Une caractérisation des lois exponentielles

Erik Thomas*

Résumé

Dans cette courte note, nous donnons une preuve par transport optimal d'une caractérisation des lois exponentielles déjà donnée dans [1].

Mots clés : Transport optimal, loi exponentielle

1 Introduction

Soit X une variable aléatoire réelle définie sur un univers probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$. Soit $\lambda > 0$. On dit que X suit la loi exponentielle de paramètre λ, et on note $X \hookrightarrow \mathscr{E}(\lambda)$, si $X(\Omega) \subset \mathbb{R}_+$ et si elle admet une densité donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f(x) = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}.$$

Il est alors facile de constater que X admet une espérance et une variance données par :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda} \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Il est connu que les lois exponentielles sont caractérisées par l'absence de mémoire. Plus précisément, on a

Proposition 1.1. *Caractérisation par l'absence de mémoire.*

Soit X une variable aléatoire réelle définie sur un univers probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ avec $X(\Omega) \subset \mathbb{R}_+$. On suppose que (absence de mémoire)

$$\forall (t,s) \in (\mathbb{R}_+)^2, \quad \mathbb{P}_{X>t}(X > s+t) = \mathbb{P}(X > s).$$

Alors, X est une loi exponentielle.

Dans cette note, nous donnons une preuve d'un résultat de Diaconis, Holmes, Reinert et Stein dans [1] qui permet de donner une caractérisation moins connue des lois exponentielles.

Théorème 1.1. *Caractérisation des lois exponentielles.*

Soit $\lambda > 0$.

Soit une fonction $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ de classe $\mathscr{C}^0$ sur $\mathbb{R}$ telle que $\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$ et

$$\forall g \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}_+), \quad \int_{\mathbb{R}_+} g'(x) f(x)\,\mathrm{d}x = -\lambda g(0) + \lambda \int_{\mathbb{R}_+} g(x) f(x)\,\mathrm{d}x, \tag{1}$$

alors f est la densité d'une loi exponentielle de paramètre λ, i.e.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}.$$

La preuve de ce résultat est basée sur le transport optimal dans $\mathbb{R}$.

*erik.thomas@ens-rennes.fr

2 Preuve du résultat principal

2.1 Transport optimal

Nous utiliserons le résultat ci-dessous. Le lecteur peut facilement le prouver en adaptant la preuve de la proposition 2.1 de [2].

Le lecteur trouvera un exposé complet du transport optimal dans [3].

Proposition 2.1. *Transport optimal pour les mesures supportées sur* $\mathbb{R}_+$.

Soient μ *et* ν *deux mesures boréliennes à densité supportées sur* $\mathbb{R}_+$ *dont on note* f *et* g *les densités. On suppose* f *et* g *continues et à valeurs strictement positives.*

Alors, il existe $T : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ *une bijection strictement croissante de classe* $\mathscr{C}^1$ *telle que*

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \int_0^{T(x)} g(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

De plus, on a la relation suivante dite équation de Monge-Ampère

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad T'(x)\, g(T(x)) = f(x)\,. \tag{2}$$

2.2 Preuve du théorème 1.1

Nous prouvons le théorème 1.1.

Démonstration. Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ continue telle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 1$ et vérifiant (1).

Soient les mesures μ et ν supportées sur $\mathbb{R}_+$ et définies par

$$\mathrm{d}\mu(x) = f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad \mathrm{d}\nu(x) = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\mathrm{d}x.$$

Soit T l'application donnée par la proposition 2.1. L'équation de Monge-Ampère est ici :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f(x) = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda T(x)} T'(x)\,.$$

Soit

$$I := \int_0^{+\infty} \left(T'(x) - 1\right)^2 f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{3}$$

En utilisant la ligne (1), on a

$$\int_0^{+\infty} T'(x) f(x)\,\mathrm{d}x = -\lambda T(0) + \lambda \int_0^{+\infty} T(x) f(x)\,\mathrm{d}x = \lambda \int_0^{+\infty} T(x) f(x)\,\mathrm{d}x$$

car $T(0) = 0$. En remarquant qu'une primitive de f est $x \longmapsto -\mathrm{e}^{-\lambda T(x)}$, une intégration par parties donne

$$\begin{aligned}
\lambda \int_0^{+\infty} T(x) f(x)\,\mathrm{d}x &= \lambda \left[-\mathrm{e}^{-\lambda T(x)} T(x)\right]_0^{+\infty} + \lambda \int_0^{+\infty} T'(x)\,\mathrm{e}^{-\lambda T(x)}\mathrm{d}x \\
&= 0 + \int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \\
&= 1
\end{aligned}$$

car $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} T(x)\,\mathrm{e}^{-\lambda T(x)} = 0$ grâce au fait que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} T(x) = 0$. On en déduit donc

$$\int_0^{+\infty} T'(x) f(x)\,\mathrm{d}x = 1. \tag{4}$$

Comme $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$, on obtient

$$I = -1 + \int_0^{+\infty} T'(x)^2 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

L'inégalité de Jensen utilisée avec la mesure de probabilité μ et la ligne (4) donnent

$$\int_0^{+\infty} T'(x)^2 f(x)\,\mathrm{d}x \leq \left(\int_0^{+\infty} T'(x) f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 \leq 1.$$

On en déduit que $I = 0$, ainsi

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad T'(x) = 1.$$

Il s'ensuit que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $T(x) = x + c$ où $c \in \mathbb{R}$. Or, $T(0) = 0$, on récupère donc $c = 0$: f est la densité de la loi exponentielle de paramètre λ.

$\square$

Références

[1] P. Diaconis, S. Holmes, G. Reinert, S. Stein, *Use of exchangeable pairs in the analysis of simulations in Stein's method : expository lectures and applications.* 69-77, IMS Lecture Notes Monogr. Ser., Volume 46, 2004.

[2] E. Thomas, *Sur une caractérisation des lois normales : une approche par transport optimal d'un théorème de Stein.* `https://erikthomasmaths.com`

[3] C. Villani, *Topics in mass transportation.* Graduate Studies in Mathematics, Vol. 58, Amer. Math. Soc., Providence.