Sur l'inégalité isopérimétrique gaussienne

par Érik Thomas

Lycée Olympe de Gouges, Noisy-le-Sec

Résumé

Le but de cet article est de donner une preuve élémentaire de l'inégalité isopérimétrique pour la mesure gaussienne γ_1 dans $\mathbb{R}$ pour une certaine classe d'ensembles. Ensuite, nous montrons comment une telle inégalité permet de retrouver une inégalité de type Cheeger pour la mesure gaussienne (inégalité de Pisier).

1 Introduction

1.1 Notations

Avant de replacer le sujet dans un contexte plus historique, nous introduisons les indispensables notations pour la suite. Dans tout cet article, φ est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \varphi(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-x^2/2},$$

c'est la densité d'une variable aléatoire qui suit une loi normale centrée réduite. Φ désigne la fonction de répartition associée :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \Phi(x) := \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)\, \mathrm{d}t.$$

On rappelle que Φ est une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $]0, 1[$.

On notera par γ_1 la mesure de probabilité gaussienne sur $\mathbb{R}$ dont la densité est φ, ainsi pour tout borélien $A \subset \mathbb{R}$, on a

$$\gamma_1(A) = \int_A \varphi(t)\, \mathrm{d}t.$$

On définit la mesure de bord gaussienne γ_1^+ par la

Définition 1.1. *Mesure de bord gaussienne.*

On définit la mesure borélienne de bord gaussienne γ_1^+ par : pour tout borélien $A \subset \mathbb{R}$,

$$\gamma_1^+(A) := \int_{\partial A} \varphi(t)\, \mathrm{d}\mathscr{H}^0(t),$$

où ∂A est le bord topologique de A défini par $\partial A := \operatorname{adh}(A) \setminus \operatorname{int}(A)$ (l'adhérence privé de l'intérieur) et $\mathscr{H}^0$ est la mesure de Hausdorff 0-dimensionnelle.

Cette définition mérite quelques commentaires. La définition exacte des mesures de Hausdorff est inutile ici car on peut montrer (voir [4]) que la mesure $\mathscr{H}^0$ est la mesure de comptage sur $\mathbb{R}$, i.e.

$$\forall A \subset \mathbb{R} \quad \mathscr{H}^0(A) = \begin{cases} \operatorname{card}(A) & \text{si } A \text{ est fini} \\ +\infty & \text{si } A \text{ n'est pas fini} \end{cases}.$$

Ainsi, si A est un intervalle, disons $A = (a, b)$ avec $a = -\infty$ et/ou $b = +\infty$ possibles (la notation (a, b) signifie que les bornes sont ouvertes ou fermées), alors

$$\gamma_1^+(A) = \varphi(a) + \varphi(b)$$

avec la convention que $\varphi(-\infty) = \varphi(+\infty) = 0$.

Plus généralement, si $A = \bigcup_{i=1}^{n} [a_i, b_i]$ est une union finie d'intervalles fermés deux à deux disjoints, alors

$$\gamma_1^+(A) = \sum_{i=1}^{n} (\varphi(a_i) + \varphi(b_i)). \tag{1}$$

On notera que la précédente relation (1) n'est pas vraie si l'union est constituée d'intervalles ouverts. Par exemple, si $A =]0,1[\cup]1,2[$, alors

$$\gamma_1^+(A) = \varphi(0) + \varphi(1) + \varphi(2).$$

De même lorsque $A = \bigcup_{i=1}^{+\infty} (a_i, b_i)$ est une réunion dénombrable d'intervalles (même si l'union n'est constituée que d'intervalles fermés), (1) est encore fausse : il faut prendre en compte les éventuels points d'accumulation des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

γ_1^+ n'est pas une mesure au sens classique : si $A \subset B$, on a pas forcément $\gamma_1^+(A) \leq \gamma_1^+(B)$ (prendre par exemple $A = [-1,1] \setminus \{0\}$ et $B = [-1,1]$). Par contre, on notera que si $\partial A \subset \partial B$, alors $\gamma_1^+(A) \leq \gamma_1^+(B)$.

Le but de cet article est de montrer le résultat suivant.

Théorème 1.1. *Inégalité isopérimétrique pour la mesure gaussienne.*
Pour toute réunion A au plus dénombrable d'intervalles ouverts ou fermés deux à deux disjoints, on a

$$\gamma_1^+(A) \geq \left(\Phi' \circ \Phi^{-1}\right)(\gamma_1(A)). \tag{2}$$

Le lecteur sera peut-être surpris de voir le théorème 1.1 énoncé seulement pour des réunions dénombrable d'intervalles. L'inégalité (2) reste vraie pour les boréliens mais la preuve nécessiterait d'autres outils, alors que la preuve proposée ici se veut élémentaire.

Pour alléger les notations, on posera $\mathscr{I} := \Phi' \circ \Phi^{-1} = \varphi \circ \Phi^{-1}$. On prolonge $\mathscr{I}$ par continuité sur $[0,1]$ en posant $\mathscr{I}(0) = \mathscr{I}(1) = 0$.

1.2 Considérations historiques

C. Borell dans [2] (voir aussi [7]) est le premier à établir l'inégalité suivante : pour tout borélien $A \subset \mathbb{R}^n$, pour tout réel $r > 0$,

$$\Phi^{-1}(\gamma_n(A + B_n(0,r))) \geq \Phi^{-1}(\gamma_n(A)) + r,$$

où γ_n est la mesure gaussienne dans $\mathbb{R}^n$, $B_n(0,r)$ est la boule euclidienne de centre 0 et de rayon r et $A + B_n(0,r)$ est la somme de Minkowski définie par

$$A + B_n(0,r) := \{a + b,\ a \in A,\ b \in B_n(0,r)\}.$$

Dans [3], A. Ehrhard retrouve, à l'aide d'une méthode de symétrisation de type « Steiner », l'inégalité de Borell, qui est une forme « intégrée » de l'inégalité isopérimétrique.

Comme annoncé ci-dessus, le but de cet article est d'établir le théorème 1.1. Notre approche est la résolution du problème isopérimétrique pour la mesure γ_1 pour les intervalles (i.e. trouver les intervalles dont la mesure de bord gaussienne est la plus petite). Grâce à cela, nous pouvons prouver l'inégalité isopérimétrique pour les intervalles, puis pour les réunions finies ou dénombrables d'intervalles.

Ainsi, nous ne résolvons pas le problème isopérimétrique gaussien en toute généralité.

Nous terminons ce papier en retrouvant une inégalité (théorème 3.1) due à G. Pisier dans [6]. La preuve utilise de manière fondamentale la formule de la co-aire (proposition 3.1).

Pour terminer, citons une forme fonctionnelle de l'inégalité isopérimétrique gaussienne : pour toute fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$ de classe $\mathscr{C}^1$ avec f' bornée, on a

$$\mathscr{I}\left(\int_{\mathbb{R}} f(x)\, \mathrm{d}\gamma_1(x)\right) \leq \int_{\mathbb{R}} \sqrt{\mathscr{I}^2(f(x)) + f'^2(x)}\, \mathrm{d}\gamma_1(x). \tag{3}$$

Le théorème 1.1 permet d'obtenir (3) avec la formule de la co-aire (proposition 3.1), et réciproquement, à partir de (3), on peut retrouver le théorème 1.1 en prenant des indicatrices de borélien, ou du moins, des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ qui « approchent » des indicatrices. Nous renvoyons le lecteur intéressé à [1].

2 Preuve du résultat principal

On remarque que l'inégalité (2) à prouver est triviale lorsque $\gamma_1(A) = 0$ ou 1. En effet, lorsque $\gamma_1(A) = 0$ ou 1, on a

$$\mathscr{I}(\gamma_1(A)) = 0.$$

Ainsi, on peut supposer $\gamma_1(A) \in \left]0,1\right[$. De plus, comme $\partial A = \partial \overline{A}$ ($\overline{A}$ désigne le complémentaire de A dans $\mathbb{R}$), on a $\gamma_1^+(A) = \gamma_1^+\left(\overline{A}\right)$. Il s'ensuit que pour toute partie A réunion au plus dénombrable d'intervalles, on a

$$\begin{aligned} \gamma_1^+(A) \geq \left(\Phi' \circ \Phi^{-1}\right)(\gamma_1(A)) \quad &\Longleftrightarrow \quad \gamma_1^+\left(\overline{A}\right) \geq \left(\Phi' \circ \Phi^{-1}\right)\left(1 - \gamma_1\left(\overline{A}\right)\right) \\ &\Longleftrightarrow \quad \gamma_1^+\left(\overline{A}\right) \geq \left(\Phi' \circ \Phi^{-1}\right)\left(\gamma_1\left(\overline{A}\right)\right), \end{aligned}$$

car, pour tout $x \in \left]0,1\right[$, $\Phi^{-1}(1-x) = 1 - \Phi^{-1}(x)$ et en utilisant la parité de la fonction $\Phi' = \varphi$.

Ces équivalences montrent qu'il suffit de prouver le théorème 1.1 pour les parties A dont la mesure gaussienne est comprise entre 0 et $\frac{1}{2}$.

2.1 Cas où A est un intervalle

D'après la définition de γ_1^+, il suffit de s'intéresser aux intervalles fermés.

Soit $p \in \left]0, \frac{1}{2}\right]$ et soit $A = [a,b]$ tel que $\gamma_1(A) = p$. Notons que l'on peut avoir $a = -\infty$ ou $b = +\infty$.

L'idée est d'étudier, parmi les intervalles dont la mesure gaussienne vaut p, ceux dont la mesure de bord est la plus petite.

On introduit le point médian m de A pour γ_1, il vérifie les conditions suivantes :

$$\begin{cases} \Phi(m) - \Phi(a) = \frac{p}{2} \\ \Phi(b) - \Phi(m) = \frac{p}{2} \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} a = \Phi^{-1}\left(\Phi(m) - \frac{p}{2}\right) \\ b = \Phi^{-1}\left(\Phi(m) + \frac{p}{2}\right) \end{cases}.$$

D'après la définition 1.1, on a donc

$$\gamma_1^+(A) = \varphi(a) + \varphi(b) = \varphi\left(\Phi^{-1}\left(\Phi(m) - \frac{p}{2}\right)\right) + \varphi\left(\Phi^{-1}\left(\Phi(m) + \frac{p}{2}\right)\right).$$

Pour trouver les intervalles de mesure gaussienne de p pour lesquels la mesure de bord est minimale, nous allons optimiser la fonction

$$f : m \longmapsto \varphi\left(\Phi^{-1}\left(\Phi(m) - \frac{p}{2}\right)\right) + \varphi\left(\Phi^{-1}\left(\Phi(m) + \frac{p}{2}\right)\right).$$

On remarque que $f(m)$ est défini si, et seulement si, $m \in \left]\Phi^{-1}\left(\frac{p}{2}\right), \Phi^{-1}\left(1 - \frac{p}{2}\right)\right[$.

Par des arguments standards, f est dérivable sur $\left]\Phi^{-1}\left(\frac{p}{2}\right), \Phi^{-1}\left(1 - \frac{p}{2}\right)\right[$ et, en utilisant les formules de dérivation des fonctions composées et des fonctions réciproques, on a

$$f'(m) = \varphi'\left(\Phi^{-1}\left(\Phi(m) - \frac{p}{2}\right)\right) \times \frac{\Phi'(m)}{\Phi' \circ \Phi^{-1}\left(\Phi(m) - \frac{p}{2}\right)} + \varphi'\left(\Phi^{-1}\left(\Phi(m) + \frac{p}{2}\right)\right) \times \frac{\Phi'(m)}{\Phi' \circ \Phi^{-1}\left(\Phi(m) + \frac{p}{2}\right)}.$$

Comme $\Phi' = \varphi$ et, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} = -t$, on en déduit donc

$$f'(m) = -\varphi(m)\left(\Phi^{-1}\left(\Phi(m) - \frac{p}{2}\right) + \Phi^{-1}\left(\Phi(m) + \frac{p}{2}\right)\right).$$

Les fonctions Φ et Φ^{-1} étant strictement croissantes sur leurs ensembles de définition respectifs, la fonction $m \longmapsto \Phi^{-1}\left(\Phi(m) - \frac{p}{2}\right) + \Phi^{-1}\left(\Phi(m) + \frac{p}{2}\right)$ est donc strictement croissante sur $\left]\Phi^{-1}\left(\frac{p}{2}\right), \Phi^{-1}\left(1 - \frac{p}{2}\right)\right[$. De plus,

$$f'(0) = -\varphi(0)\left(\Phi^{-1}\left(\Phi(0) - \frac{p}{2}\right) + \Phi^{-1}\left(\Phi(0) + \frac{p}{2}\right)\right).$$

Or, $\Phi(0) = \frac{1}{2}$, on récupère donc

$$f'(0) = -\varphi'(0)\left(\Phi^{-1}\left(\frac{1-p}{2}\right) + \Phi^{-1}\left(\frac{1+p}{2}\right)\right) = -\varphi'(0)\left(\Phi^{-1}\left(1 - \frac{1+p}{2}\right) + \Phi^{-1}\left(\frac{1+p}{2}\right)\right) = 0$$

car pour tout $x \in \left]0,1\right[$, $\Phi^{-1}(1-x) = -\Phi^{-1}(x)$. De plus, on a

$$\lim_{m\to\Phi^{-1}(p/2)} f(m) = \varphi\left(\Phi^{-1}(p)\right) \quad \text{et} \quad \lim_{m\to\Phi^{-1}(1-p/2)} f(m) = \varphi\left(\Phi^{-1}(1-p)\right).$$

Par parité de φ, ces deux limites sont égales. On en déduit le tableau suivant :

m	$\Phi^{-1}\left(\frac{p}{2}\right)$		0		$\Phi^{-1}\left(1-\frac{p}{2}\right)$
$f'(m)$		$+$	0	$-$	
f	$\varphi\left(\Phi^{-1}(p)\right)$	$\nearrow$		$\searrow$	$\varphi\left(\Phi^{-1}(p)\right)$

On a montré que pour tout intervalle $A = [a,b]$ de mesure gaussienne $p \in \left]0,\frac{1}{2}\right]$, on a

$$\gamma_1^+(A) \geq \varphi\left(\Phi^{-1}(p)\right) = \left(\Phi' \circ \Phi^{-1}\right)(\gamma_1(A)) = \mathscr{I}(\gamma_1(A)).$$

2.2 Cas d'une réunion finie d'intervalles deux à deux disjoints

Soit $p \in \left]0,\frac{1}{2}\right]$. Dans ce paragraphe, A est une réunion finie d'intervalles deux à deux disjoints. Comme $\gamma_1^+(A) = \gamma_1^+(\operatorname{adh}(A))$ et $\gamma_1(A) = \gamma_1(\operatorname{adh}(A))$, on peut supposer que A est fermé.

On écrit $A = \displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} [a_i, b_i]$ où l'union est disjointe.

Si, par exemple $a_1 = b_1$, alors en considérant $B := A \setminus \{a_1\}$, on a $\gamma_1(B) = \gamma_1(A)$ et $\gamma_1^+(A) \geq \gamma_1^+(B)$, ainsi on peut supposer que pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $a_i < b_i$.

Enfin, quitte à renuméroter les a_i et b_i, on peut supposer que $a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < \cdots < a_n < b_n$. Notons que l'on peut avoir $a_1 = -\infty$ et/ou $b_n = +\infty$.

On distingue trois cas :

i) Si $b_n \leq 0$, alors $A \subset \mathbb{R}_-$.
Comme $A \subset \left]-\infty, b_n\right]$, par croissance de la mesure, on a $p = \gamma_1(A) \leq \gamma_1\left(\left]-\infty, b_n\right]\right) = \Phi(b_n)$. Ainsi, par croissance de Φ^{-1} sur $\left]0,1\right[$, on obtient $b_n \geq \Phi^{-1}(p)$. En utilisant la croissance de φ sur $\mathbb{R}_-$, on a $\varphi(b_n) \geq \varphi\left(\Phi^{-1}(p)\right)$. On en déduit que

$$\gamma_1^+(A) = \sum_{i=1}^{n} \left(\varphi(a_i) + \varphi(b_i)\right) \geq \varphi(b_n) \geq \varphi\left(\Phi^{-1}(\gamma_1(A))\right) = \mathscr{I}(\gamma_1(A)).$$

ii) Si $a_n \geq 0$, alors $A \subset \mathbb{R}_+$. Si l'on note $-A = \{-a,\ a \in A\} \subset \mathbb{R}_-$, la parité de φ et i) donnent

$$\gamma_1^+(A) = \gamma_1^+(-A) \geq \mathscr{I}(\gamma_1(-A)) = \mathscr{I}(\gamma_1(A)).$$

iii) Si $b_n > 0$ et $a_n < 0$. Ce cas se divise en deux sous-cas :

- Si $0 \notin A$, ainsi pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, $0 \notin [a_j, b_j]$.
  Soit k l'indice de $[\![1,n-1]\!]$ tel que

  $$\bigcup_{i=1}^{k} [a_i, b_i] \subset \mathbb{R}_- \quad \text{et} \quad \bigcup_{i=k+1}^{n} [a_i, b_i] \subset \mathbb{R}_+.$$

  On note

  $$p_1 = \gamma_1\left(\bigcup_{i=1}^{k} [a_i, b_i]\right) \quad \text{et} \quad p_2 = \gamma_1\left(\bigcup_{i=k+1}^{n} [a_i, b_i]\right)$$

  de sorte que $p = p_1 + p_2$. D'après les études faites en i) et ii) ci-dessus, on a

  $$\gamma_1^+(A) \geq \gamma_1^+\left(\left]-\infty, \Phi^{-1}(p_1)\right]\right) + \gamma_1^+\left(\left[\Phi^{-1}(1-p_2), +\infty\right[\right).$$

- Si $0 \in A$, il existe $k \in [\![1,n]\!]$ tel que $0 \in [a_k, b_k]$. On écrit alors :

$$A = \bigcup_{i=1}^{k-1} [a_i, b_i] \cup [a_k, b_k] \cup \bigcup_{i=k+1}^{n} [a_i, b_i] .$$

On note

$$p_1 = \gamma_1 \left(\bigcup_{i=1}^{k-1} [a_i, b_i] \right), \quad p_2 = \gamma_1 \left([a_k, b_k] \right) \quad \text{et} \quad p_3 = \gamma_1 \left(\bigcup_{i=k+1}^{n} [a_i, b_i] \right).$$

L'union précédente étant disjointe, on a $p_1 + p_2 + p_3 = p$.
Comme p_1, p_2 sont deux éléments de $\left]0, \frac{1}{2}\right[$, d'après les cas i) et ii), on a

$$\gamma_1^+ \left(\left]-\infty, \Phi^{-1}(p_1)\right] \right) \leq \gamma_1^+ \left(\bigcup_{i=1}^{k-1} [a_i, b_i] \right) \quad \text{et} \quad \gamma_1^+ \left(\left[\Phi^{-1}(1-p_3), +\infty\right[\right) \leq \gamma_1^+ \left(\bigcup_{i=k+1}^{n} [a_i, b_i] \right),$$

ce qui donne

$$\gamma_1^+ \left(\left]-\infty, \Phi^{-1}(p_1)\right] \cup [a_k, b_k] \cup \left[\Phi^{-1}(1-p_2), +\infty\right[\right) \leq \gamma_1^+ (A)$$

avec

$$\gamma_1 \left(\left]-\infty, \Phi^{-1}(p_1)\right] \cup [a_k, b_k] \cup \left[\Phi^{-1}(1-p_2), +\infty\right[\right) = \gamma_1 (A) .$$

De plus, en supposant que le point médian de l'intervalle $[a_k, b_k]$ est positif, l'étude de fonction faite au paragraphe 2.1 montre que la mesure de bord de l'intervalle $[a_k, b_k]$ décroît si on le « pousse vers la droite », ainsi

$$\gamma_1^+ \left(\left[\Phi^{-1}(1-(p_2+p_3)), +\infty\right[\right) \leq \gamma_1^+ \left([a_k, b_k] \cup \left[\Phi^{-1}(1-p_3), +\infty\right[\right)$$

avec

$$\gamma_1 \left(\left[\Phi^{-1}(1-(p_2+p_3)), +\infty\right[\right) = \gamma_1 \left([a_k, b_k] \cup \left[\Phi^{-1}(1-p_3), +\infty\right[\right).$$

Dans ce point iii), on a montré que pour n'importe quelle réunion finie d'intervalles fermés A de mesure gaussienne $p \in \left]0, \frac{1}{2}\right]$, il existe une réunion de deux demi-droites D telle que

$$\gamma_1^+ (D) \leq \gamma_1^+ (A) \quad \text{avec} \quad \gamma_1 (D) = \gamma_1 (A) .$$

On va maintenant se ramener à une seule demi-droite, c'est-à-dire, étant donné une réunion de deux demi-droites $]-\infty, a] \cup [b, +\infty[$ de mesure gaussienne $p \in \left]0, \frac{1}{2}\right]$, nous allons montrer qu'il existe une demi-droite Δ de mesure gaussienne p et telle que

$$\gamma_1^+ (\Delta) \leq \gamma_1^+ (D) .$$

Un des deux seuls candidats possibles est $\Delta := \left]-\infty, \Phi^{-1}(p)\right]$ (l'autre est $\left[\Phi^{-1}(1-p), +\infty\right[$), ainsi il s'agit de montrer que l'on a

$$\gamma_1^+ (\Delta) \leq \gamma_1^+ (D) \iff \varphi \left(\Phi^{-1}(p_1+p_2) \right) \leq \varphi \left(\Phi^{-1}(p_1) \right) + \varphi \left(\Phi^{-1}(p_2) \right) \tag{4}$$

où l'on a noté $p_1 := \gamma_1 (]-\infty, a])$ et $p_2 := \gamma_1 ([b, +\infty[)$. On notera que la parité de la fonction φ assure que

$$\varphi \left(\Phi^{-1}(1-p_2) \right) = \varphi \left(\Phi^{-1}(p_2) \right).$$

On aura alors

$$\gamma_1^+ (A) \geq \gamma_1^+ \left(\left]-\infty, \Phi^{-1}(p)\right] \right) = \varphi \left(\Phi^{-1}(p) \right) = \mathscr{I}(p) = \mathscr{I}(\gamma_1(A)) .$$

Pour prouver (4), nous utiliserons le lemme suivant :

Lemme 2.1. *Propriétés de la fonction* $\mathscr{I} = \Phi' \circ \Phi^{-1}$.

a) *La fonction* $\mathscr{I}$ *est concave sur* $[0,1]$ *;*

b) *pour tout* $(r,s) \in]0,1[^2$ *avec* $r+s<1$*, on a*

$$\mathscr{I}(r+s) \leq \mathscr{I}(r) + \mathscr{I}(s).$$

Démonstration. a) Pour tout $t \in]0,1[$, on a

$$\mathscr{I}'(t) = \left(\varphi \circ \Phi^{-1}\right)'(t) = \frac{1}{\Phi' \circ \Phi^{-1}(t)} \times \varphi' \circ \Phi^{-1}(t) = \left(\frac{\varphi'}{\varphi}\right)\left(\Phi^{-1}(t)\right)$$

car $\Phi' = \varphi$. Toujours en utilisant le fait que $\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} = -t$, on obtient

$$\mathscr{I}'(t) = -\Phi^{-1}(t).$$

Or, Φ^{-1} est croissante sur $]0,1[$, il s'ensuit que $\mathscr{I}'$ est décroissante sur $]0,1[$, donc $\mathscr{I}$ est concave sur $]0,1[$.

Comme $\mathscr{I}$ est continue sur $[0,1]$, $\mathscr{I}$ est concave sur $[0,1]$.

b) Soit $s \in]0,1[$ fixé. Pour tout $r \in]0,1-s[$, on a

$$\frac{\mathrm{d}\left(\mathscr{I}(r+s) - \mathscr{I}(r) - \mathscr{I}(s)\right)}{\mathrm{d}r} = \mathscr{I}'(r+s) - \mathscr{I}'(r) \leq 0$$

car $\mathscr{I}$ est concave sur $]0,1[$. Ainsi $r \longmapsto \mathscr{I}(r+s) - \mathscr{I}(r) - \mathscr{I}(s)$ est décroissante sur $]0,1[$, d'où

$$\forall r \in]0,1-s[\quad \mathscr{I}(r+s) - \mathscr{I}(r) - \mathscr{I}(s) \leq \mathscr{I}(s) - \mathscr{I}(0) - \mathscr{I}(s) = -\mathscr{I}(0) \leq 0.$$

□

Remarque 1*.* La preuve de b) utilise seulement la concavité de $\mathscr{I}$ et se généralise facilement à d'autres fonctions concaves.

Le lemme (2.1) assure la véracité de la ligne (4), ce qui conclut iii).

2.3 Cas d'une réunion dénombrable d'intervalles

Soit $A := \bigcup_{i=1}^{+\infty} (a_i, b_i)$, avec les (a_i, b_i) deux à deux disjoints (on rappelle que la notation (a_i, b_i) signifie que les bornes sont ouvertes ou fermées) de mesure gaussienne $p \in \left]0, \frac{1}{2}\right]$.

Soit $B := \bigcup_{i=1}^{+\infty} [a_i, b_i]$.

Comme $\partial A = \partial B$, on a bien sûr $\gamma_1^+(A) = \gamma_1^+(B)$.

De plus, $B = A \cup \mathscr{N}$ où $\mathscr{N}$ est un ensemble au plus dénombrable, donc $\gamma_1(A) = \gamma_1(B)$.

Ainsi, on peut supposer que A est réunion d'intervalles fermés deux à deux disjoints.

En introduction, nous avons dit que le bord d'une réunion dénombrable d'intervalles fermés n'est « pas si simple ». Le lemme suivant permet une simplification.

Lemme 2.2. *Minoration de la mesure de bord d'une réunion d'intervalles.*

Soit $B := \bigcup_{i=1}^{+\infty} [a_i, b_i]$ *avec les intervalles* $[a_i, b_i]$ *deux à deux disjoints. On a :*

$$\partial B \supset \bigcup_{i=1}^{+\infty} \partial\left([a_i, b_i]\right) = \bigcup_{i=1}^{+\infty} \{a_i, b_i\}.$$

Démonstration. Soit $x \in \bigcup_{i=1}^{+\infty} \{a_i, b_i\}$.

Il est clair que $x \in A$, donc $x \in \mathrm{adh}(B)$.

Soit $\varepsilon > 0$. Comme l'union est composée d'intervalles deux à deux disjoints, on a $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\cap B \not\subset B$, ainsi $x \notin \mathrm{int}(B)$.

Cela prouve que $x \in \partial B = \mathrm{adh}(B) \setminus \mathrm{int}(B)$.

□

Le lemme 2.2 asure en particulier que

$$\gamma_1^+ (A) = \int_{\partial A} \varphi (t) \, \mathrm{d}\mathscr{H}^0 (t) \geq \int_{\bigcup_{i=1}^{+\infty} \{a_i, b_i\}} \varphi (t) \, \mathrm{d}\mathscr{H}^0 (t) = \sum_{i=1}^{+\infty} (\varphi (a_i) + \varphi (b_i)) .$$

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Avec les mêmes notations que celles du lemme 2.2 et en supposant $\gamma_1 (A) \in \left]0, \frac{1}{2}\right]$, d'après le lemme 2.2, on a

$$\gamma_1^+ (A) \geq \sum_{i=1}^{N} (\varphi (a_i) + \varphi (b_i)) \geq \gamma_1^+ \left(\bigcup_{i=1}^{N} [a_i, b_i] \right).$$

D'après le paragraphe 2.2, en notant $p_N := \gamma_1 \left(\bigcup_{i=1}^{N} [a_i, b_i] \right) \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, on a

$$\gamma_1^+ (A) \geq \gamma_1^+ \left(\bigcup_{i=1}^{N} [a_i, b_i] \right) \geq \mathscr{I} (p_N) .$$

Or, par convergence monotone,

$$\lim_{N \to +\infty} p_N = \lim_{N \to +\infty} \gamma_1 \left(\bigcup_{i=1}^{N} [a_i, b_i] \right) = \gamma_1 (A) .$$

Par continuité de $\mathscr{I}$, on en déduit que

$$\gamma_1^+ (A) \geq \mathscr{I} (\gamma_1 (A)) .$$

3 Inégalité de Pisier

Dans cette partie, nous donnons une conséquence du théorème 1.1 : l'inégalité de Pisier.

Avant cela, nous aurons besoin de la notion de valeur médiane d'une fonction et de la formule de la co-aire.

Définition 3.1. *Valeur médiane.*
Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction borélienne. Soit $m \in \mathbb{R}$.
*On dit que m est **une** valeur médiane de f pour la mesure γ_1 si :*

$$\forall t \geq m \quad \gamma_1 \{f > t\} \leq \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \forall t < m \quad \gamma_1 \{f > t\} > \frac{1}{2}.$$

La notion de valeur médiane peut être définie plus généralement pour n'importe quelle mesure de probabilité sur un espace probabilisé.

Proposition 3.1. *Formule de la co-aire.*
Soient $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ mesurable et $u : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1_{\mathrm{pm}}$. Alors

$$\int_{\mathbb{R}} \left| u' (x) \right| h (x) \, \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{u^{-1}(\{t\})} h (x) \, \mathrm{d}\mathscr{H}^0 (x) \right) \mathrm{d}t,$$

l'égalité ayant lieu dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$.

Nous renvoyons la preuve à [4].

Théorème 3.1. *Inégalité de Pisier.*
Pour toute fonction u de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ telle que u' soit bornée sur $\mathbb{R}$, on a

$$\int_{\mathbb{R}} \left| u' (t) \right| \mathrm{d}\gamma_1 (t) \geq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{\mathbb{R}} |u (t) - m| \, \mathrm{d}\gamma_1 (t) , \tag{5}$$

où m est une valeur médiane de u pour la mesure γ_1.

Remarque 2.
- L'inégalité de Pisier peut être énoncée dans $\mathbb{R}^n$ (pour la mesure γ_n dont la densité est $x \longmapsto \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \mathrm{e}^{-|x|^2/2}$) en supposant seulement u lipschitzienne sur $\mathbb{R}^n$ (on rappelle que le théorème de Rademacher assure qu'une fonction lipschitzienne est dérivable presque-partout et que la dérivée est une fonction mesurable). Nous renvoyons à [6] et [5] pour une preuve plus générale.
- En prenant des fonctions qui « approchent » des indicatrices d'une demi-droite dans (5), on peut montrer que la constante $\sqrt{\frac{2}{\pi}}$ est optimale.

Avant de passer à la preuve, nous utiliserons les lemmes suivants :

Lemme 3.1. *Représentation en « mille-feuille ».*
Soit $(X, \mathscr{X}, \mu)$ un espace mesuré. Soit $f \in L^1(\mu)$ à valeurs positives. Alors

$$\int_X f(x)\, \mathrm{d}\mu(x) = \int_0^{+\infty} \mu(\{f > t\})\, \mathrm{d}t.$$

Démonstration. Pour tout $x \in X$, on écrit

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \chi_{\{f>t\}}(x)\, \mathrm{d}t,$$

où $\chi_{\{f>t\}}$ est l'indicatrice de l'ensemble $\{y \in X,\ f(y) > t\}$, ainsi

$$\int_X f(x)\, \mathrm{d}\mu(x) = \int_X \left(\int_0^{+\infty} \chi_{\{f>t\}}(x)\, \mathrm{d}t \right) \mathrm{d}\mu(x).$$

En utilisant le théorème de Fubini, on obtient

$$\int_X f(x)\, \mathrm{d}\mu(x) = \int_0^{+\infty} \left(\int_X \chi_{\{f>t\}}(x)\, \mathrm{d}\mu(x) \right) \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \mu(\{f > t\})\, \mathrm{d}t.$$

□

Lemme 3.2. *Minoration de $\mathscr{I}$.*
On a

$$\forall t \in [0,1] \quad \mathscr{I}(t) \geq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \min\{t, 1-t\}.$$

Démonstration. Comme $\mathscr{I}$ est concave sur $[0,1]$ (lemme 2.1), le graphe de $\mathscr{I}$ est au dessus de ses cordes, en particulier la corde qui passe par les points de coordonnées $(0, \mathscr{I}(0))$ et $\left(\frac{1}{2}, \mathscr{I}\left(\frac{1}{2}\right)\right)$. Ainsi,

$$\forall t \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \quad \mathscr{I}(t) \geq \frac{\mathscr{I}\left(\frac{1}{2}\right)}{\frac{1}{2}} t.$$

Or, $\mathscr{I}\left(\frac{1}{2}\right) = \Phi'\left(\Phi^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \varphi(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, ainsi

$$\forall t \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \quad \mathscr{I}(t) \geq \sqrt{\frac{2}{\pi}} t = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \min\{t, 1-t\}. \tag{6}$$

Un même raisonnement montre que

$$\forall t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \quad \mathscr{I}(t) \geq \sqrt{\frac{2}{\pi}} (1-t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \min\{t, 1-t\}. \tag{7}$$

Les lignes (6) et (7) montrent que

$$\forall t \in [0,1] \quad \mathscr{I}(t) \geq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \min\{t, 1-t\}.$$

□

Lemme 3.3. *Ouverts de* $\mathbb{R}$.

Tout ouvert de $\mathbb{R}$ *s'écrit comme une union au plus dénombrable d'intervalles ouverts deux à deux disjoints.*

Démonstration. Soit O un ouvert de $\mathbb{R}$.

- Si $O = \varnothing$, alors on peut écrire $O =]0, 0[$, donc O est bien l'union au plus dénombrable d'intervalles ouverts deux à deux disjoints.
- On suppose O non vide. On définit sur O la relation binaire $\mathscr{R}$ par :

$$\forall (x, y) \in O^2 \quad x\mathscr{R}y \iff \{(1-t)\,x + ty,\ t \in [0,1]\} \subset O.$$

  Il est facile de vérifier que $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence sur O.

  Soit $x \in O$ et $\mathrm{cl}\,(x)$ sa classe d'équivalence pour la relation $\mathscr{R}$. Comme O est un ouvert de $\mathbb{R}$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset O$. Cela prouve que $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset \mathrm{cl}\,(x)$.

  Les classes d'équivalence (deux à deux disjointes) sont donc des intervalles ouverts que l'on note $]a_i, b_i[$ avec $i \in I$ et $a_i < b_i$ de sorte que

$$O = \bigcup_{i \in I}]a_i, b_i[\,.$$

  Soit, pour tout $i \in I$, $q_i \in \mathbb{Q} \cap]a_i, b_i[$. Notons que, comme $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ et $]a_i, b_i[\neq \varnothing$, un tel élément existe.

  L'application $\begin{cases} I & \longrightarrow \mathbb{Q} \\ i & \longmapsto q_i \end{cases}$ est injective car les intervalles $]a_i, b_i[$ sont deux à deux disjoints.

  Comme $\mathbb{Q}$ est dénombrable, il s'ensuit que I est au plus dénombrable.

□

Passons à la preuve du théorème 3.1.

Démonstration. Soit u une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ telle que u' soit bornée. Soit m une valeur médiane de u pour la mesure γ_1.

Quitte à considérer $\widetilde{u} = u - m$ dont une valeur médiane est 0 et vérifiant $\widetilde{u}' = u'$, on peut supposer qu'une valeur médiane de u pour la mesure γ_1 est 0.

On remarque que $u' \in L^1(\gamma_1)$ et l'inégalité des accroissements finis appliquée à la fonction u donne

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad |u(t)| = |u(t) - u(0) + u(0)| \leq \|u'\|_\infty^{\mathbb{R}} |t| + |u(0)|\,,$$

ce qui assure que $u \in L^1(\gamma_1)$.

La formule de la co-aire (proposition 3.1) donne

$$\int_{\mathbb{R}} |u'(t)|\,\mathrm{d}\gamma_1(t) = \int_{\mathbb{R}} |u'(t)|\,\varphi(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{u^{-1}(\{t\})} \varphi(x)\,\mathrm{d}\mathscr{H}^0(x) \right) \mathrm{d}t.$$

En remarquant que le bord de l'ensemble $\{u > t\} = \{x \in \mathbb{R},\ u(x) > t\}$ (par continuité de u) est $u^{-1}(\{t\})$, on a

$$\int_{\mathbb{R}} |u'(t)|\,\mathrm{d}\gamma_1(t) = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\partial(\{u>t\})} \varphi(x)\,\mathrm{d}\mathscr{H}^0(x) \right) \mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}} \gamma_1^+(\{u > t\})\,\mathrm{d}t. \tag{8}$$

Comme u est continue sur $\mathbb{R}$, pour tout $t \in \mathbb{R}$, l'ensemble $\{u > t\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}$. Or, d'après le lemme 3.3, un ouvert de $\mathbb{R}$ est une réunion au plus dénombrable d'intervalles ouverts deux à deux disjoints. Par le théorème 1.1, on a

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \gamma_1^+(\{u > t\}) \geq \mathscr{I}(\gamma_1(\{u > t\}))\,.$$

Par le lemme 3.2, on a

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \gamma_1^+(\{u > t\}) \geq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \min\{\gamma_1(\{u > t\}), 1 - \gamma_1(\{u > t\})\}\,.$$

Cette ligne utilisée dans (8) donne

$$\int_{\mathbb{R}} \left|u'(t)\right| \mathrm{d}\gamma_1(t) \geq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{\mathbb{R}} \min\left\{\gamma_1(\{u > t\}), 1 - \gamma_1(\{u > t\})\right\} \mathrm{d}t,$$

soit

$$\int_{\mathbb{R}} \left|u'(t)\right| \mathrm{d}\gamma_1(t) \geq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{\mathbb{R}} \min\left\{\gamma_1(\{u > t\}), \gamma_1(\{u \leq t\})\right\} \mathrm{d}t. \tag{9}$$

Or, 0 est une valeur médiane de u pour la mesure γ_1, pour tout $t < 0$, $\gamma_1(\{u > t\}) > \frac{1}{2}$ et pour tout $t \geq 0$, $\gamma_1(\{u > t\}) \leq \frac{1}{2}$, ainsi

$$\int_{-\infty}^{0} \min\left\{\gamma_1(\{u > t\}), \gamma_1(\{u \leq t\})\right\} \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{0} \gamma_1(\{u \leq t\}) \mathrm{d}t \tag{10}$$

et

$$\int_{0}^{+\infty} \min\left\{\gamma_1(\{u > t\}), \gamma_1(\{u \leq t\})\right\} \mathrm{d}t = \int_{0}^{+\infty} \gamma_1(\{u > t\}) \mathrm{d}t. \tag{11}$$

En utilisant les fonctions $u^+ := \max\{u, 0\}$ et $u^- := \max\{-u, 0\}$ de sorte que $u = u^+ - u^-$ et $|u| = u^+ + u^-$, on a

$$\int_{-\infty}^{0} \gamma_1(\{u \leq t\}) \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{0} \gamma_1\left(\left\{-u^- \leq t\right\}\right) \mathrm{d}t \tag{12}$$

et

$$\int_{0}^{+\infty} \gamma_1(\{u > t\}) \mathrm{d}t = \int_{0}^{+\infty} \gamma_1\left(\left\{u^+ > t\right\}\right) \mathrm{d}t. \tag{13}$$

Le changement de variable $x = -t$ dans (12) et la croissance de la mesure donnent

$$\int_{-\infty}^{0} \gamma_1(\{u \leq t\}) \mathrm{d}t = \int_{0}^{+\infty} \gamma_1\left(\left\{u^- \geq x\right\}\right) \mathrm{d}x \geq \int_{0}^{+\infty} \gamma_1\left(\left\{u^- > x\right\}\right) \mathrm{d}x. \tag{14}$$

Le lemme 3.1 appliqué aux fonctions positives u^+ et u^- dans les lignes (13) et (14) donne

$$\int_{0}^{+\infty} \gamma_1(\{u > t\}) \mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}} u^+(t) \mathrm{d}\gamma_1(t) \tag{15}$$

et

$$\int_{-\infty}^{0} \gamma_1(\{u \leq t\}) \mathrm{d}t \geq \int_{\mathbb{R}} u^-(t) \mathrm{d}\gamma_1(t) \tag{16}$$

L'utilisation de (15) et (16) dans (10) et (11) donne

$$\int_{-\infty}^{0} \min\left\{\gamma_1(\{u > t\}), \gamma_1(\{u \leq t\})\right\} \mathrm{d}t \geq \int_{\mathbb{R}} u^-(t) \mathrm{d}\gamma_1(t)$$

et

$$\int_{-\infty}^{0} \min\left\{\gamma_1(\{u > t\}), \gamma_1(\{u \leq t\})\right\} \mathrm{d}t \geq \int_{\mathbb{R}} u^+(t) \mathrm{d}\gamma_1(t).$$

Comme $|u| = u^+ + u^-$, la somme de ces deux lignes utilisée dans (9) donne

$$\int_{\mathbb{R}} \left|u'(t)\right| \mathrm{d}\gamma_1(t) \geq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{\mathbb{R}} |u(t)| \mathrm{d}\gamma_1(t).$$

$\square$

Références

[1] S. G. Bobkov, *A Functional Form of the Isoperimetric Inequality for the Gaussian measures*. Journal of Functional Analysis, 135.1, pp. 36-49, 1996.

[2] C. Borell, *The Brunn-Minkowski inequality in Gauss space*. Invent. Math. 30, pp. 207-216, 1975.

[3] A. Ehrhard, *Symétrisation dans l'espace de Gauss*, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. 17, pp. 317-332, 1984.

[4] H. Federer, *Geometric Measure Theory*. Springer-Verlag Berlin and Heidelberg GmbH & Co. K., 1969.

[5] M. Ledoux, *Semigroup proofs of the isoperimetric inequality in Euclidean and Gauss space*, Bull. Sci. math. 118, pp. 485-510, 1994.

[6] G. Pisier, *Probabilistic methods in the geometry of Banach spaces. Probability and Analysis*, Varenna (Italy) 1985. Springer-Verlag.

[7] V. N. Sudakov and B. S. Tsirel'son, *Extremal properties of half-spaces for spherically invariant measures*, J. Soviet Math. 9, pp. 9-18, 1978.