Quadrature n° () 1-5

Comment permuter les décimales d'un réel ?

par Erik THOMAS*

Résumé.

Dans cet article, nous étudions la régularité des fonctions qui « permutent » les décimales d'un réel compris entre 0 et 1. Nous donnerons aussi une condition nécessaire et suffisante pour qu'une telle application soit continue.

I Introduction

I.1 Notations utilisées

Les notations utilisées sont les notations usuelles. Notons quand même :

1. si f est une fonction bornée sur un intervalle I, on note $\|f\|_\infty^I = \sup_{x\in I}|f(x)|$;
2. la partie entière d'un réel x est notée $\lfloor x \rfloor$.

I.2 But de l'article

Dans cet article, nous étudions la classe des fonctions qui « permutent » les décimales d'un réel compris entre 0 et 1.

Plus précisément, si $x \in [0,1[$ dont le développement décimal illimité propre (voir la proposition 7) est $x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n(x)}{10^n}$ (avec $(a_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite d'éléments de $[\![0,9]\!]$ qui ne stationne pas à 9) et si $\sigma : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ une application, nous étudierons l'application $f_\sigma : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_{\sigma(n)}(x)}{10^n}$.

Nous montrerons que de telles fonctions sont réglées sur $[0,1[$ (voir la définition 1 et la proposition 10). Des rappels sont faits sur les fonctions réglées à la partie II.

Nous donnerons au paragraphe IV.2 une condition nécessaire et suffisante sur les applications injectives σ pour que la fonction f_σ soit continue sur $[0,1[$.

Finalement, au paragraphe IV.3, nous étudierons la convergence uniforme dans l'ensemble des fonctions qui « permutent » les décimales.

II Fonctions réglées et intégrale d'une fonction réglée

Dans cette partie, nous faisons un rappel sur les fonctions réglées. Pour un exposé plus détaillé, nous renvoyons à [1] et [3].

II.1 Définition et premières propriétés

Définition 1. *Fonction réglée.*

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $f : I \to \mathbb{R}$. On dit que f est réglée sur I si f est limite uniforme d'une suite de fonctions en escalier sur I.

Il est classique que les fonctions continues sur un intervalle I sont réglées sur I.

La proposition suivante permet de caractériser les fonctions réglées sur un segment.

Théorème 2. *Caractérisation des fonctions réglées.*

Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction.

f est réglée sur $[a,b]$ si, et seulement si, f admet une limite à gauche en tout point de $]a,b]$ et admet une limite à droite en tout point de $[a,b[$.

On en déduit le :

* erik.thomas@ens-rennes.fr

Corollaire 3. *Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Toute fonction monotone est réglée sur $[a,b]$.*

II.2 Intégrale d'une fonction réglée sur un segment

Définition 4. *Intégrale d'une fonction en escalier.*

Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Soit f une fonction en escalier sur $[a,b]$: il existe une subdivision $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n < t_{n+1} = b$ telle que f soit constante sur chaque intervalle $]t_i, t_{i+1}[$: on note ζ_i cette constante. On définit l'intégrale de f sur $[a,b]$ par :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{i=0}^{n} \zeta_i (t_{i+1} - t_i)\,.$$

Il est facile de vérifier que l'intégrale ne dépend pas de la subdivision choisie.

Le lemme suivant est nécessaire pour définir l'intégrale d'une fonctions réglée.

Lemme 5. *Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction réglée. Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de fonctions en escalier qui convergent uniformément vers f.*

Alors, les suites $\left(\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(\int_a^b g_n(x)\,\mathrm{d}x\right)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite.

Définition 6. *Intégrale d'une fonction réglée.*

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction réglée. D'après le lemme 5, la limite d'une suite de fonctions en escalier qui converge uniformément vers f sur $[a,b]$ est indépendante du choix de la suite de fonctions. On définit $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ comme la limite de la suite $\left(\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x\right)_{n\in\mathbb{N}}$ où $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions en escalier qui converge uniformément vers f.

III Développement décimal illimité propre et quelques propriétés

Dans cette partie, nous renvoyons les preuves à la page de Jean-Etienne Rombaldi [4].

On rappelle le résultat suivant.

Proposition 7. *Existence et unicité d'un développement décimal illimité propre.*

Soit $x \in \mathbb{R}$. Il existe $a_0(x) \in \mathbb{Z}$ unique et une unique suite $(a_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*} \in [\![0,9]\!]^{\mathbb{N}^*}$ qui ne stationne pas sur 9 telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k(x)}{10^k} \leq x < \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k(x)}{10^k} + \frac{1}{10^n}.$$

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définit ainsi une suite de fonctions. La proposition suivante donne des informations sur les fonctions a_n utiles pour la suite.

Proposition 8. *Propriétés des fonctions a_n.*

Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction a_n est 10^{-n+1}-périodique et

$$\forall k \in [\![0,9]\!],\ \forall x \in \left[\frac{k}{10^n}, \frac{k+1}{10^n}\right[, \qquad a_n(x) = k.$$

IV Étude d'une classe de fonctions

Dans cette partie, nous introduisons et étudions les fonctions qui « mélangent » les décimales d'un réel.

IV.1 Définition

Définition 9. *Soit $\sigma : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ une application. On définit sur $[0,1[$, l'application f_σ par :*

$$\forall x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n(x)}{10^n} \in [0,1[, \qquad f_\sigma(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_{\sigma(n)}(x)}{10^n}.$$

On note $\mathscr{E}$ l'ensemble des fonctions de cette forme.

Proposition 10. *Pour tout $f \in \mathscr{E}$, f est réglée.*

Démonstration. Soit $f \in \mathscr{E}$.

Il suffit de remarquer que la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{10^n}$ est constituée de fonctions réglées et que la série de fonctions converge normalement vers f sur $[0,1[$ car pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\|a_n\|_\infty^{[0,1[} = 9$.

□

Proposition 11. *Les notations sont les mêmes que celles utilisées ci-dessus. On a :*

1. *pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\int_0^1 a_n(x)\,\mathrm{d}x = \frac{9}{2}$;*
2. *pour toute application $\sigma : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$, on a $\int_0^1 f_\sigma(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$.*

Démonstration. Les arguments importants de la preuve sont la périodicité des a_n et la convergence uniforme de la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{10^n}$ vers f_σ sur $[0,1[$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, comme a_n est 10^{-n+1}-périodique, on a :

$$\int_0^1 a_n(x)\,\mathrm{d}x = 10^{n-1} \int_0^{10^{-n+1}} a_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

Or

$$\int_0^{10^{-n+1}} a_n(x)\,\mathrm{d}x = 10^{-n} \times (1+2+\cdots+9) = 45 \times 10^{-n}.$$

Il s'ensuit que

$$\int_0^1 a_n(x)\,\mathrm{d}x = \frac{9}{2}.$$

2. Comme la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{10^n}$ converge normalement (donc uniformément) vers f_σ sur $[0,1[$, on a :

$$\begin{aligned} \int_0^1 f_\sigma(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n(x)}{10^n}\right)\mathrm{d}x \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{10^n}\int_0^1 a_n(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

□

IV.2 Une caractérisation de la continuité

Dans ce paragraphe, nous allons montrer le résultat suivant :

Proposition 12. *Caractérisation de σ pour que f_σ soit continue sur $[0,1[$.*

Soit $\sigma : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ injective. Alors, f_σ est continue sur $[0,1[$ si, et seulement si, $\sigma = \mathrm{id}_{\mathbb{N}^*}$.

Avant de prouver cette proposition, nous aurons besoin des lemmes suivants :

Lemme 13. *Soit $\sigma : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ une application injective telle que f_σ soit continue.*

Alors, σ est strictement croissante.

Nous prouvons le lemme 13.

Démonstration. Nous allons montrer par récurrence que la suite σ est strictement croissante.

Montrons que $\sigma(1) < \sigma(2)$.

Par l'absurde, si $\sigma(1) \geq \sigma(2)$, par injectivité, on a $\sigma(1) > \sigma(2)$ et $10^{-\sigma(1)} < 10^{-\sigma(2)}$.

Comme pour tout $x \in \left]10^{-\sigma(2)}, 10^{-\sigma(2)} + 10^{-\sigma(1)}\right[$, $a_{\sigma(1)}(x) = 0$ (par $10^{-\sigma(1)+1}$-périodicité de a_1 et la proposition 8), $a_{\sigma(2)}(x) = 1$ et pour tout $n \geq 3$, $a_{\sigma(n)}(x) \leq 9$, il s'ensuit que

$$\lim_{x\to\left(10^{-\sigma(2)}\right)^+} f_\sigma(x) \leq 0{,}0199\ldots = 0{,}02.$$

De manière analogue, comme pour tout $x \in \left]10^{-\sigma(2)} - 10^{-\sigma(1)}, 10^{-\sigma(2)}\right[$, $a_{\sigma(1)}(x) = 9$ et pour tout $n \geq 2$, $a_{\sigma(n)}(x) \geq 0$, on a

$$\lim_{x\to\left(10^{-\sigma(2)}\right)^-} f_\sigma(x) \geq 0{,}900\ldots = 0{,}9.$$

Ainsi f_σ ne peut être continue en $10^{-\sigma(2)}$ et cela donne une contradiction. Ceci prouve que $\sigma(1) < \sigma(2)$.

Soit $i \in \mathbb{N}^*$. On suppose $\sigma(1) < \cdots < \sigma(i)$. Montrons que $\sigma(i+1) > \sigma(i)$. Comme ci-dessus, on suppose $\sigma(i+1) \leq \sigma(i)$, soit par injectivité, $\sigma(i+1) < \sigma(i)$.

Soit k le plus grand entier compris entre 1 et i tel que $\sigma(i+1) < \sigma(k)$ de sorte que

$$10^{-\sigma(i)} < 10^{-\sigma(i-1)} < \cdots < 10^{-\sigma(k)} < 10^{-\sigma(i+1)}.$$

Le raisonnement est similaire à celui utilisé ci-dessus : nous allons nous intéresser à la limite de f_σ en $10^{-\sigma(i+1)}$.

On rappelle que pour tout $x \in [0,1[$,

$$f_\sigma(x) = 0{,}a_{\sigma(1)}(x)\,a_{\sigma(2)}(x)\ldots a_{\sigma(i)}(x)\,a_{\sigma(i+1)}(x)\ldots.$$

Pour tout $x \in \left]10^{-\sigma(i+1)}, 10^{-\sigma(i+1)} + 10^{-\sigma(i)}\right[$ et pour tout $j \in [\![1,i]\!]$, on a $a_{\sigma(j)}(x) = 0$, $a_{\sigma(i+1)}(x) = 1$ et pour tout $n \geq i+2$, $a_{\sigma(n)} \leq 9$. On récupère :

$$\lim_{x\to\left(10^{-\sigma(i+1)}\right)^+} \leq 0{,}\underbrace{0\ldots0}_{i \text{ zéros}}199\ldots = 0{,}\underbrace{0\ldots0}_{i \text{ zéros}}2.$$

Similairement, $\lim_{x\to\left(10^{-\sigma(i+1)}\right)^-} \geq 0{,}\underbrace{0\ldots0}_{k-1 \text{ zéros}}9$ car pour tout $x \in \left]10^{-\sigma(i+1)} - 10^{-\sigma(i)}, 10^{-\sigma(i+1)}\right[$, pour tout $j \in [\![1,k-1]\!]$, $a_{\sigma(j)}(x) = 0$, $a_{\sigma(k)}(x) = 9$ et pour tout $n \geq k+1$, $a_{\sigma(n)}(x) \geq 0$.

Comme $k \leq i$, on a $k-1 \leq i$, puis

$$0{,}\underbrace{0\ldots0}_{i \text{ zéros}}2 < 0{,}\underbrace{0\ldots0}_{k-1 \text{ zéros}}9.$$

Les limites de f_σ à gauche et à droite ne sont pas égales, cela contredit la continuité de f_σ sur $[0,1[$. On en déduit que $\sigma(i+1) > \sigma(i)$.

Ainsi, σ est donc strictement croissante.

□

Le lemme suivant permet de raffiner le lemme 13.

Lemme 14. *Soit $\sigma : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ une application injective telle que f_σ soit continue sur $[0,1[$.*

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sigma(n+1) = \sigma(n) + 1$.

Nous prouvons le lemme 14.

Démonstration. On raisonne par l'absurde et on suppose qu'il existe $i \in \mathbb{N}^*$ tel que $\sigma(i+1) \neq \sigma(i) + 1$. Comme σ est injective, par le lemme 13, σ est strictement croissante de σ, ainsi $\sigma(i+1) > \sigma(i) + 1$.

Nous allons étudier la limite de f_σ à gauche et à droite de $10^{-\sigma(i)} + 10 \times 10^{-\sigma(i+1)}$.

Pour alléger les notations, on pose $y_i = 10^{-\sigma(i)} + 10 \times 10^{-\sigma(i+1)}$.

Comme $\sigma(i+1) > \sigma(i) + 1$, on en déduit que $-\sigma(i+1) + 1 < -\sigma(i)$, on en déduit $10 \times 10^{-\sigma(i+1)} < 10^{-\sigma(i)}$, puis

$$10^{-\sigma(i)} < y_i < 2 \times 10^{-\sigma(i)}. \tag{1}$$

En remarquant que l'inégalité $\sigma(i+1) > \sigma(i) + 1$ est équivalente à $\sigma(i+1) \geq \sigma(i) + 2$, on en déduit

$10^2 \times 10^{-\sigma(i+1)} \leq 10^{-\sigma(i)}$. Comme $y_i + 10^{-\sigma(i+1)} = 10^{-\sigma(i)} + 11 \times 10^{-\sigma(i)}$, on a

$$y_i + 10^{-\sigma(i+1)} < 10^{-\sigma(i)} + 100 \times 10^{-\sigma(i+1)} \leq 2 \times 10^{-\sigma(i)} \tag{2}$$

De plus, il est clair que

$$10^{-\sigma(i)} \leq y_i - 10^{-\sigma(i+1)}. \tag{3}$$

En utilisant (1), (2), (3) et le fait que $a_{\sigma(i+1)}$ est $10^{-\sigma(i+1)+1}$-périodique, pour tout $x \in \left]y_i, y_i + 10^{-\sigma(i+1)}\right[$, pour tout $j \in [\![1, i-1]\!]$, on a $a_{\sigma(j)}(x) = 0$, $a_{\sigma(i)} = 1$, $a_{\sigma(i+1)} = 1$ et pour tout $n \geq i+2$, $a_{\sigma(n)}(x) \leq 9$. On en déduit

$$\lim_{x \to (y_i)^+} f_\sigma(x) \leq 0, \underbrace{0 \ldots 0}_{i-1 \text{ zéros}} 1199 \ldots = 0, \underbrace{0 \ldots 0}_{i-1 \text{ zéros}} 12.$$

En utilisant à nouveau (1), (2), (3) et le fait que $a_{\sigma(i+1)}$ est $10^{-\sigma(i+1)}$-périodique, pour tout $x \in \left]y_i - 10^{-\sigma(i+1)}, y_i\right[$ et pour tout $j \in [\![1, i-1]\!]$, $a_{\sigma(j)}(x) = 0$, $a_{\sigma(i)} = 1$, $a_{\sigma(i+1)} = 9$ et pour tout $n \geq i+2$, $a_{\sigma(n)}(x) \geq 0$, on en déduit

$$\lim_{x \to (y_i)^-} f_\sigma(x) \geq 0, \underbrace{0 \ldots 0}_{i-1 \text{ zéros}} 19.$$

Comme les limites à gauche et à droite sont différentes, on en déduit que l'hypothèse faite n'est pas vraie, ainsi $\sigma(i+1) = \sigma(i) + 1$.

$\square$

Lemme 15. *Soit $\sigma : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ une application telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sigma(n+1) = \sigma(n) + 1$ telle que f_σ soit continue sur $[0, 1[$.*

Alors, $\sigma(1) = 1$ et donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sigma(n) = n$.

Nous prouvons le lemme 15.

Démonstration. Déjà, par hypothèse sur σ,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \; \sigma(n) = n + \sigma(1) - 1,$$

ainsi,

$$\forall x \in [0, 1[, \quad f_\sigma(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_{\sigma(n)}(x)}{10^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_{\sigma(1)+n-1}(x)}{10^n}.$$

Si l'on suppose $\sigma(1) \geq 2$, le changement d'indice $m = n + \sigma(1) - 1$ donne : pour tout $x \in [0, 1[$,

$$\begin{aligned} f_\sigma(x) &= 10^{\sigma(1)-1} \left(\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{a_m(x)}{10^m} - \sum_{m=1}^{\sigma(1)-1} \frac{a_m(x)}{10^m} \right) \\ &= 10^{\sigma(1)-1} \left(x - \sum_{m=1}^{\sigma(1)-1} \frac{a_m(x)}{10^m} \right). \end{aligned}$$

Comme la fonction $x \mapsto \sum_{m=1}^{\sigma(1)-1} \frac{a_m(x)}{10^m}$ n'est pas continue sur $[0, 1[$, on en déduit que la fonction f_σ n'est pas continue ce qui contredit notre hypothèse de départ.

$\square$

Nous pouvons prouver la proposition 12.

Démonstration. On procède par double implication.

$\Leftarrow$ Si $\sigma = \mathrm{id}_{\mathbb{N}^*}$, alors $f_\sigma = \mathrm{id}_{[0,1[}$, donc f_σ est continue.

$\Rightarrow$ En utilisant successivement les lemmes 13, 14 et 15, on a $\sigma = \mathrm{id}_{\mathbb{N}^*}$.

$\square$

On peut préciser le résultat établi précédemment.

Proposition 16. *Soit $f_\sigma \in \mathscr{E}$. f_σ a un nombre fini de points de discontinuité si, et seulement s'il existe $m \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \geq m$, $\sigma(n+1) = \sigma(n) + 1$.*

Démonstration. Nous prouvons les deux implications.

$\Leftarrow$ Soit $m \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \geq m$, $\sigma(n+1) = \sigma(n) + 1$. On en déduit que pour tout $n \geq m$, $\sigma(n) = n + \sigma(m) - m$. Ainsi, pour tout $x \in [0, 1[$,

$$\begin{aligned} f_\sigma(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_{\sigma(n)}(x)}{10^n} \\ &= \sum_{n=1}^{m-1} \frac{a_{\sigma(n)}(x)}{10^n} + \sum_{n=m}^{+\infty} \frac{a_{n+\sigma(m)-m}(x)}{10^n}. \end{aligned}$$

Il s'ensuit que, pour tout $x \in [0, 1[$,

$$\begin{aligned} f_\sigma(x) &= \sum_{n=1}^{m-1} \frac{a_{\sigma(n)}(x)}{10^n} + 10^{\sigma(m)-m} \sum_{n=m}^{+\infty} \frac{a_{n+\sigma(m)-m}(x)}{10^{n+\sigma(m)-m}} \\ &= \sum_{n=1}^{m-1} \frac{a_{\sigma(n)}(x)}{10^n} + 10^{\sigma(m)-m} \sum_{n=\sigma(m)}^{+\infty} \frac{a_n(x)}{10^n} \\ &= \sum_{n=1}^{m-1} \frac{a_{\sigma(n)}(x)}{10^n} - 10^{\sigma(m)-m} \sum_{n=1}^{\sigma(m)-1} \frac{a_n(x)}{10^n} \\ &+ 10^{\sigma(m)-m} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n(x)}{10^n} \\ &= \sum_{n=1}^{m-1} \frac{a_{\sigma(n)}(x)}{10^n} - 10^{\sigma(m)-m} \sum_{n=1}^{\sigma(m)-1} \frac{a_n(x)}{10^n} \\ &+ 10^{\sigma(m)-m} x. \end{aligned}$$

Comme la fonction $x \mapsto \sum_{n=1}^{m-1} \frac{a_{\sigma(n)}(x)}{10^n} - 10^{\sigma(m)-m} \sum_{n=1}^{\sigma(m)-1} \frac{a_n(x)}{10^n}$ admet un nombre fini de points de discontinuité sur $[0, 1[$, la fonction f_σ admet donc un nombre fini de points de discontinuité sur $[0, 1[$.

$\Rightarrow$ On note $\left\{ \frac{x_1}{10^{n_1}}, \ldots, \frac{x_r}{10^{n_r}} \right\}$ l'ensemble des points de discontinuité de f_σ avec $r \in \mathbb{N}$, $x_i \in [\![0, 10^{n_i} - 1]\!]$. On suppose, sans perte de généralité que x_i est premier avec 10^{n_i}.

Soit $m = \max\{n_1, \ldots, n_r\}$.

En adaptant la preuve de la proposition 14, on montre que pour tout $n \geq m+1$, $\sigma(n+1) = \sigma(n) + 1$.

$\square$

IV.3 Caractérisation de la convergence uniforme

Définition 17. *Une distance sur les suites.*

On note $\mathscr{A}(\mathbb{N}^*,\mathbb{N}^*)$ l'ensemble des applications de $\mathbb{N}^*$ vers $\mathbb{N}^*$.

On définit sur $\mathscr{A}(\mathbb{N}^*,\mathbb{N}^*)^2$ l'application $\widetilde{\mathrm{d}}$ suivante : pour tout $(\sigma,\sigma')\in\mathscr{A}(\mathbb{N}^*,\mathbb{N}^*)^2$,

$$\widetilde{\mathrm{d}}(\sigma,\sigma')=\begin{cases}+\infty & \text{si } \sigma=\sigma' \\ \inf\{n\in\mathbb{N}^* \mid , \sigma(n)\neq\sigma'(n)\} & \text{si } \sigma\neq\sigma'\end{cases}.$$

On notera que si $\sigma\neq\sigma'$, alors pour tout $k\in[\![1,\widetilde{\mathrm{d}}(\sigma,\sigma')-1]\!]$ (avec la convention que $[\![1,0]\!]=\emptyset$), $\sigma(k)=\sigma'(k)$.

Soit enfin l'application d définie sur $\mathscr{A}(\mathbb{N}^*,\mathbb{N}^*)^2$ par

$$\forall(\sigma,\sigma')\in\mathscr{A}(\mathbb{N}^*,\mathbb{N}^*)^2,\quad \mathrm{d}(\sigma,\sigma')=10^{-\widetilde{\mathrm{d}}(\sigma,\sigma')}$$

avec la convention $10^{-\infty}=0$.

Proposition 18. *Pour tout $(\sigma,\sigma')\in\mathscr{A}(\mathbb{N}^*,\mathbb{N}^*)^2$, on a :*

$$\frac{8}{10}\mathrm{d}(\sigma,\sigma')\leq\|f_\sigma-f_{\sigma'}\|_\infty^{[0,1[}\leq\mathrm{d}(\sigma,\sigma').\quad(4)$$

Démonstration. Soit $(\sigma,\sigma')\in\mathscr{A}(\mathbb{N}^*,\mathbb{N}^*)^2$.

- Le cas où $\sigma=\sigma'$ est évident.
- On suppose $\sigma\neq\sigma'$.
  Pour alléger les notations, on pose $\widetilde{\mathrm{d}}=\widetilde{\mathrm{d}}(\sigma,\sigma')$ et $\mathrm{d}=\mathrm{d}(\sigma,\sigma')$. Pour tout $x\in[0,1[$,

$$|f_\sigma(x)-f_{\sigma'}(x)|=\left|\sum_{k=\widetilde{\mathrm{d}}+1}^{+\infty}\frac{a_{\sigma(k)}(x)-a_{\sigma'(k)}(x)}{10^k}\right|.$$

Ainsi, il est clair que pour tout $x\in[0,1[$,

$$\begin{aligned}|f_\sigma(x)-f_{\sigma'}(x)| &\leq \sum_{k=\widetilde{\mathrm{d}}+1}^{+\infty}\frac{|a_{\sigma(k)}(x)-a_{\sigma'(k)}(x)|}{10^k}\\ &\leq \sum_{k=\widetilde{\mathrm{d}}+1}^{+\infty}\frac{9}{10^k}\\ &= 10^{-\widetilde{\mathrm{d}}}.\end{aligned}$$

Nous avons établi que

$$\|f_\sigma-f_{\sigma'}\|_\infty^{[0,1[}\leq\mathrm{d}.$$

Pour établir la première inégalité, on peut supposer que $\sigma\left(\widetilde{\mathrm{d}}+1\right)>\sigma'\left(\widetilde{\mathrm{d}}+1\right)$. Ainsi, pour tout $x\in[0,1[$, on a :

$$\begin{aligned}f_\sigma(x)-f_{\sigma'}(x) &= \frac{a_{\sigma\left(\widetilde{\mathrm{d}}+1\right)}(x)-a_{\sigma'\left(\widetilde{\mathrm{d}}+1\right)}(x)}{10^{\widetilde{\mathrm{d}}+1}}\\ &+\sum_{k=\widetilde{\mathrm{d}}+2}^{+\infty}\frac{a_{\sigma(k)}(x)-a_{\sigma'(k)}(x)}{10^k}.\end{aligned}$$

Or pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, $a_{\sigma(k)}(x)-a_{\sigma'(k)}(x)\geq-9$, ainsi, pour tout $x\in[0,1[$,

$$f_\sigma(x)-f_{\sigma'}(x)\geq\frac{a_{\sigma(d+1)}(x)-a_{\sigma'\left(\widetilde{\mathrm{d}}+1\right)}(x)}{10^{\widetilde{\mathrm{d}}+1}}-\frac{1}{10^{\widetilde{\mathrm{d}}+1}}\quad(5)$$

car $\displaystyle\sum_{k=\widetilde{\mathrm{d}}+2}^{+\infty}\frac{-9}{10^k}=-\frac{1}{10^{\widetilde{\mathrm{d}}+1}}$.

Pour $x=\frac{9}{10^{\sigma\left(\widetilde{\mathrm{d}}+1\right)}}$ dans (5), on obtient

$$\|f_\sigma-f_{\sigma'}\|_\infty^{[0,1[}\geq f_\sigma(x)-f_{\sigma'}(x)\geq\frac{9}{10^{\widetilde{\mathrm{d}}+1}}-\frac{1}{10^{\widetilde{\mathrm{d}}+1}}=\frac{8}{10}\mathrm{d}.$$

□

La proposition suivante découle immédiatement de la précédente.

Proposition 19. *Description de la convergence uniforme dans $\mathscr{E}$.*

Soit $f_\sigma\in\mathscr{E}$ avec $\sigma:\mathbb{N}^*\to\mathbb{N}^*$ une application et soit $(f_{\sigma_n})_{n\in\mathbb{N}}\in\mathscr{E}^{\mathbb{N}}$ où $\sigma_n:\mathbb{N}^*\to\mathbb{N}^*$ est une application.

$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[0,1[$ si, et seulement si, $\lim_{n\to+\infty}\mathrm{d}(\sigma,\sigma_n)=0$.

Références

[1] X. Gourdon, *Analyse*. Ellipses, 2ème édition, 2008.

[2] M. G. Goluzina, A. A. Lodkin, B. M. Makarov, A. N. Podkorytov. *Problèmes d'analyse réelle*. Cassini, 2011.

[3] J-P. Ramis, A. Warusfel. *Mathématiques Tout-en-un pour la Licence 2 : Cours complet, exemples et exercices corrigés*. Dunod, 2014.

[4] J-E. Rombaldi. *https ://www-fourier.ujf-grenoble.fr/ rombaldi/AgregInterne/Oral1/Plans108.pdf*.