Une nouvelle preuve d'un théorème de Riesz-Fischer

Erik Thomas *

Résumé

Dans cet article, nous donnons une nouvelle preuve d'un théorème de Riesz-Fischer qui montre que l'application, qui à une fonction de $L^2(\mathbb{T})$, associe la suite des coefficients de Fourier dans $\ell^2(\mathbb{Z})$, est un isomorphisme isométrique.

Les preuves usuelles utilisent souvent la théorie générale des espaces de Hilbert. Notre approche utilise les distributions et les espaces de Sobolev.

Mots clés : Séries trigonométriques, séries de Fourier, distributions, espaces de Sobolev

1 Introduction

La théorie des séries de Fourier est née principalement au 19$^{\text{ème}}$ siècle avec la motivation première de résoudre des équations aux dérivées partielles de la physique. Déjà en 1807, Fourier a l'idée de développer des fonctions 2π-périodiques en séries de cos et sin sans se préoccuper des problèmes de convergence pour résoudre l'équation de la chaleur.

Il faut attendre Dirichlet en 1829 pour voir les preuves rigoureuses des travaux de Fourier et les premiers résultats de convergence.

On note $\mathbb{T} := \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ que l'on peut assimiler à $[-\pi, \pi[$. $L^2(\mathbb{T})$ est l'ensemble des (classes de) fonctions mesurables f (pour la mesure de Lebesgue) à valeurs complexes telles que $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 \,\mathrm{d}t < +\infty$. On définit alors le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sur $L^2(\mathbb{T})$ par :

$$\forall (f, g) \in L^2(\mathbb{T})^2, \quad \langle f, g \rangle := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \overline{g(t)} \mathrm{d}t.$$

$L^2(\mathbb{T})$ muni de ce produit scalaire est alors un espace de Hilbert ; on note $\|\cdot\|_{L^2(\mathbb{T})}$ la norme associée.

Si $f \in L^2(\mathbb{T})$, on définit ses coefficients de Fourier par :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad c_n(f) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt} \mathrm{d}t.$$

Si f prend des valeurs réelles, alors on peut préférer utiliser les coefficients de Fourier réels définis par :

$$a_0(f) := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad b_0(f) := 0$$

et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n(f) := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt) \,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad b_n(f) := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt) \,\mathrm{d}t.$$

Il est alors facile de vérifier les relations suivantes :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n(f) = c_n(f) + c_{-n}(f) \quad \text{et} \quad b_n(f) = \mathrm{i}\left(c_n(f) - c_{-n}(f)\right).$$

La série de Fourier d'ordre $n \in \mathbb{N}$ de f est alors

$$S_n(f)(x) := \sum_{k=-n}^{n} c_k(f) \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left(a_k(f) \cos(kx) + b_k(f) \sin(kx)\right).$$

* `erik.thomas@ens-rennes.fr`

Géométriquement, $S_n(f)$ est le projeté orthogonal de f (pour le produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$) sur l'espace vectoriel $\mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}\left(x \longmapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx},\ k \in [\![-n,n]\!]\right) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}\left(x \longmapsto \cos(kx),\ x \longmapsto \sin(kx),\ k \in [\![0,n]\!]\right)$.

Un résultat important en ce sens est le suivant :

Théorème 1.1. *Convergence des suites partielles.*

Soit $f \in L^2(\mathbb{T})$. Alors, la suite $(S_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f dans $L^2(\mathbb{T})$, i.e.

$$\lim_{n\to+\infty} \|S_n(f) - f\|_{L^2(\mathbb{T})} = 0.$$

Une preuve classique de ce résultat utilise le théorème de Weierstrass trigonométrique (densité des polynômes trigonométriques).

Les résultats les plus difficiles sont lorsque l'on pose les questions de convergence uniforme ou presque partout ; on peut mentionner le théorème de Dirichlet qui traite le cas des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ ou plus récemment (1966) le difficile théorème de Carleson qui montre que la série de Fourier d'une fonction appartenant à $L^2(\mathbb{T})$ converge presque-partout vers f. Son résultat a ensuite généralisé aux fonctions de $L^p(\mathbb{T})$ avec $p > 1$. Le cas $p = 1$ est pathologique : A. Kolmogorov a construit des fonctions de $L^1(\mathbb{T})$ dont la série de Fourier diverge partout.

On définit $\ell^2(\mathbb{N})$ (resp. $\ell^2(\mathbb{Z})$) par :

$$\ell^2(\mathbb{N}) := \left\{(c_n)_{n\in\mathbb{N}},\ \sum_{n\in\mathbb{N}} |c_n|^2 < +\infty\right\} \quad \text{resp. } \ell^2(\mathbb{Z}) := \left\{(c_n)_{n\in\mathbb{Z}},\ \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|^2 < +\infty\right\}.$$

On munit $\ell^2(\mathbb{N})$ (resp. $\ell^2(\mathbb{Z})$) du produit scalaire suivant $\langle\cdot,\cdot\rangle$:

$$\forall (u,v) \in \ell^2(\mathbb{N})^2, \quad \langle u,v\rangle := \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \overline{v_n} \quad \text{resp. } \forall (u,v) \in \ell^2(\mathbb{Z})^2, \quad \langle u,v\rangle := \sum_{n=-\infty}^{+\infty} u_n \overline{v_n}.$$

$\ell^2(\mathbb{N})$ (resp. $\ell^2(\mathbb{Z})$) muni de ce produit scalaire est alors un espace de Hilbert.

Le théorème de Parseval permet de faire un lien entre $L^2(\mathbb{T})$ et $\ell^2(\mathbb{Z})$:

Théorème 1.2. *Théorème de Parseval.*

L'application

$$\iota : \begin{cases} L^2(\mathbb{T}) & \longrightarrow \ell^2(\mathbb{Z}) \\ f & \longmapsto (c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}} \end{cases}$$

est linéaire et isométrique, i.e.

$$\forall f \in L^2(\mathbb{T}), \quad \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 \,\mathrm{d}t = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2.$$

Si f est à valeurs réelles et si l'on utilise les coefficients $a_n(f)$ et $b_n(f)$, la relation précédente se réécrit en :

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)^2 \,\mathrm{d}t = \frac{1}{4}a_0(f)^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n(f)^2 + b_n(f)^2\right).$$

La preuve de ce résultat est très classique (voir [1]). Une question est alors naturelle : l'application ι est-elle surjective ? Le théorème de Riesz-Fischer répond à l'affirmative à cette question.

Théorème 1.3. *Théorème de Riesz-Fischer.*

L'application ι est un isomorphisme isométrique entre les espaces de Hilbert $L^2(\mathbb{T})$ et $\ell^2(\mathbb{Z})$.

Ce résultat a été prouvé en 1907 indépendamment par F. Riesz et E. S. Fischer ; Fischer l'a d'ailleurs prouvé en utilisant la complétude des espaces L^p $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$. Ce résultat porte aussi le nom de « théorème de Riesz-Fischer » !

Si l'on admet le théorème 1.2, il suffit de montrer la surjectivité de l'application ι.

Dans cette article, nous donnons une nouvelle preuve « anachronique » car notre approche utilise les distributions et les espaces de Sobolev.

Dans la partie 2, nous faisons quelques rappels sur les distributions et les espaces de Sobolev et dans la partie 3, nous prouvons le théorème 1.3.

2 Quelques rappels sur les distributions et les espaces de Sobolev

2.1 Sur les distributions

Dans cette sous-partie, nous faisons les quelques rappels dont on aurons besoin pour introduire les espaces de Sobolev et prouver la proposition 1.3. Nous renvoyons à [1] pour un exposé complet.

Cette sous-partie est largement inspirée de [4].

2.1.1 Généralités

Soit Ω un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$. On définit l'espace vectoriel réel $\mathscr{D}(\Omega)$ des fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ à support compact inclus dans Ω et, si K est un compact inclus dans Ω, $\mathscr{D}(K)$ l'ensemble de ces fonctions dont le support est inclus dans K. Il n'est pas évident, même pour $n = 1$, que cet espace vectoriel n'est pas réduit à $\{0\}$. C'est un exercice classique de montrer que la fonction $\widetilde{\rho}$ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\widetilde{\rho}(x) := \begin{cases} \mathrm{e}^{-1/x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$$

est une fonction $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. On remarque que la fonction définie sur $\mathbb{R}^n$ par

$$\rho(x) := \widetilde{\rho}\left(1 - \|x\|^2\right)$$

est $\mathscr{C}^\infty$ avec un support $\operatorname{supp}(\rho) = B'(0,1)$. On rappelle que le support $\operatorname{supp}(\rho)$ d'une fonction est l'adhérence de l'ensemble $\{x \in \mathbb{R}^n \; ; \; \rho(x) \neq 0\}$. Avant de donner la définition d'une distribution, on donne la

Définition 2.1. *Multi-indice.*

Soit $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. On appelle multi-indice tout élément $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$. Ces éléments fournissent des notations commodes pour les monômes et les dérivées partielles :

$$\begin{aligned} x^\alpha &= x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} \; ; \\ \partial_i &= \partial / \partial x_i \; ; \\ \partial^\alpha f &= \partial_1^{\alpha_1} \cdots \partial_n^{\alpha_n} f = \frac{\partial^{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}. \end{aligned}$$

La notation ci-dessus doit être reservée pour les fonctions dont on sait que l'ordre de dérivation n'intervient pas : c'est heureusement le cas des fonctions $\mathscr{C}^\infty$ (lemme de Schwarz).

L'entier $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ est noté $|\alpha|$ et est appelé la longueur du multi-indice α.

Définition 2.2. *Distribution.*

Soit $T : \mathscr{D}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ une application linéaire. On dit que T est une distribution sur l'ouvert Ω si elle satisfait la propriété de continuité suivante : pour tout compact K de Ω, il existe un entier naturel p et une constante C tels que

$$\forall \varphi \in \mathscr{D}(K), \quad |T(\varphi)| \leqslant C \sup_{\substack{x \in K \\ |\alpha| \leqslant p}} |\partial^\alpha \varphi(x)|. \tag{1}$$

On note $\mathscr{D}'(\Omega)$ l'ensemble des distributions sur Ω.

La notation $T(\varphi)$ est communément remplacée par la notation $\langle T, \varphi \rangle$, que l'on utilisera dans toute la suite.

Donnons des exemples de distributions.

Exemple 1. Soit $a \in \mathbb{R}^n$. On définit l'application δ_a par

$$\forall \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n), \quad \langle \delta_a, \varphi \rangle := \varphi(a).$$

Il est clair que δ_a est linéaire et que $|\langle \delta_a, \varphi \rangle| \leqslant \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |\varphi(x)|$. Ainsi, δ_a est une distribution sur $\mathbb{R}^n$.

Exemple 2. On note

$$L^1_{\text{loc}}(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R} \text{ mesurable telle que pour tout compact } K \subset \Omega,\ \int_K |f| < +\infty \right\}.$$

À toute fonction $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, on associe une application T_f définie par

$$\forall \varphi \in \mathscr{D}(\Omega), \quad \langle T_f, \varphi \rangle := \int f(x)\, \varphi(x)\, \mathrm{d}x.$$

Il est facile de voir que T_f est linéaire et que pour tout compact K de Ω et pour tout φ appartenant à $\mathscr{D}(K)$

$$|\langle T_f, \varphi \rangle| \leqslant \left(\int_K |f(x)|\, \mathrm{d}x \right) \left(\sup_{x \in K} |\varphi(x)| \right).$$

Par conséquent, T_f est une distribution sur Ω.

2.1.2 Lemme de du Bois-Reymond

Lemme 2.1. *Lemme de du Bois-Reymond.*

Soient Ω un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$ et $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ tels que pour tout $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$, $\int f\varphi = 0$. Alors $f = 0$ presque-partout sur Ω.

Démonstration. Si Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, on utilisera la densité de $\mathscr{D}(\Omega)$ dans $L^1(\Omega)$: pour toute fonction $g \in L^1(\Omega)$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $g_\varepsilon \in \mathscr{D}(\Omega)$ telle que $\|g - g_\varepsilon\|_{L^1(\Omega)} \leqslant \varepsilon$.

Soit $\omega \subset \Omega$ ouvert tel que $\overline{\omega}$ soit compact et inclus dans Ω. Soit $\widetilde{f} = f_{|\omega}$. Soit $\varepsilon > 0$. Comme $\widetilde{f} \in L^1(\omega)$, il existe $g_\varepsilon \in \mathscr{D}(\omega)$ telle que $\|\widetilde{f} - g_\varepsilon\|_{L^1(\omega)} \leqslant \varepsilon$. On a :

$$\forall \varphi \in \mathscr{D}(\omega), \quad \int_\omega g_\varepsilon \varphi = \int_\omega \left(g_\varepsilon - \widetilde{f} \right) \varphi + \int_\omega \widetilde{f} \varphi = \int_\omega \left(g_\varepsilon - \widetilde{f} \right) \varphi + 0$$

car $\int_\omega \widetilde{f}\varphi = \int_\Omega f\varphi = 0$. On en déduit

$$\left| \int_\omega g_\varepsilon \varphi \right| \leqslant \int_\omega \left| g_\varepsilon - \widetilde{f} \right| \times |\varphi| \leqslant \varepsilon \|\varphi\|_{L^\infty(\omega)}. \tag{2}$$

Soit $\alpha > 0$. On pose $\varphi := \frac{g_\varepsilon}{\sqrt{\alpha^2 + g_\varepsilon^2}} \in \mathscr{D}(\omega)$. On a $\|\varphi\|_{L^\infty(\omega)} \leqslant 1$ et $g_\varepsilon \varphi = \frac{g_\varepsilon^2}{\sqrt{\alpha^2 + g_\varepsilon^2}}$ et donc, d'après (2),

$$\forall \alpha > 0, \quad \int_\omega \frac{g_\varepsilon^2}{\sqrt{\alpha^2 + g_\varepsilon^2}} \leqslant \varepsilon.$$

On applique le théorème de convergence dominée pour obtenir

$$\int_\omega |g_\varepsilon| = \lim_{\alpha \to 0} \int_\omega \frac{g_\varepsilon^2}{\sqrt{\alpha^2 + g_\varepsilon^2}} \leqslant \varepsilon,$$

puis

$$\|\widetilde{f}\|_{L^1(\omega)} \leqslant \|\widetilde{f} - g_\varepsilon\|_{L^1(\omega)} + \|g_\varepsilon\|_{L^1(\omega)} \leqslant \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

Donc $\|\widetilde{f}\|_{L^1(\omega)} = 0$, ce qui entraîne que $\widetilde{f}$ est nulle presque-partout sur ω. Ceci étant vrai pour tout ouvert $\omega \subset \Omega$ relativement compact, on a montré que f est nulle presque-partout sur Ω.

□

Remarque 1. Soit Ω un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$ et soit l'application

$$T : \begin{cases} L^1_{\text{loc}}(\Omega) & \longrightarrow \mathscr{D}'(\Omega) \\ f & \longmapsto T_f \end{cases},$$

où T_f est la distribution définie à l'exemple 2.

Il est clair que T est linéaire. Le lemme 2.1 assure que le noyau de T est réduit à $\{0\}$, ainsi T est injective. Cela nous autorise, et nous le ferons systématiquement par la suite, à assimiler une fonction $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ à sa distribution naturellement associée T_f.

2.1.3 Dérivation d'une distribution, suites de distributions

Définition 2.3. *Convergence de distributions.*

Soit $(T_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de distributions de $\mathscr{D}'(\Omega)$. Soit $T\in\mathscr{D}'(\Omega)$.

On dit que la suite de distributions $(T_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers T au sens des distributions si pour tout $\varphi\in\mathscr{D}(\Omega)$, on a

$$\lim_{k\to+\infty}\langle T_k,\varphi\rangle=\langle T,\varphi\rangle.$$

Exemple 3. Soit f_k la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_k(x):=\cos(kx)$. Montrons que la suite de distributions $(f_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ converge vers la distribution nulle. Pour tout $\varphi\in\mathscr{D}(\mathbb{R})$, on a

$$\begin{aligned}\langle f_k,\varphi\rangle &= \int\cos(kx)\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x\\ &= -\frac{1}{k}\int\sin(kx)\,\varphi'(x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{par intégration par parties.}\end{aligned}$$

On recupère donc

$$|\langle f_k,\varphi\rangle|\leqslant\frac{1}{k}\int|\varphi'(x)|\,\mathrm{d}x,$$

et

$$\lim_{k\to+\infty}\langle f_k,\varphi\rangle=0.$$

Définition 2.4. *Dérivation d'une distribution.*

Soit $T\in\mathscr{D}'(\Omega)$. Pour $i\in\{1,\dots,n\}$ et $\alpha\in\mathbb{N}^n$ un multi-indice, on définit les applications linéaires ∂_iT et $\partial^\alpha T$ par : pour tout $\varphi\in\mathscr{D}(\Omega)$

$$\langle\partial_iT,\varphi\rangle:=-\langle T,\partial_i\varphi\rangle \qquad \textit{et} \qquad \langle\partial^\alpha T,\varphi\rangle:=(-1)^\alpha\langle T,\partial^\alpha\varphi\rangle.$$

Il faut vérifier que ces applications vérifient la propriété de continuité (1). Par exemple, pour ∂_iT,

$$\begin{aligned}|\langle\partial_iT,\varphi\rangle| &= |\langle T,\partial_i\varphi\rangle|\\ &\leqslant C\sup_{\substack{x\in K\\|\alpha|\leqslant p}}\left|\partial^\alpha\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(x)\right|\\ &\leqslant C\sup_{\substack{x\in K\\|\beta|\leqslant p+1}}\left|\partial^\beta\varphi(x)\right|.\end{aligned}$$

Ainsi ∂_iT vérifie la propriété de continuité (1) et ∂_iT est bien une distribution sur Ω. On procède de même pour montrer que $\partial^\alpha T$ est une distribution sur Ω.

Il est facile de voir que la dérivation est une opération linéaire sur $\mathscr{D}'(\Omega)$, i.e. si T_1 et T_2 sont deux éléments de $\mathscr{D}'(\Omega)$ et $\lambda\in\mathbb{R}$ alors, pour tout multi-indice $\alpha\in\mathbb{N}^n$, on a

$$\partial^\alpha(T_1+\lambda T_2)=\lambda\partial^\alpha T_1+\partial^\alpha T_2.$$

Remarque 2. Il est facile de montrer que si $f:\Omega\longrightarrow\mathbb{R}$ est une fonction de classe ad hoc sur Ω, alors les dérivées partielles ∂_if au sens classique et au sens des distributions coïncident.

Exemple 4. Soit H la fonction de Heaviside définie par

$$H(x):=\begin{cases}1 & \text{si } x\geqslant 0\\ 0 & \text{si } x<0\end{cases}.$$

Calculons la dérivée de H au sens des distributions. Pour tout $\varphi\in\mathscr{D}(\mathbb{R})$, on a

$$\langle H',\varphi\rangle=-\langle H,\varphi'\rangle=-\int_{\mathbb{R}}H(x)\,\varphi'(x)\,\mathrm{d}x=-\int_0^{+\infty}\varphi'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Comme $\varphi'\in\mathscr{D}(\mathbb{R})$, on a $\lim_{x\to+\infty}\varphi'(x)=0$, puis

$$\langle H',\varphi\rangle=-[\varphi(x)]_0^{+\infty}=\varphi(0).$$

Cela signifie que $H'=\delta_0$.

La proposition suivante est fondamentale : la dérivation est une opération continue dans $\mathscr{D}'(\Omega)$.

Proposition 2.1. *Soient $(T_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathscr{D}'(\Omega)$ et $T \in \mathscr{D}'(\Omega)$. On suppose que la suite $(T_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers T au sens des distributions.*

Alors, pour tout multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^n$, la suite $(\partial^\alpha T_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers $\partial^\alpha T$ au sens des distributions.

Démonstration. Pour tout $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$, on a

$$\langle \partial^\alpha T_k, \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T_k, \partial^\alpha \varphi\rangle .$$

Or $\lim\limits_{k\to+\infty} (-1)^{|\alpha|} \langle T_k, \partial^\alpha \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, \partial^\alpha \varphi\rangle$. Comme $(-1)^{|\alpha|} \langle T, \partial^\alpha \varphi\rangle = \langle \partial^\alpha T, \varphi\rangle$, on récupère

$$\lim_{k\to+\infty} \langle \partial^\alpha T_k, \varphi\rangle = \langle \partial^\alpha T, \varphi\rangle .$$

□

Remarque 3. La proposition précédente s'applique en particulier au série de distributions : si la série $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} T_k$ converge au sens des distributions (c'est-à-dire que la suite des sommes partielles convergent au sens des distributions), alors pour tout multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^n$, on a

$$\partial^\alpha \left(\sum_{k=1}^{+\infty} T_k\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} \partial^\alpha T_k.$$

2.2 Espaces de Sobolev

Dans cette sous-partie, nous définissons les espaces de Sobolev et énonçons les résultats dont nous aurons besoin pour prouver la proposition 1.3. Nous renvoyons à [2] pour les preuves. Voir aussi [1].

Toutes les dérivées considérées dans cette sous-partie sont au sens des distributions.

Définition 2.5. *Espaces de Sobolev.*

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ non vide. Soit $p \leqslant 1 \leqslant \infty$. On définit $W^{1,p}(I)$ par

$$W^{1,p}(I) := \left\{f \in L^p(I),\ f' \in L^p(I)\right\}.$$

On munit $W^{1,p}(I)$ de la norme

$$\forall u \in W^{1,p}(I), \quad \|u\|_{W^{1,p}(I)} := \|u\|_{L^p(I)} + \left\|u'\right\|_{L^p(I)} .$$

$W^{1,p}(I)$ muni de cette norme est alors un espace de Banach ; lorsque $p = 2$ c'est même un espace de Hilbert noté $H^1(I)$.

Les espaces de Sobolev sont des espaces bien adaptés à la recherche de solutions faibles à certaines équations aux dérivées partielles. Nous ne développons pas cette idée ici et nous renvoyons à [2].

La proposition suivante permet de montrer que les éléments de $W^{1,p}(I)$ jouissent d'une certaine régularité :

Proposition 2.2. *Théorème fondamental dans les espaces de Sobolev.*

Soit $u \in W^{1,p}(I)$. Il existe $\widetilde{u} \in \mathscr{C}^0(\mathrm{adh}(I))$ (adh(I) est l'adhérence de I) telle que :

$$u = \widetilde{u} \quad \textit{presque-partout sur } I$$

et

$$\forall (x,y) \in \mathrm{adh}(I), \quad \widetilde{u}(x) - \widetilde{u}(y) = \int_y^x u'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Dans la prochaine proposition, nous utiliserons systématiquement le représensant continu d'un élément de $W^{1,p}(I)$.

Proposition 2.3. *Intégration par parties.*

Soient $(u,v) \in W^{1,p}(I)$. Alors, on a la formule d'intégration par parties suivante :

$$\forall (x,y) \in \mathrm{adh}(I)^2, \quad \int_y^x u'(t)\,v(t)\,\mathrm{d}t = [u(t)\,v(t)]_y^x - \int_y^x u(t)\,v'(t)\,\mathrm{d}t.$$

3 Preuve du résultat principal

Les preuves usuelles du théorème 1.3 utilise de manière cruciale la notion de base hilbertienne. Même si la trame de la preuve reste la même, l'usage des distributions et des espaces de Sobolev évite cette utilisation.

Démonstration. • Soit $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une suite de $\ell^2(\mathbb{Z})$. Soit aussi

$$\forall N \in \mathbb{N}, \quad f_N(x) := \sum_{k=-N}^{N} c_k \mathrm{e}^{ikx}.$$

Un simple calcul donne

$$\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2 \text{ tel que } n \leqslant p, \quad \|f_n - f_p\|_{L^2(\mathbb{T})} = \sum_{k=n}^{p} \left(|c_k|^2 + |c_{-k}|^2 \right).$$

Comme la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|^2$ converge, on en déduit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans le Banach $L^2(\mathbb{T})$: elle converge. On note f sa limite. Ainsi, on a :

$$f(x) \underset{L^2(\mathbb{T})}{=} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \mathrm{e}^{inx}. \tag{3}$$

• Les fonctions $\Re(f)$ et $\Im(f)$ sont dans $L^2(\mathbb{T})$ et à valeurs réelles, ainsi la linéarité de ι assure que l'on peut supposer f à valeurs réelles. On fait cette hypothèse dans la suite de la preuve. La ligne (3) se réécrit en

$$f(x) \underset{L^2(\mathbb{T})}{=} \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \right).$$

• Soit $F(x) := \frac{a_0}{2}x + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(-\frac{b_n}{n}\cos(nx) + \frac{a_n}{n}\sin(nx) \right)$ définie sur $[-\pi, \pi[$. Par Cauchy-Schwarz, les séries de termes généraux $\left(\frac{b_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $\left(\frac{a_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont absolument convergentes, donc F est bien définie, continue sur $[-\pi, \pi[$, bornée et 2π-périodique. En particulier, $F \in L^2(\mathbb{T})$.
D'après la proposition 2.1, la dérivée de F au sens des distributions est

$$F'(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \right) = f(x).$$

Ainsi, $F \in H^1(\mathbb{T})$. Par convergence normale, on a

$$\begin{aligned}
\forall N \in \mathbb{N}^*, \quad a_N(F) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(t)\cos(Nt)\,\mathrm{d}t \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \left(-\frac{b_n}{n}\cos(nt) + \frac{a_n}{n}\sin(nt) \right) \cos(Nt)\,\mathrm{d}t \\
&= -\frac{b_N}{N}.
\end{aligned}$$

Un calcul analogue montre que

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, \quad b_N(F) = \frac{a_N}{N}.$$

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. En utilisant la proposition 2.3, on a

$$\begin{aligned}
-\frac{b_N}{N} &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(t)\cos(Nt)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\left[\frac{1}{N} F(t)\sin(Nt) \right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{N}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(Nt)\,\mathrm{d}t \right) \\
&= -\frac{1}{N} b_N(f).
\end{aligned}$$

On en déduit que $b_N = b_N(f)$. Un calcul analogue montre que $a_N = a_N(f)$.
Pour calculer $a_0(f)$, on utilise la proposition 2.2 :

$$a_0(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F'(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\left(F\left(\pi^-\right) - F(-\pi)\right) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{a_0}{2}\pi - \frac{a_0}{2}(-\pi)\right) = \frac{a_0}{2}.$$

□

Références

[1] J.-M. Bony, *Cours d'analyse-Théorie des distributions et analyse de Fourier*. Les éditions de l'École Polytechnique, 2001.

[2] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle*. Dunod, 2005.

[3] W. Rudin, *Analyse réelle et complexe*. Dunod, 3ème édition, 2009.

[4] E. Thomas, *Distributions et séries trigonométriques*. RMS, numéro 130-1, 2019.

[5] A. Zygmund, *Trigonometric Series*. Cambridge Press University, Cambridge, England, 1979.