Une nouvelle preuve du théorème de Denjoy-Lusin *

Erik Thomas †

Résumé

Dans cet article, nous donnons une nouvelle preuve du théorème de Denjoy-Lusin qui stipule que si une série trigonométrique converge absolument sur un ensemble de mesure strictement positive, alors cette série trigonométrique converge absolument sur $\mathbb{R}$.

Pour prouver le théorème de Denjoy-Lusin, nous utilisons un théorème dû à Steinhaus dont l'intérêt est propre. Nous donnons deux preuves classiques du théorème de Steinhaus.

Nous terminons par donner une application classique du théorème de Denjoy-Lusin.

Mots clés : série trigonométrique, mesure de Lebesgue

1 Introduction

Dans cet article, nous proposons une nouvelle preuve du théorème de Denjoy-Lusin. Ce résultat a été établi indépendamment en 1912 par Denjoy (voir [3]) et Lusin (voir [4]).

L'étude de l'ensemble de convergence absolue d'une série trigonométrique est un exercice difficile et les résultats généraux sont difficiles à obtenir voire impossible car toutes les situations peuvent se produire. Le théorème de Denjoy-Lusin est un résultat positif en ce sens.

Théorème 1.1. *Théorème de Denjoy-Lusin.*

Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ deux suites réelles. On suppose que la série $\sum_{n\geq 1}(a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx))$ converge absolument sur un ensemble mesurable E de mesure de Lebesgue strictement positive.

Alors, la série $\sum_{n\geq 1}(a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx))$ converge absolument pour tout réel x.

L'hypothèse « E est de mesure strictement positive » est évidemment une hypothèse très forte, mais elle reste néanmoins optimale. En effet, il existe des séries trigonométriques qui convergent pas absolument sur des ensembles de mesure nulle et qui ne convergent absolument pour tout réel.

On peut par exemple citer la série $\sum_{n\geq 1}\sin(2^n\pi x)$: on peut montrer que cette série converge absolument seulement pour les rationnels dont l'écriture en fraction irréductible est de la forme $\frac{p}{2^m}$ avec $p\in\mathbb{Z}$ et $m\in\mathbb{N}$. Cet ensemble est dénombrable, donc de mesure nulle. Autre exemple, l'ensemble de convergence absolue de la série trigonométrique $\sum_{n\geq 1}\sin(n!\pi x)$ a la puissance du continu et est de mesure nulle. Nous renvoyons à [1] pour une étude détaillée de la convergence de ces deux séries trigonométriques.

Dans cet article, nous donnons une nouvelle preuve du théorème de Denjoy-Lusin. Notre preuve utilise le théorème de Steinhaus.

Théorème 1.2. *Théorème de Steinhaus.*

Soit A un ensemble mesurable dont la mesure de Lebesgue est strictement positive. Alors, $A-A$ contient un intervalle ouvert non vide centré en 0 : il existe $\varepsilon>0$ tel que $]-\varepsilon,\varepsilon[\subset A-A$.

Ce résultat est remarquable en soi. Un ensemble mesurable de mesure strictement positive est « loin » d'être d'intérieur non vide et de contenir un intervalle ouvert non vide (par exemple, les irrationnels sur $[0,1]$).

*2010 Mathematics Subject Classification : 42A20, 42A24

†erik.thomas@ens-rennes.fr

Ainsi, l'ensemble $A - A$ est sensiblement « plus gros » que A, centré en 0 et contient un intervalle ouvert non vide. On notera que l'inégalité de Brunn-Minkowski, qui assure que

$$\lambda(A - A) = \lambda(A + (-A)) \geq \lambda(A) + \lambda(-A) = 2\lambda(A)$$

ne permet pas déduire quoique ce soit concernant « la forme » de $A - A$, et où λ désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. Cette notation sera conservée dans toute la suite.

Cet article est organisé de la façon suivante : dans une partie 2 nous restituons le contexte du théorème de Steinhaus et nous en donnons deux preuves classiques et dans une partie 3, nous prouvons le théorème de Denjoy-Lusin à l'aide du théorème de Steinhaus et nous donnons un corollaire classique du théorème de Denjoy-Lusin.

2 Théorème de Steinhaus

Comme annoncé en introduction, notre preuve du théorème de Denjoy-Lusin se base sur le théorème de Steinhaus.

Steinhaus prouve ce résultat comme le corollaire d'un résultat de M. Sierpinski [6] :

Théorème 2.1. *Sierpinski.*
Soient A et B deux ensembles mesurables de $\mathbb{R}$ tous les deux de mesure de Lebesgue strictement positive. Alors, on peut trouver $a \in A$ et $b \in B$ tels que $a - b \in \mathbb{Q}$.

Nous ne donnons pas ici la preuve originelle de Steinhaus dans [7] : nous exposerons deux preuves classiques pour y parvenir : une de A. Weyl dans [9] et l'autre de K. Stromberg dans [8]. La preuve de A. Weyl dans [9] utilise des outils classiques de la théorie de la mesure et l'autre dûe à K. Stromberg dans [8] plus astucieuse et peut se généraliser à des groupes topologiques.

2.1 La preuve de Weyl

On rappelle la définition du produit de convolution.

Définition 2.1. *Produit de convolution.*
Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$. On définit, sous réserve d'existence, la fonction $f \star g$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (f \star g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\, g(x - t)\, \mathrm{d}t.$$

On rappelle que si f et g sont deux éléments de $L^1(\mathbb{R})$, alors $f \star g$ existe presque-partout.

Lemme 2.1. *Support d'une convolée*
Soient f et g deux fonctions définies dont on note $\operatorname{supp}(f)$ *et* $\operatorname{supp}(g)$ *les supports respectifs. Alors,* $\operatorname{supp}(f \star g) \subset \operatorname{supp}(f) + \operatorname{supp}(g)$.

Démonstration. Soit $x \in \operatorname{supp}(f \star g)$. On suppose, par exemple, que

$$(f \star g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\, g(x - t)\, \mathrm{d}t > 0.$$

Il s'ensuit que l'ensemble $\{t \in \mathbb{R},\ f(t)\, g(x - t) > 0\}$ est de mesure strictement positive, donc non vide.

Il s'ensuit que $x \in \operatorname{supp}(f) + \operatorname{supp}(g)$. □

Nous utiliserons aussi le très classique résultat de densité suivant. Nous renvoyons à [5] pour la preuve.

Proposition 2.1. *Densité*
Pour tout $f \in L^1(\mathbb{R})$, pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout $p \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, il existe $g \in \mathscr{C}_c^p(\mathbb{R})$ (l'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^p$ et à support compact) telle que

$$\|f - g\|_1 \leq \varepsilon.$$

Le lemme suivant est le point clé de la preuve de Weyl du théorème de Steinhaus.

Lemme 2.2. *Régularité de* $L^1(\mathbb{R}) \star L^\infty(\mathbb{R})$.

Soient f *et* g *deux fonctions appartenant respectivement à* $L^1(\mathbb{R})$ *et* $L^\infty(\mathbb{R})$.

La fonction $f \star g$ *(la convolée) est bien définie et est uniformément continue sur* $\mathbb{R}$.

Démonstration. • *$f \star g$ est définie sur $\mathbb{R}$.*

Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$|f(t)\, g(x-t)| \leq |f(t)|.$$

Comme $f \in L^1(\mathbb{R})$, il s'ensuit que $t \longmapsto f(t)\, g(x-t) \in L^1(\mathbb{R})$, donc la fonction $f \star g$ est bien définie sur $\mathbb{R}$.

- *Uniforme continuité de $f \star g$.*

  ⋆ Soit $\varepsilon > 0$. On commence par traiter le cas où $f \in \mathscr{C}_c^1(\mathbb{R})$. Soit M un majorant de $|f'|$ sur $\mathbb{R}$ (il existe car $|f'|$ est continue sur $\mathbb{R}$ et à support compact).

  Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $h \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} |(f \star g)(x+h) - (f \star g)(x)| &= \left| \int_{\mathbb{R}} f(t)\, g(x-t)\, \mathrm{d}t - \int_{\mathbb{R}} f(t)\, g(x+h-t)\, \mathrm{d}t \right| \\ &= \left| \int_{\mathbb{R}} f(x-t)\, g(t)\, \mathrm{d}t - \int_{\mathbb{R}} f(x+h-t)\, g(t)\, \mathrm{d}t \right|. \end{aligned}$$

  Or, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $|g(t)| \leq 1$, donc

$$|(f \star g)(x+h) - (f \star g)(x)| \leq \int_{\mathbb{R}} |f(x+h-t) - f(x-t)|\, \mathrm{d}t.$$

  L'inégalité des accroissements finis donne

$$|(f \star g)(x+h) - (f \star g)(x)| \leq M \int_{\mathrm{supp}(f)} |h| = M\lambda(\mathrm{supp}(f))\, |h|.$$

  Comme $M\lambda(\mathrm{supp}(f))\, |h|$ ne dépend pas de x et

$$\lim_{h \to 0} M\lambda(\mathrm{supp}(f))\, |h| = 0,$$

  on en déduit que $f \star g$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

  ⋆ On ne suppose plus $f \in \mathscr{C}_c^1(\mathbb{R})$. Soit $\varepsilon > 0$.

  D'après la proposition 2.1, il existe une fonction $\widetilde{f} \in \mathscr{C}_c^1(\mathbb{R})$ telle que

$$\left\| f - \widetilde{f} \right\|_1 = \int_{\mathbb{R}} \left| f(t) - \widetilde{f}(t) \right| \mathrm{d}t \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

  Comme pour tout $t \in \mathbb{R}$, $|g(t)| \leq 1$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} \left| (f \star g)(x) - \left(\widetilde{f} \star g\right)(x) \right| &= \left| \int_{\mathbb{R}} \left(f(t)\, g(x-t) - \widetilde{f}(t)\, g(x-t) \right) \mathrm{d}t \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} \left| f(x-t)\, g(t) - \widetilde{f}(x-t)\, g(t) \right| \mathrm{d}t \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} \left| f(x-t) - \widetilde{f}(x-t) \right| \mathrm{d}t \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3}. \end{aligned}$$

  Soit $x \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathbb{R}$. D'après l'inégalité triangulaire, on a

$$\begin{aligned} |(f \star g)(x+h) - (f \star g)(x)| \leq\ & \left| (f \star g)(x+h) - \left(\widetilde{f} \star g\right)(x+h) \right| \\ +\ & \left| \left(\widetilde{f} \star g\right)(x+h) - \left(\widetilde{f} \star g\right)(x) \right| \\ +\ & \left| \left(\widetilde{f} \star g\right)(x) - (f \star g)(x) \right|. \end{aligned}$$

Or,

$$\left|(f\star g)(x+h)-\left(\widetilde{f}\star g\right)(x+h)\right|\leq\frac{\varepsilon}{3}\quad\text{et}\quad\left|(f\star g)(x)-\left(\widetilde{f}\star g\right)(x)\right|\leq\frac{\varepsilon}{3},$$

on a donc

$$|(f\star g)(x+h)-(f\star g)(x)|\leq\frac{2\varepsilon}{3}+\left|\left(\widetilde{f}\star g\right)(x+h)-\left(\widetilde{f}\star g\right)(x)\right|.$$

Par uniforme continuité de $\widetilde{f}\star g$ (car $\widetilde{f}\in\mathscr{C}_c^1(\mathbb{R})$), il existe $\alpha>0$ (indépendant de x par uniforme continuité) tel que

$$(|h|\leq\alpha)\implies\left(\left|\left(\widetilde{f}\star g\right)(x+h)-\left(\widetilde{f}\star g\right)(x)\right|\leq\frac{\varepsilon}{3}\right).$$

On a montré que

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\alpha>0,\ \forall x\in\mathbb{R},\ \forall h\in\mathbb{R},\quad(|h|\leq\alpha)\implies(|(f\star g)(x+h)-(f\star g)(x)|\leq\varepsilon),$$

ainsi $f\star g$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

□

Nous prouvons le théorème 1.2.

Démonstration. Nous conservons les notations du théorème 1.2. Par convergence monotone, on a

$$\lim_{n\to+\infty}\lambda(A\cap[-n,n])=\lambda(A),$$

ainsi, quitte à considérer $A\cap[-n,n]$ avec $n\in\mathbb{N}^*$ tel que $\lambda(A\cap[-n,n])$ soit non nulle, on peut supposer que A est de mesure strictement positive et finie.

Soit f la fonction indicatrice de A définie par

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad f(x)=\begin{cases}1 & \text{si } x\in A\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}.$$

Soit aussi g la fonction indicatrice de $-A$.

D'après le lemme 2.2, la fonction $f\star g$ est définie sur $\mathbb{R}$ et uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

Comme les fonctions f et g sont positives, $f\star g$ l'est aussi. De plus,

$$(f\star g)(0)=\int_{\mathbb{R}}f(t)\,g(-t)\,\mathrm{d}t.$$

Or, pour tout $t\in\mathbb{R}$, $g(-t)=f(t)$ car $-t\in-A\iff t\in A$, ainsi

$$(f\star g)(0)=\int_{\mathbb{R}}f^2(t)\,\mathrm{d}t=\lambda(A)>0.$$

Par continuité de $f\star g$ (lemme 2.2), il existe $\varepsilon>0$ tel que

$$\forall x\in\left]-\varepsilon,\varepsilon\right[,\quad(f\star g)(x)>0.$$

Par le lemme 2.1, on en déduit

$$\left]-\varepsilon,\varepsilon\right[\subset\operatorname{supp}(f\star g)\subset A-A.$$

Cela prouve que $A-A$ contient un voisinage de 0.

□

2.2 la preuve de Stromberg

Lemme 2.3. *Régularité de la mesure de Lebesgue.*

Pour toute partie $A \subset \mathbb{R}$ mesurable de mesure finie, pour tout ε, il existe un compact K et un ouvert O tels que $K \subset A \subset O$ et tels que $\lambda(O \backslash K) \leq \varepsilon$.

Nous renvoyons la preuve du lemme 2.3 à [5].

Nous passons à la preuve de Stromberg et nous suivons son article [8].

Démonstration. D'après le lemme 2.3, il existe $K \subset A$ compact de mesure strictement positive.

Comme $K - K \subset A - A$, il suffit de prouver le théorème 1.2 pour K.

Toujours d'après le lemme 2.3, il existe un ouvert $O \subset \mathbb{R}$ tel que $\lambda(O) < 2\lambda(K)$.

Nous utiliserons le lemme suivant :

Lemme 2.4. *Avec les notations qui précèdent, il existe $\varepsilon > 0$ tel que*

$$K +]-\varepsilon, \varepsilon[\subset O.$$

Nous prouvons le lemme 2.4.

Démonstration. Comme $K \subset O$ et O est ouvert, pour tout $x \in K$, il existe $r_x > 0$ tel que $]x - r_x, x + r_x[\subset O$, de sorte que l'on ait

$$K \subset \bigcup_{x \in K}]x - r_x, x + r_x[\subset O.$$

Par la propriété de compacité de Borel-Lebesgue, il existe un nombre fini d'éléments de K, disons $x_1, \ldots, x_n$, tels que

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{n}]x_i - r_{x_i}, x_i + r_{x_i}[\subset O.$$

Toujours puisque O est ouvert et $]x_i - r_{x_i}, x_i + r_{x_i}[\subset O$, il existe $\varepsilon_i > 0$ tel que

$$]x_i - r_{x_i}, x_i + r_{x_i}[+]-\varepsilon_i, \varepsilon_i[\subset O. \tag{1}$$

Soit $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n\}$. On a alors $K +]-\varepsilon, \varepsilon[\subset O$.

En effet, soit $x \in K +]-\varepsilon, \varepsilon[$: il existe $y \in K$ et $z \in]-\varepsilon, \varepsilon[$ tels que $x = y + z$. Comme $K \subset \bigcup_{i=1}^{n}]x_i - r_{x_i}, x_i + r_{x_i}[$, il existe $j \in [\![1, n]\!]$ tel que $y \in \left]x_j - r_{x_j}, x_j + r_{x_j}\right[$. Par définition de ε, $z \in]-\varepsilon_j, \varepsilon_j[$.

En utilisant (1), on a $x \in O$.

□

On retourne à la preuve du théorème 1.2. Par le lemme 2.4, il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$K +]-\varepsilon, \varepsilon[\subset O.$$

Montrons maintenant que

$$]-\varepsilon, \varepsilon[\subset K - K,$$

ce qui terminera la preuve du théorème 1.2.

Soit $x \in]-\varepsilon, \varepsilon[$. Si $(x + K) \cap K = \varnothing$, comme $x + K \subset O$ et $K \subset O$, on aurait

$$\lambda(O) \geq \lambda((x + K) \cup K) = 2\lambda(K),$$

ce qui contredit le fait que $\lambda(O) < 2\lambda(K)$.

Ainsi, $(x + K) \cap K$ n'est pas vide : il existe $y \in K$ et $z \in K$ tels que

$$x + y = z \iff x = z - y.$$

Ainsi, $x \in K - K$ et $]-\varepsilon, \varepsilon[\subset K - K$.

□

3 Preuve du théorème de Denjoy-Lusin et un corollaire

Dans cette partie, nous prouvons le résultat principal et donnons un corollaire classique du théorème de Denjoy-Lusin.

3.1 Preuve du théorème de Denjoy-Lusin

Nous prouvons maintenant le théorème de Denjoy-Lusin.

Démonstration. On garde les mêmes notations que celles du théorème 1.1.

On commence par écrire

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R}, \quad a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) = \rho_n \sin(nx + \psi_n)$$

où $\rho_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$.

Soit $A := \left\{ x \in \mathbb{R},\ \sum_{n \geq 1} \rho_n \left|\sin(nx)\right| < +\infty \right\}$. Pour tout $(a, b) \in A^2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\sin(n(b-a)) = \sin((nb + \psi_n) - (na + \psi_n)) = \sin(nb + \psi_n)\cos(na + \psi_n) - \sin(na + \psi_n)\cos(nb + \psi_n).$$

Il s'ensuit que

$$\left|\sin(n(b-a))\right| \leq \left|\sin(nb + \psi_n)\right| + \left|\sin(na + \psi_n)\right|.$$

Comme les séries $\sum_{n \geq 1} \rho_n \left|\sin(nb + \psi_n)\right|$ et $\sum_{n \geq 1} \rho_n \left|\sin(na + \psi_n)\right|$ convergent, la série $\sum_{n \geq 1} \rho_n \left|\sin(n(b-a))\right|$ converge.

Ainsi, $E - E \subset A$. Par le théorème de Steinhaus, $E - E$, donc A, contient un intervalle ouvert non vide centré en 0, disons $]-\varepsilon, \varepsilon[$ avec $\varepsilon > 0$.

De plus, si l'on se donne $(a, b) \in A^2$, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \left|\sin(n(b-a))\right| \leq \left|\sin(nb)\right| + \left|\sin(na)\right|.$$

Ainsi, $A - A \subset A$. Une récurrence immédiate permet donc de montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad]-n\varepsilon, n\varepsilon[\subset A,$$

ce qui prouve que $A = \mathbb{R}$.

Soient $x \in \mathbb{R}$ et $y \in E$. On a

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \left|\sin(n(x+y) + \psi_n)\right| = \left|\sin(nx + ny + \psi_n)\right| \leq \left|\sin(nx)\right| + \left|\sin(ny + \psi_n)\right|.$$

Comme les séries $\sum_{n \geq 1} \rho_n \left|\sin(nx)\right|$ et $\sum_{n \geq 1} \rho_n \left|\sin(ny + \psi_n)\right|$ convergent, la série $\sum_{n \geq 1} \rho_n \left|\sin(n(x+y) + \psi_n)\right|$ converge. Ceci prouve que pour tout $x \in \mathbb{R}$, pour tout $y \in E \neq \varnothing$ (car E est de mesure strictement positive), $x + y \in E$. Il s'ensuit que $E = \mathbb{R}$.

□

3.2 Un corollaire classique

Corollaire 3.1. *Corollaire de Denjoy-Lusin.*

Les hypothèses sont les mêmes que celles du théorème 1.1. Alors, les séries $\sum_{n \geq 1} |a_n|$ *et* $\sum_{n \geq 1} |b_n|$ *convergent.*

La preuve de ce corollaire découle du théorème de Denjoy-Lusin. Certains auteurs mettent même la conclusion de ce corollaire 3.1 dans celle du théorème de Denjoy-Lusin.

Avant de prouver le corollaire 3.1, nous aurons besoin du lemme suivant :

Lemme 3.1. *Lemme de Riemann-Lebesgue.*

Pour tout $A \subset [0, 2\pi]$ *mesurable, on a*

$$\lim_{n \to +\infty} \int_A \cos(nx)\,\mathrm{d}x = \lim_{n \to +\infty} \int_A \sin(nx)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Nous prouvons le lemme 3.1.

Démonstration. On montre que $\lim_{n\to+\infty}\int_A \cos(nx)\,\mathrm{d}x = 0$. Un même raisonnement montre que $\lim_{n\to+\infty}\int_A \sin(nx)\,\mathrm{d}x = 0$.

Soit $\varepsilon > 0$. Par régularité de la mesure de Lebesgue sur $[0,2\pi]$ (lemme 2.3), il existe un ouvert O de $[0,2\pi]$ tel que $A \subset O$ et $\lambda(O\backslash A) \leq \varepsilon$. Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left|\int_A \cos(nx)\,\mathrm{d}x - \int_O \cos(nx)\,\mathrm{d}x\right| \leq \int_{O\backslash A} |\cos(nx)|\,\mathrm{d}x \leq \varepsilon.$$

Ainsi, il suffit de montrer que

$$\lim_{n\to+\infty}\int_O \cos(nx)\,\mathrm{d}x = 0.$$

On écrit

$$O = \bigcup_{i\in\mathbb{N}}]a_i, b_i[$$

où les $]a_i, b_i[$ sont éventuellement vides et deux à deux disjoints. On renvoie à [5] pour la preuve de ce fait.

Soit $0 < \varepsilon < \lambda(O)$. Comme $\lim_{n\to+\infty}\lambda\left(\bigcup_{k=0}^{n}]a_k, b_k[\right) = \lambda(O)$, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\lambda\left(\bigcup_{k=p+1}^{+\infty}]a_k, b_k[\right) \leq \varepsilon$ de sorte que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left|\int_{\bigcup_{k=p+1}^{+\infty}]a_k, b_k[} \cos(nx)\,\mathrm{d}x\right| \leq \varepsilon.$$

De plus, comme

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \int_{\bigcup_{i=0}^{p}]a_i, b_i[} \cos(nx)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{p}\left(\sin(b_i) - \sin(a_i)\right).$$

On a donc

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{\bigcup_{i=0}^{p}]a_i, b_i[} \cos(nx)\,\mathrm{d}x = 0,$$

ce qui permet de conclure que

$$\lim_{n\to+\infty}\int_O \cos(nx)\,\mathrm{d}x = 0.$$

□

Nous prouvons maintenant le corollaire 3.1.

Démonstration. On garde les notations de la preuve du théorème 1.1.

Soit $S(x) := \sum_{n=1}^{+\infty} \rho_n |\sin(nx)|$.

D'après la preuve du théorème 1.1 de Denjoy-Lusin, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $S(x) < +\infty$.

S est une fonction mesurable car c'est une limite simple de fonctions continues, donc mesurables.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$A_k := \{x \in [0,2\pi],\ S(x) \leq k\}.$$

On a $\bigcup_{k\in\mathbb{N}^*} A_k = [0,2\pi]$. Comme $\lambda([0,2\pi]) > 0$, il existe $j \in \mathbb{N}^*$ tel que $\lambda(A_j) > 0$.

En effet, si un tel entier n'existait alors pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on aurait $\lambda(A_k) = 0$. On aurait donc $\lambda([0,2\pi]) = 0$ car une réunion dénombrable d'ensembles négligeables est négligeable, ce qui est exclut.

En utilisant le théorème de Fubini, on peut donc écrire :

$$\begin{aligned} j\lambda(A_j) &\geq \int_{A_j} S(x)\,\mathrm{d}x \\ &\geq \int_{A_j} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \rho_n \left|\sin(nx)\right|\right)\mathrm{d}x \\ &\geq \sum_{n=1}^{+\infty} \rho_n \int_{A_j} \sin^2(nx)\,\mathrm{d}x \\ &\geq \sum_{n=n_0}^{+\infty} \rho_n \int_{A_j} \sin^2(nx)\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

où n_0 est un entier naturel non nul qui sera fixé plus tard.

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_{A_j} \sin^2(nx)\,\mathrm{d}x = \int_{A_j} \frac{1-\cos(2nx)}{2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\lambda(A_j) - \frac{1}{2}\int_{A_j} \cos(2nx)\,\mathrm{d}x.$$

D'après le lemme de Riemann-Lebesgue (lemme 3.1), on a

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\lambda(A_j) - \frac{1}{2}\int_{A_j}\cos(2nx)\,\mathrm{d}x\right) = \frac{1}{2}\lambda(A_j),$$

ainsi, il existe un entier naturel N tel que : pour tout $n \geq n_0$

$$\frac{1}{2}\lambda(A_j) - \frac{1}{2}\int_{A_j}\cos(2nx)\,\mathrm{d}x \geq \frac{1}{4}\lambda(A_j).$$

On fixe $n_0 = N$. Il s'ensuit que l'on a

$$j\lambda(A_j) \geq \frac{1}{4}\lambda(A_j)\sum_{n=n_0}^{+\infty}\rho_n \iff 4j \geq \sum_{n=n_0}^{+\infty}\rho_n.$$

Ainsi, la série $\sum_{n\geq 1}\rho_n$ converge. Ceci prouve aussi que les séries $\sum_{n\geq 1}|a_n|$ et $\sum_{n\geq 1}|b_n|$ convergent.

□

Références

[1] J. Arbault, *Sur l'ensemble de convergence absolue d'une série trigonométrique.* Bulletin de la S.M.F., tome 80, pp. 253-317, 1952.

[2] N.K. Bary, *A Treatise on Trigonometric Series : Volume* 1. Pergamon, Press Limited, Oxford, England, 1964.

[3] A. Denjoy, *Sur l'absolue convergence des séries trigonométriques*, CR, 156, pp. 135-136, 1912.

[4] N. N. Lusin, *Concerning the absolute convergence of trigonometric series* (en russe), Collected Works. Vol. I, pp. 31-40, 1912.

[5] W. Rudin, *Analyse réelle et complexe.* Dunod, 3ème édition, 2009.

[6] M. Sierpinski, *Sur un problème de M. Lusin*, Giornale di Mathematiche, 1917.

[7] H. Steinhaus, *Sur les distances des points des ensembles de mesure positive*, Fund. Math. 1, 1920, pp. 93-104.

[8] K. Stromberg, *An Elementary Proof of Steinhaus's Theorem*, Proc. Amer. Math. Soc., vol. 36, no. 1, 1972 pp. 308.

[9] A. Weyl, *L'intégration dans les groupes topologiques et ses applications*, 2ième éd., Actualités Sei. Indust., no. 869, Hermann, Paris, 1951.