circ \Phi_\beta^{-1}(t) - \psi_\beta \circ \Phi^{-1}(t)\right| + \left|\frac{1}{Z_\beta^{1-1/\beta}}\psi_\beta \circ \Phi^{-1}(t) - \varphi \circ \Phi^{-1}(t)\right|.
\end{aligned}$$

D'après le lemme 3.8, $\lim\limits_{\beta\to+\infty} \Phi_\beta^{-1}(t) = \Phi^{-1}(t)$, ainsi il existe $B \geq 1$ tel que

$$\forall \beta \geq B, \quad \Phi_\beta^{-1}(t) \in K := \left[\Phi^{-1}(t) - 1, \Phi^{-1}(t) + 1\right].$$

Comme

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \left|\psi_\beta'(x)\right| = \left|\frac{-2x}{\left(1 + x^2/2\beta\right)^{\beta+1}}\right| \leq 2\left|x\right|,$$

par l'inégalité des accroissements finis, il existe $c > 0$ (indépendant de β) tel que

$$\forall \beta \geq B,\ \forall (u,v) \in K^2, \quad \left|\psi_\beta(u) - \psi_\beta(v)\right| \leq c\left|u - v\right|.$$

On récupère

$$\forall \beta \geq B, \quad \frac{1}{Z_\beta^{1-1/\beta}}\left|\psi_\beta \circ \Phi_\beta^{-1}(t) - \psi_\beta \circ \Phi^{-1}(t)\right| \leq \frac{c}{Z_\beta^{1-1/\beta}}\left|\Phi_\beta^{-1}(t) - \Phi^{-1}(t)\right|.$$

Il s'ensuit que

$$\left|\mathscr{I}_\beta(t) - \mathscr{I}(t)\right| \leq \frac{1}{Z_\beta^{1-1/\beta}}\left|\Phi_\beta^{-1}(t) - \Phi^{-1}(t)\right| + \left|\frac{1}{Z_\beta^{1-1/\beta}}\psi_\beta \circ \Phi^{-1}(t) - \varphi \circ \Phi^{-1}(t)\right|.$$

D'après le lemme 3.4 $\lim\limits_{\beta\to+\infty} Z_\beta^{1-1/\beta} = \sqrt{2\pi}$, donc d'après le lemme 3.8

$$\lim_{\beta\to+\infty}\left|\Phi_\beta^{-1}(t) - \Phi^{-1}(t)\right| = 0.$$

Enfin, il est facile de voir que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lim_{\beta \to +\infty} \frac{1}{Z_\beta^{1-1/\beta}} \psi_\beta(x) = \varphi(x),$$

on en déduit donc que

$$\lim_{\beta \to +\infty} I_\beta(t) = \mathscr{I}(t).$$

$\square$

Lemme 3.10. *Convergence de la mesure de bord.*

Pour tout $A \in \mathscr{O}$, on a

$$\lim_{\beta \to +\infty} \mu_\beta^+(A) = \gamma_1^+(A).$$

Démonstration. Soit $A \in \mathscr{O}$. Par définition 1.1, on a

$$\mu_\beta^+(A) = \frac{1}{Z_\beta^{1-1/\beta}} \int_{\partial A} \psi_\beta(x)\, \mathrm{d}\mathscr{H}^0(x) = \frac{1}{Z_\beta^{1-1/\beta}} \int_{\partial A} \varphi_\beta(x)^{1-1/\beta} \mathscr{H}^0(x).$$

La preuve est similaire de celle du lemme 3.4. La fonction $\beta \in [1,+\infty[\longmapsto \dfrac{1}{Z_\beta^{1-1/\beta}}$ est continue sur $[1,+\infty[$ et tend vers une limite finie lorsque β tend vers $+\infty$, ainsi il existe $M \geq 0$ tel que

$$\forall \beta \geq 1, \quad \frac{1}{Z_\beta^{1-1/\beta}} \leq M.$$

De plus, grâce au lemme 3.3, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \psi_\beta(x) \leq \varphi_1(x)^{1-1/\beta}.$$

Ainsi, en utilisant le fait que $\varphi_1(x) \leq 1$, on a

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall \beta \geq 3, \quad 0 \leq \psi_\beta(x) \leq \varphi_1(x)^{2/3} \underset{x \to \pm\infty}{=} O\left(\frac{1}{x^{4/3}}\right) \in L^1(\mathbb{R}).$$

Enfin, il est clair que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lim_{\beta \to +\infty} \frac{1}{Z_\beta^{1-1/\beta}} \psi_\beta(x) = \varphi(x).$$

Le théorème de convergence dominée assure alors que

$$\lim_{\beta \to +\infty} \mu_\beta^+(A) = \lim_{\beta \to +\infty} \frac{1}{Z_\beta^{1-1/\beta}} \int_{\partial A} \psi_\beta(x)\, \mathrm{d}\mathscr{H}^0(x) = \int_{\partial A} \varphi(x)\, \mathrm{d}\mathscr{H}^0(x) = \gamma_1^+(A).$$

$\square$

Nous pouvons maintenant le théorème 3.1.

Démonstration. Soit $A \in \mathscr{O}$. Si $\gamma_1(A) = 0$ ou 1, alors par absolue continuité de la mesure de Lebesgue par rapport à γ_1, on en déduit que pour tout $\beta \geq 1$, $\mu_\beta(A) = 0$ ou 1, ainsi $\mathscr{I}_\beta(\mu_\beta(A)) = 0$, l'inégalité à prouver est claire.

On suppose maintenant $\gamma_1(A) \in]0,1[$. D'après le théorème 1.1, on a

$$\forall \beta \geq 1, \quad \mu_\beta^+(A) \geq \mathscr{I}_\beta(\mu_\beta(A)).$$

Le lemme 3.10 assure que

$$\lim_{\beta \to +\infty} \mu_\beta^+(A) = \gamma_1^+(A).$$

D'après le lemme 3.4, on a

$$\lim_{\beta \to +\infty} \mu_\beta(A) = \gamma_1(A).$$

Soit $\varepsilon > 0$ tel que $K := [\gamma_1(A) - \varepsilon, \gamma_1(A) + \varepsilon] \subset]0,1[$: il existe $B \geq 1$ tel que

$$\forall \beta \geq B, \quad \mu_\beta(A) \in K. \tag{15}$$

D'après le lemme 3.9 $\mathscr{I}_\beta$ converge uniformément vers $\mathscr{I}$ sur K : si l'on fixe $\varepsilon > 0$, il existe $C \geq 1$ tel que

$$\forall \beta \geq C,\ \forall x \in K, \quad \left|\mathscr{I}_\beta(x) - \mathscr{I}(x)\right| \leq \varepsilon. \tag{16}$$

De plus, la continuité de $\mathscr{I}$ en $\gamma_1(A)$ assure qu'il existe $D \geq 1$ tel que

$$\forall \beta \geq D, \quad \left|\mathscr{I}\left(\mu_\beta(A)\right) - \mathscr{I}\left(\mu_\beta(A)\right)\right| \leq \varepsilon. \tag{17}$$

Pour conclure, il suffit d'écrire

$$\forall \beta \geq \max\{B, C, D\}, \quad \left|\mathscr{I}_\beta\left(\mu_\beta(A)\right) - \mathscr{I}(\gamma_1(A))\right| \leq \left|\mathscr{I}_\beta\left(\mu_\beta(A)\right) - \mathscr{I}\left(\mu_\beta(A)\right)\right| + \left|\mathscr{I}\left(\mu_\beta(A)\right) - \mathscr{I}(\gamma_1(A))\right|$$

et d'utiliser les lignes (15), (16) et (17).

□

4 Sur une inégalité de type Cheeger et Poincaré à poids

4.1 Inégalité de Cheeger à poids

Avant d'énoncer le résultat que nous prouverons ici, nous utiliserons la

Définition 4.1. *Valeur médiane.*
Soit $\beta \geq 1$. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction borélienne. Soit $m \in \mathbb{R}$.
*On dit que m est **une** valeur médiane de f pour la mesure μ_β si :*

$$\forall t \geq m \quad \mu_\beta(\{f > t\}) \leq \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \forall t < m \quad \mu_\beta(\{f > t\}) > \frac{1}{2}.$$

Remarque 3. Comme la définition le laisse entendre, une fonction peut avoir plusieurs valeurs médianes pour la mesure μ_β.

Dans cette sous-partie, nous montrons le résultat suivant :

Théorème 4.1. *Inégalité de Cheeger à poids.*
Soit $\beta \geq 1$. Pour toute fonction $u : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1_{\mathrm{pm}}$, on a

$$\int_{\mathbb{R}} \left|u'(t)\right| \left(1 + \frac{t^2}{2\beta}\right) \mathrm{d}\mu_\beta(t) \geq \frac{2}{Z_\beta} \int_{\mathbb{R}} \left|u(t) - m_{u,\beta}\right| \mathrm{d}\mu_\beta(t)$$

où $m_{u,\beta}$ est une valeur médiane de u pour la mesure de μ_β.

La preuve de ce résultat nécessite plusieurs résultats intermédiaires. Les deux premiers résultats sont des résultats généraux et nous renvoyons à [7] pour la preuve.

Lemme 4.1. *Représentation en « mille-feuille ».*
Soit $(X, \mathscr{X}, \mu)$ un espace mesuré. Soit $f \in L^1(\mu)$ à valeurs positives. Alors

$$\int_X f(x)\, \mathrm{d}\mu(x) = \int_0^{+\infty} \mu(\{f > t\})\, \mathrm{d}t.$$

Lemme 4.2. *Ouverts de $\mathbb{R}$.*
Tout ouvert de $\mathbb{R}$ s'écrit comme une union au plus dénombrable d'intervalles ouverts deux à deux disjoints.

Le résultat suivant découle de la concavité de $\mathscr{I}_\beta$ sur $[0,1]$.

Lemme 4.3. *Minoration de $\mathscr{I}_\beta$.*
On a

$$\forall \beta \geq 1,\ \forall t \in [0,1], \quad \mathscr{I}_\beta(t) \geq \frac{2}{Z_\beta^{1-1/\beta}} \min\{t, 1-t\}.$$

Démonstration. Soit $\beta \geq 1$. Comme $\mathscr{I}_\beta$ est concave sur $[0,1]$ (lemme 2.1), le graphe de $\mathscr{I}_\beta$ est au dessus de ses cordes, en particulier la corde qui passe par les points de coordonnées $\left(0, \mathscr{I}_\beta(0)\right)$ et $\left(\frac{1}{2}, \mathscr{I}_\beta\left(\frac{1}{2}\right)\right)$. Ainsi,

$$\forall t \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \quad \mathscr{I}_\beta(t) \geq \frac{\mathscr{I}_\beta\left(\frac{1}{2}\right)}{\frac{1}{2}} t.$$

Or, $\mathscr{I}_\beta\left(\frac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{Z_\beta^{1-1/\beta}} \psi_\beta\left(\Phi_\beta^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \dfrac{1}{Z_\beta^{1-1/\beta}} \psi_\beta(0) = \dfrac{1}{Z_\beta^{1-1/\beta}}$, ainsi

$$\forall t \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \quad \mathscr{I}_\beta(t) \geq \frac{2}{Z_\beta^{1-1/\beta}} = \frac{2}{Z_\beta^{1-1/\beta}} \min\{t, 1-t\}. \tag{18}$$

Un même raisonnement montre que

$$\forall t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right], \quad \mathscr{I}_\beta(t) \geq \frac{2}{Z_\beta^{1-1/\beta}}(1-t) = \frac{2}{Z_\beta^{1-1/\beta}} \min\{t, 1-t\}. \tag{19}$$

Les lignes (18) et (19) montrent que

$$\forall t \in [0,1] \quad \mathscr{I}_\beta(t) \geq \frac{2}{Z_\beta^{1-1/\beta}} \min\{t, 1-t\}.$$

□

Citons enfin l'inégalité de la co-aire. Nous renvoyons à [3] pour une preuve.

Proposition 4.1. *Formule de la co-aire.*
Soient $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ mesurable et $u : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1_{\mathrm{pm}}$. Alors

$$\int_{\mathbb{R}} \left|u'(x)\right| h(x)\, \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{u^{-1}(\{t\})} h(x)\, \mathrm{d}\mathscr{H}^0(x)\right) \mathrm{d}t,$$

l'égalité ayant lieu dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$.

Nous prouvons le théorème 4.1.

Démonstration. Soit u une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ telle que u' soit bornée. Soit m une valeur médiane de u pour la mesure μ_β.

Quitte à considérer $\widetilde{u} := u - m$ dont une valeur médiane est 0 et vérifiant $\widetilde{u}' = u'$, on peut supposer qu'une valeur médiane de u pour la mesure μ_β est 0.

La formule de la co-aire (proposition 4.1) donne

$$\int_{\mathbb{R}} \left|u'(t)\right| \left(1 + \frac{t^2}{2\beta}\right) \mathrm{d}\mu_\beta(t) = \frac{1}{Z_\beta} \int_{\mathbb{R}} \left|u'(t)\right| \psi_\beta(t)\, \mathrm{d}t = \frac{1}{Z_\beta} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{u^{-1}(\{t\})} \psi_\beta(x)\, \mathrm{d}\mathscr{H}^0(x)\right) \mathrm{d}t.$$

En remarquant que le bord de l'ensemble $\{u > t\} = \{x \in \mathbb{R},\ u(x) > t\}$ (par continuité de u) est $u^{-1}(\{t\})$, on a

$$\int_{\mathbb{R}} \left|u'(t)\right| \left(1 + \frac{t^2}{2\beta}\right) \mathrm{d}\mu_\beta(t) = \frac{1}{Z_\beta} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\partial(\{u>t\})} \psi_\beta(x)\, \mathrm{d}\mathscr{H}^0(x)\right) \mathrm{d}t = \frac{1}{Z_\beta^{1/\beta}} \int_{\mathbb{R}} \mu_\beta^+(\{u > t\})\, \mathrm{d}t \tag{20}$$

où, rappelons-le (définition 1.1),

$$\mu_\beta^+(A) = \frac{1}{Z_\beta^{1-1/\beta}} \int_{\partial A} \psi_\beta(x)\, \mathrm{d}\mathscr{H}^0(x).$$

Comme u est continue sur $\mathbb{R}$, pour tout $t \in \mathbb{R}$, l'ensemble $\{u > t\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}$. Or, d'après le lemme 4.2, un ouvert de $\mathbb{R}$ est une réunion au plus dénombrable d'intervalles ouverts deux à deux disjoints. Par le théorème 1.1, on a

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \mu_\beta^+ \left(\{u > t\}\right) \geq \mathscr{I}_\beta \left(\mu_\beta \left(\{u > t\}\right)\right).$$

Par le lemme 4.3, on a

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \mu_\beta^+ \left(\{u > t\}\right) \geq \frac{2}{Z_\beta^{1-1/\beta}} \min \left\{\mu_\beta \left(\{u > t\}\right), 1 - \mu_\beta \left(\{u > t\}\right)\right\}.$$

Cette ligne utilisée dans (20) donne

$$\int_{\mathbb{R}} \left|u'(t)\right| \left(1 + \frac{t^2}{2\beta}\right) \mathrm{d}\mu_\beta(t) \geq \frac{2}{Z_\beta} \int_{\mathbb{R}} \min \left\{\mu_\beta \left(\{u > t\}\right), 1 - \mu_\beta \left(\{u > t\}\right)\right\} \mathrm{d}t,$$

soit

$$\int_{\mathbb{R}} \left|u'(t)\right| \left(1 + \frac{t^2}{2\beta}\right) \mathrm{d}\mu_\beta(t) \geq \frac{2}{Z_\beta} \int_{\mathbb{R}} \min \left\{\mu_\beta \left(\{u > t\}\right), \mu_\beta \left(\{u \leq t\}\right)\right\} \mathrm{d}t. \tag{21}$$

Or, 0 est une valeur médiane de u pour la mesure μ_β, pour tout $t < 0$, $\mu_\beta\left(\{u > t\}\right) > \frac{1}{2}$ et pour tout $t \geq 0$, $\mu_\beta\left(\{u > t\}\right) \leq \frac{1}{2}$, ainsi

$$\int_{-\infty}^{0} \min \left\{\mu_\beta \left(\{u > t\}\right), \mu_\beta \left(\{u \leq t\}\right)\right\} \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{0} \mu_\beta \left(\{u \leq t\}\right) \mathrm{d}t \tag{22}$$

et

$$\int_{0}^{+\infty} \min \left\{\mu_\beta \left(\{u > t\}\right), \mu_\beta \left(\{u \leq t\}\right)\right\} \mathrm{d}t = \int_{0}^{+\infty} \mu_\beta \left(\{u > t\}\right) \mathrm{d}t. \tag{23}$$

En utilisant les fonctions $u^+ := \max\{u, 0\}$ et $u^- := \max\{-u, 0\}$ de sorte que $u = u^+ - u^-$ et $|u| = u^+ + u^-$, on a

$$\int_{-\infty}^{0} \mu_\beta \left(\{u \leq t\}\right) \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{0} \mu_\beta \left(\left\{-u^- \leq t\right\}\right) \mathrm{d}t \tag{24}$$

et

$$\int_{0}^{+\infty} \mu_\beta \left(\{u > t\}\right) \mathrm{d}t = \int_{0}^{+\infty} \mu_\beta \left(\left\{u^+ > t\right\}\right) \mathrm{d}t. \tag{25}$$

Le changement de variable $x = -t$ dans (24) et la croissance de la mesure donnent

$$\int_{-\infty}^{0} \mu_\beta \left(\{u \leq t\}\right) \mathrm{d}t = \int_{0}^{+\infty} \mu_\beta \left(\left\{u^- \geq x\right\}\right) \mathrm{d}x \geq \int_{0}^{+\infty} \mu_\beta \left(\left\{u^- > x\right\}\right) \mathrm{d}x. \tag{26}$$

Le lemme 4.1 appliqué aux fonctions positives u^+ et u^- dans les lignes (25) et (26) donne

$$\int_{0}^{+\infty} \mu_\beta \left(\{u > t\}\right) \mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}} u^+(t) \, \mathrm{d}\mu_\beta(t) \tag{27}$$

et

$$\int_{-\infty}^{0} \mu_\beta \left(\{u \leq t\}\right) \mathrm{d}t \geq \int_{\mathbb{R}} u^-(t) \, \mathrm{d}\mu_\beta(t) \tag{28}$$

L'utilisation de (27) et (28) dans (22) et (23) donne

$$\int_{-\infty}^{0} \min \left\{\mu_\beta \left(\{u > t\}\right), \mu_\beta \left(\{u \leq t\}\right)\right\} \mathrm{d}t \geq \int_{\mathbb{R}} u^-(t) \, \mathrm{d}\mu_\beta(t)$$

et

$$\int_{-\infty}^{0} \min \left\{\mu_\beta \left(\{u > t\}\right), \mu_\beta \left(\{u \leq t\}\right)\right\} \mathrm{d}t \geq \int_{\mathbb{R}} u^+(t) \, \mathrm{d}\mu_\beta(t).$$

Comme $|u| = u^+ + u^-$, la somme de ces deux lignes utilisée dans (21) donne

$$\int_{\mathbb{R}} \left|u'(t)\right| \left(1 + \frac{t^2}{2\beta}\right) \mathrm{d}\mu_\beta(t) \geq \frac{2}{Z_\beta} \int_{\mathbb{R}} \left|u(t)\right| \mathrm{d}\mu_\beta(t).$$

$\square$

4.2 Inégalité L^2

Il est classique que les inégalités L^1 sont « plus fortes » que les inégalités L^2. Ainsi, le résultat suivant découle du théorème 4.1.

Théorème 4.2. *Inégalité L^2 à poids.*
Soit $\beta \geq 1$. Pour toute fonction $u \in L^1\left(\mu_\beta\right) \cap \mathscr{C}^1_{\mathrm{pm}}$, on a

$$\sqrt{\int_{\mathbb{R}} u'^2\left(t\right)\left(1+\frac{t^2}{2\beta}\right)^2 \mathrm{d}\mu_\beta\left(t\right)} \geq \frac{1}{Z_\beta}\sqrt{\int_{\mathbb{R}}\left(u\left(t\right)-\int_{\mathbb{R}} u\,\mathrm{d}\mu_\beta\right)^2 \mathrm{d}\mu_\beta\left(t\right)}.$$

Avant de prouver le théorème, nous utiliserons le résultat suivant :

Lemme 4.4. *Minimisateurs L^2.*
Soit $\left(X, \mathscr{X}, \mu\right)$ un espace probabilisé. Soit $f \in L^2\left(\mu\right)$.
Alors,

$$\inf_{c\in\mathbb{R}} \int_X \left(f\left(x\right)-c\right)^2 \mathrm{d}\mu\left(x\right) = \int_X\left(f\left(x\right)-\int_X f\left(x\right)\mathrm{d}\mu\left(x\right)\right)^2 \mathrm{d}\mu\left(x\right).$$

Démonstration. Soit $f \in L^2\left(\mu\right)$. Comme μ est une mesure de probabilité, d'après l'inégalité de Hölder, on a

$$\int_X |f|\,\mathrm{d}\mu = \int_X |f| \times 1 \leq \sqrt{\int_X f^2 \mathrm{d}\mu} < +\infty,$$

car $f \in L^2\left(\mu\right)$, ainsi $f \in L^1\left(\mu\right)$. Cela permet de définir sur $\mathbb{R}$ la fonction φ par : pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\varphi\left(t\right) := \int_X \left(f\left(x\right)-t\right)^2 \mathrm{d}\mu\left(x\right) = t^2 - 2t\int_X f\left(x\right)\mathrm{d}\mu\left(x\right) + \int_X f^2\left(x\right)\mathrm{d}\mu\left(x\right).$$

φ est un trinôme dont le minimum est atteint pour $t := \displaystyle\int_X f\left(x\right)\mathrm{d}\mu\left(x\right)$.

□

Démonstration. Soient $\beta \geq 1$, $u \in L^1\left(\mu_\beta\right) \cap \mathscr{C}^1_{\mathrm{pm}}$ et m une valeur médiane de u pour la mesure μ_β. Quitte à considérer $\widetilde{u} = u - m$, on peut supposer que 0 est une valeur médiane de u pour μ_β. Soit $v := u^2$. On remarque que 0 est aussi une valeur médiane de v pour μ_β. Le théorème 4.1 utilisé avec la fonction v donne

$$2\int_{\mathbb{R}} \left|u'\left(t\right)\right|\left|u\left(t\right)\right|\left(1+\frac{t^2}{2\beta}\right)\mathrm{d}\mu_\beta\left(t\right) \geq \frac{2}{Z_\beta}\int_{\mathbb{R}} u^2\left(t\right)\mathrm{d}\mu_\beta\left(t\right). \tag{29}$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz utilisée avec la mesure μ_β donne

$$\int_{\mathbb{R}} \left|u'\left(t\right)\right|\left|u\left(t\right)\right|\left(1+\frac{t^2}{2\beta}\right)\mathrm{d}\mu_\beta\left(t\right) \leq \sqrt{\int_{\mathbb{R}} u'^2\left(t\right)\left(1+\frac{t^2}{2\beta}\right)^2 \mathrm{d}\mu_\beta\left(t\right)}\sqrt{\int_{\mathbb{R}} u^2\left(t\right)\mathrm{d}\mu_\beta\left(t\right)}.$$

Cette dernière ligne utilisée avec (29) permet d'écrire (en supposant $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} u^2\left(t\right)\mathrm{d}\mu_\beta\left(t\right) \neq 0$)

$$\frac{1}{Z_\beta}\sqrt{\int_{\mathbb{R}} u^2\left(t\right)\mathrm{d}\mu_\beta\left(t\right)} \leq \sqrt{\int_{\mathbb{R}} u'^2\left(t\right)\left(1+\frac{t^2}{2\beta}\right)^2 \mathrm{d}\mu_\beta\left(t\right)}.$$

En utilisant le lemme 4.4, on en déduit l'inégalité souhaitée.

□

Références

[1] S. G. Bobkov et M. Ledoux, *Weighted Poincaré-type inequalities for Cauchy measures and other convex measures.* The Annals of Probability, Vol. 37, No. 2, pp 403-427, 2009.

[2] C. Borell, *The Brunn-Minkowski inequality in Gauss space.* Invent. Math. 30, pp. 207-216, 1975.

[3] H. Federer, *Geometric Measure Theory.* Springer-Verlag Berlin and Heidelberg GmbH & Co. K., 1969.

[4] G. Pólya et G. Szegö, *Problems and Theorems in Analysis, vol. I.* Springer, 1998.

[5] V. Schechtman, *Introduction aux fonctions spéciales*, `https://www.math.univ-toulouse.fr/~schechtman/cours-M2-06.pdf`.

[6] V. N. Sudakov et B. S. Tsirel'son, *Extremal properties of half-spaces for spherically invariant measures*, J. Soviet Math. 9, pp. 9-18, 1978.

[7] E. Thomas, *Sur l'inégalité isopérimétrique gaussienne*, soumis à la RMS.