Sur le semi-groupe d'Ornstein-Uhlenbeck

Erik Thomas *

Résumé

Le but de cet article est de présenter le semi-groupe d'Ornstein-Uhlenbeck. Nous montrons son utilité pour aborder des inégalités classiques et importantes d'Analyse comme l'inégalité de Hölder, les inégalités de convolution de Young et les inégalités de Brascamp-Lieb qui généralisent les deux précédentes.

Enfin, nous donnons une inégalité de Sobolev logarithmique pour la mesure gaussienne.

Mots clés : semi-groupe d'Ornstein-Uhlenbeck, loi normale, inégalité de Brascamp-Lieb, entropie, inégalité de type log-Sobolev

1 Introduction

Le but de cet article est donner quelques applications du semi-groupe d'Ornstein-Uhlenbeck.

Le semi-groupe d'Ornsetin-Uhlenbeck est généralement défini comme la solution de l'équation aux dérivées partielles elliptique suivante :

$$\forall t > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \frac{\partial F(t,x)}{\partial t} = \Delta P_t(x) - x \cdot \nabla P_t(x) \quad \text{et} \quad P_0 = f$$

où f est donnée.

Nous n'adoptons pas cette approche ici et nous directement l'expression explicite de la solution (valable avec de « bonnes hypothèses » sur f) :

$$\forall t \geq 0,\ \forall x \in \mathbb{R}, \quad P_t(f)(x) = \int_{\mathbb{R}} f\left(\mathrm{e}^t x + \sqrt{1-\mathrm{e}^{-2t}}\, y\right) \mathrm{d}\gamma_1(y)$$

où γ_1 est la mesure gaussienne centrée réduite définie par

$$\mathrm{d}\gamma_1(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-x^2/2} \mathrm{d}x.$$

Dans la partie 2, nous étudions les propriétés de l'opérateur P_t et en particulier, nous montrons la propriété de semi-groupe :

$$\forall (t,s) \in (\mathbb{R}_+)^2, \quad P_t \circ P_s = P_{t+s}.$$

Dans la partie 3, nous retrouvons certaines inégalités classiques d'Analyse.

Dans la sous-partie 3.1, nous retrouvons la célèbre inégalité de Hölder. Le lecteur sera peut-être déçu que l'on retrouve « seulement » l'inégalité de Hölder. En fait, nous indiquons comment la preuve peut s'adapter pour prouver les inégalités de Brascamp-Lieb (voir [2]) qui généralisent l'inégalité de Hölder les inégalités de convolution de Young.

Théorème 1.1. *Inégalité de Brascamp-Lieb.*

$\mathbb{R}^n$ est muni de son produit scalaire canonique et de la norme associée. Soit $u_1, \ldots, u_m$ des vecteurs unitaires de $\mathbb{R}^n$ et $c_1, \ldots, c_m$ des réels strictements positifs tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad x = \sum_{i=1}^{m} c_i \langle x, u_i \rangle u_i. \tag{1}$$

Alors pour toutes fonctions $f_1, \ldots, f_m$ définies sur $\mathbb{R}$, à valeurs positives, intégrables, on a

$$\int_{\mathbb{R}^n} \prod_{i=1}^{m} f_i^{c_i}(\langle x, u_i \rangle)\, \mathrm{d}x \leq \prod_{i=1}^{m} \left(\int_{\mathbb{R}} f_i\right)^{c_i}.$$

*erik.thomas@ens-rennes.fr

Dans la sous-partie 3.2, nous étudions une inégalité de type log-Sobolev pour la mesure gaussienne. On dit qu'une mesure de probabilité μ définie sur $\mathbb{R}$ satisfait une inégalité de type log-Sobolev s'il existe une constante $c > 0$ telle que : pour toute fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ vérifiant $\displaystyle\int f \mathrm{d}\gamma_1 = 1$,

$$\int_{\mathbb{R}} \ln\left(f(x)\right) f(x) \,\mathrm{d}\mu(x) \leq c \int_{\mathbb{R}} \frac{f'(x)^2}{f(x)} \mathrm{d}\mu(x). \tag{2}$$

On montrera que la constante $c = \dfrac{1}{2}$ convient lorsque $\mu = \gamma_1$.

Les inégalités de type log-Sobolev entraînent des inégalités de type Poincaré, i.e. pour toute fonction f suffisament régulière et de carré intégrable

$$\int_{\mathbb{R}} \left(f(x) - \int_{\mathbb{R}} f(x) \,\mathrm{d}\mu(x) \right)^2 \mathrm{d}\mu(x) \leq c' \int_{\mathbb{R}} \left| f'(x) \right|^2 \mathrm{d}\mu(x)$$

pour une certaine constante $c' > 0$. Nous renvoyons à [3] pour une preuve.

Enfin, les mesures qui vérifient une inégalités de type log-Sobolev (2) pour une certaine constante $c > 0$ vérifient aussi une inégalité de concentration de mesure : pour toute fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ Lipschitz, de constante de Lipschitz $\|f\|_{\mathrm{Lip}} \leq 1$, on a

$$\forall r > 0, \quad \mu\left(\left\{ \left| f - \int_{\mathbb{R}} f \mathrm{d}\mu \right| \geq r \right\} \right) \leq 2\mathrm{e}^{-r^2/c}.$$

Cette inégalité est à mettre en compétition avec l'inégalité de Bienaymé-Tchebyshev qui donne une décroissance en $1/r^2$.

Pour un exposé complet sur les inégalités de type log-Sobolev et les inégalités de concentration de mesure, nous renvoyons à [**?**].

2 Le semi-groupe d'Ornstein-Uhlenbeck

Le but de cette partie est de définie et donner les principales propriétés du semi-groupe d'Ornstein-Uhlenbeck.

Définition 2.1. *Mesure gaussienne.*
Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \varphi(t) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-t^2/2}.$$

Il est classique que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \varphi = 1$, donc φ est la densité d'une mesure borélienne de probabilité notée γ_1. Ainsi, pour tout borélien $A \subset \mathbb{R}$, on a

$$\gamma_1(A) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_A \mathrm{e}^{-t^2/2} \mathrm{d}t.$$

La prochaine définition permet de donner sur une classe de fonctions f pour lesquelles on pourra calculer $P_t(f)$.

Définition 2.2. *Fonction à croissance lente.*
Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. On dit que f est à croissance lente s'il existe $C \geq 0$ et $k \in \mathbb{N}$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |f(x)| \leq C\left(1 + |x|\right)^k.$$

Définition 2.3. *Semi-groupe d'Ornstein-Uhlenbeck.*
Soit $t \geq 0$. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. On définit, si cela est possible, la fonction $P_t(f)$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P_t(f)(x) := \int_{\mathbb{R}} f\left(\mathrm{e}^{-t} x + \sqrt{1 - \mathrm{e}^{-2t}} y \right) \mathrm{d}\gamma_1(y).$$

Le but n'est pas de rechercher l'ensemble des fonctions pour lesquelles la définition 2.3 est valide. On remarque néanmoins que la définition 2.3 est valide pour toutes les fonctions mesurables bornées (presque-partout) et plus généralement, pour toutes les fonctions mesurables à croissance lente.

Proposition 2.1. *Premières propriétés du semi-groupe.*
Le semi-groupe d'Ornstein-Uhlenbeck a les propriétés suivantes :

1. *pour tout* $t \geq 0$, P_t *est linéaire ;*
2. $P_0 = \mathrm{id}$ *;*
3. *pour tout* $(s,t) \in (\mathbb{R}_+)^2$, $P_t \circ P_s = P_{t+s}$ *;*
4. *pour tout fonction* f *à croissance lente, on a*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lim_{t \to +\infty} P_t(f)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y) \, \mathrm{d}\gamma_1(y).$$

Démonstration. 1. C'est clair.

2. C'est clair.
3. Soit f à croissance lente. Soit $(t,s) \in (\mathbb{R}_+)^2$. Si $t = 0$ ou $s = 0$, le résultat est clair. On suppose donc $t > 0$ et $s > 0$. On écrit donc

$$\begin{aligned}
(P_t(P_s(f)))(x) &= \int_{\mathbb{R}} P_s(f)\left(\mathrm{e}^{-t}x + \sqrt{1-\mathrm{e}^{-2t}}z\right) \mathrm{d}\gamma_1(z) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f\left(\mathrm{e}^{-s}\left(\mathrm{e}^{-t}x + \sqrt{1-\mathrm{e}^{-2t}}z\right) + \sqrt{1-\mathrm{e}^{-2s}}y\right) \mathrm{d}\gamma_1(y)\right) \mathrm{d}\gamma_1(z) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f\left(\mathrm{e}^{-(s+t)}x + \mathrm{e}^{-s}\sqrt{1-\mathrm{e}^{-2t}}z + \sqrt{1-\mathrm{e}^{-2s}}y\right) \mathrm{d}\gamma_1(y) \, \mathrm{d}\gamma_1(z)
\end{aligned}$$

On fait le changement de variables

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} := \frac{1}{\sqrt{1-\mathrm{e}^{-2(s+t)}}} \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-s}\sqrt{1-\mathrm{e}^{-2t}} & \sqrt{1-\mathrm{e}^{-2s}} \\ \sqrt{1-\mathrm{e}^{-2s}} & -\mathrm{e}^{-s}\sqrt{1-\mathrm{e}^{-2t}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ y \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} z \\ y \end{pmatrix}$$

où $R := \dfrac{1}{\sqrt{1-\mathrm{e}^{-2(s+t)}}} \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-s}\sqrt{1-\mathrm{e}^{-2t}} & \sqrt{1-\mathrm{e}^{-2s}} \\ \sqrt{1-\mathrm{e}^{-2s}} & -\mathrm{e}^{-s}\sqrt{1-\mathrm{e}^{-2t}} \end{pmatrix}$.
Il est facile de remarquer que R est orthogonale, ainsi

$$\begin{pmatrix} z \\ y \end{pmatrix} = \underbrace{R^{-1}}_{{}^tR} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1-\mathrm{e}^{-2(s+t)}}} \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-s}\sqrt{1-\mathrm{e}^{-2t}} & \sqrt{1-\mathrm{e}^{-2s}} \\ \sqrt{1-\mathrm{e}^{-2s}} & -\mathrm{e}^{-s}\sqrt{1-\mathrm{e}^{-2t}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

En particulier,

$$\begin{aligned}
& \mathrm{e}^{-s}\sqrt{1-\mathrm{e}^{-2t}}z + \sqrt{1-\mathrm{e}^{-2s}}y \\
= {} & \frac{\mathrm{e}^{-s}\sqrt{1-\mathrm{e}^{-2t}}\left(\mathrm{e}^{-s}\sqrt{1-\mathrm{e}^{-2t}}a + \sqrt{1-\mathrm{e}^{-2s}}b\right) + \sqrt{1-\mathrm{e}^{-2s}}\left(\sqrt{1-\mathrm{e}^{-2s}}a - \mathrm{e}^{-s}\sqrt{1-\mathrm{e}^{-2t}}b\right)}{\sqrt{1-\mathrm{e}^{-2(s+t)}}} \\
= {} & \sqrt{1-\mathrm{e}^{-2(s+t)}}a.
\end{aligned}$$

Comme $|\det(R)| = 1$, on en déduit

$$\begin{aligned}
(P_t(P_s(f)))(x) &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f\left(\mathrm{e}^{-(s+t)}x + \sqrt{1-\mathrm{e}^{-2(s+t)}}a\right) \mathrm{d}\gamma_1(a) \, \mathrm{d}\gamma_1(b) \\
&= \int_{\mathbb{R}} f\left(\mathrm{e}^{-(s+t)}x + \sqrt{1-\mathrm{e}^{-2(s+t)}}a\right) \mathrm{d}\gamma_1(a) \\
&= P_{s+t}(f)(x).
\end{aligned}$$

4. Soit $x \in \mathbb{R}$. On remarque que

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad \lim_{t \to +\infty} f\left(\mathrm{e}^{-t} x + \sqrt{1-\mathrm{e}^{-2t}}\, y\right) = f(y).$$

De plus, comme f est à croissance lente, pour tout $t \geq 0$, on peut écrire

$$\begin{aligned} \left| f\left(\mathrm{e}^{-t} x + \sqrt{1-\mathrm{e}^{-2t}}\, y\right)\right| &\leq C\left(1 + \left|\mathrm{e}^{-t} x + \sqrt{1-\mathrm{e}^{-2t}}\, y\right|\right)^k \\ &\leq C\left(1 + \mathrm{e}^{-t}|x| + \sqrt{1-\mathrm{e}^{-2t}}\,|y|\right)^k \\ &\leq C\left(1+|x|+|y|\right)^k \in L^1_y(\gamma_1) \end{aligned}$$

Le théorème de convergence dominée permet de conclure.

□

Proposition 2.2. *Continuité de P_t.*
Pour tout $t \geq 0$, pour tout $p \geq 1$ et pour tout f à croissance lente, on a :

$$\|P_t(f)\|_{L^p(\gamma_1)} \leq \|f\|_{L^p(\gamma_1)}.$$

Remarque 1. La proposition 2.2 affirme que P_t est un opérateur continue de $L^p(\gamma_1)$ dans lui-même et $\|P_t\|_{L^p(\gamma_1)\to L^p(\gamma_1)} \leq 1$. En fait, on peut montrer que $\|P_t\|_{L^p(\gamma_1)\to L^p(\gamma_1)} = 1$.

Démonstration. Comme $x \in \mathbb{R}_+ \longmapsto x^p$ est convexe, l'inégalité de Jensen donne

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \left|\int_{\mathbb{R}} f\left(\mathrm{e}^{-t}x + \sqrt{1-\mathrm{e}^{-2t}}\, y\right) \mathrm{d}\gamma_1(y)\right|^p \leq \int_{\mathbb{R}} \left| f\left(\mathrm{e}^{-t}x + \sqrt{1-\mathrm{e}^{-2t}}\, y\right)\right|^p \mathrm{d}\gamma_1(y).$$

Ainsi,

$$\|P_t(f)\|_{L^p(\gamma_1)} \leq \underbrace{\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \left| f\left(\mathrm{e}^{-t}x + \sqrt{1-\mathrm{e}^{-2t}}\, y\right)\right|^p \mathrm{d}\gamma_1(y)\right) \mathrm{d}\gamma_1(x)}_{:=I}.$$

On fait le changement de variables

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-t} & \sqrt{1-\mathrm{e}^{-2t}} \\ -\sqrt{1-\mathrm{e}^{-2t}} & \mathrm{e}^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

où l'on a posé $R := \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-t} & \sqrt{1-\mathrm{e}^{-2t}} \\ -\sqrt{1-\mathrm{e}^{-2t}} & \mathrm{e}^{-t} \end{pmatrix}$. Il est facile de constater que R est une matrice de rotation. On en retire donc

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-t} & -\sqrt{1-\mathrm{e}^{-2t}} \\ \sqrt{1-\mathrm{e}^{-2t}} & \mathrm{e}^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

Il s'ensuit que

$$I = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |f(a)|^p \,\mathrm{d}\gamma_1(a)\,\mathrm{d}\gamma_1(b) = \|f\|_{L^p(\gamma_1)}.$$

□

Définition 2.4. *Opérateur L.*
On définit, pour tout $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R})$, $L(f)$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad L(f)(x) := f''(x) - x f'(x).$$

Remarque 2. Le lecteur ayant des connaissances sur les semi-groupes reconnaîtra en L le générateur infinitésimal du semi-groupe.

Proposition 2.3. *Dérivée de $P_t(f)$.*
Pour toute fonction f de classe $\mathscr{C}^2$ à support compact et pour tout réel x fixé, on a

$$\frac{\partial P_t(f)(x)}{\partial t} = L(P_t(f))(x).$$

Démonstration. On rappelle que

$$P_t(f)(x) = \int_{\mathbb{R}} f\left(\mathrm{e}^{-t}x + \sqrt{1-\mathrm{e}^{-2t}}y\right) \mathrm{d}\gamma_1(y).$$

Comme f est à support compact, le théorème de dérivation de Lebesgue sous le signe intégrale donne

$$\begin{aligned}
\frac{\partial P_t(f)(x)}{\partial t} &= \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial f\left(\mathrm{e}^{-t}x + \sqrt{1-\mathrm{e}^{-2t}}y\right)}{\partial t} \mathrm{d}\gamma_1(y) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left(-x\mathrm{e}^{-t} + \frac{\mathrm{e}^{-2t}}{\sqrt{1-\mathrm{e}^{-2t}}}y\right) f'\left(\mathrm{e}^{-t}x + \sqrt{1-\mathrm{e}^{-2t}}y\right) \mathrm{d}\gamma_1(y) \\
&= -x\mathrm{e}^{-t} \int_{\mathbb{R}} f'\left(\mathrm{e}^{-t}x + \sqrt{1-\mathrm{e}^{-2t}}y\right) \mathrm{d}\gamma_1(y) + \frac{\mathrm{e}^{-2t}}{\sqrt{1-\mathrm{e}^{-2t}}} \int_{\mathbb{R}} f'\left(\mathrm{e}^{-t}x + \sqrt{1-\mathrm{e}^{-2t}}y\right) y \, \mathrm{d}\gamma_1(y).
\end{aligned}$$

Une simple application du théorème de dérivation de Lebesgue donne

$$P_t(f)'(x) = \mathrm{e}^{-t} \int_{\mathbb{R}} f'\left(\mathrm{e}^{-t}x + \sqrt{1-\mathrm{e}^{-2t}}y\right) \mathrm{d}\gamma_1(y)$$

de sorte que

$$-x\mathrm{e}^{-t} \int_{\mathbb{R}} f'\left(\mathrm{e}^{-t}x + \sqrt{1-\mathrm{e}^{-2t}}y\right) \mathrm{d}\gamma_1(y) = -xP_t(f)'(x).$$

Pour traiter le terme $\frac{\mathrm{e}^{-2t}}{\sqrt{1-\mathrm{e}^{-2t}}} \int_{\mathbb{R}} f'\left(\mathrm{e}^{-t}x + \sqrt{1-\mathrm{e}^{-2t}}y\right) y \, \mathrm{d}\gamma_1(y)$, on commence par faire une intégration par parties (on notera que le crochet est nul car f est à support compact) :

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{e}^{-2t}}{\sqrt{1-\mathrm{e}^{-2t}}} \int_{\mathbb{R}} f'\left(\mathrm{e}^{-t}x + \sqrt{1-\mathrm{e}^{-2t}}y\right) y \, \mathrm{d}\gamma_1(y) &= \frac{\mathrm{e}^{-2t}}{\sqrt{1-\mathrm{e}^{-2t}}} \int_{\mathbb{R}} f'\left(\mathrm{e}^{-t}x + \sqrt{1-\mathrm{e}^{-2t}}y\right) y \frac{\mathrm{e}^{-y^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{d}y \\
&= \mathrm{e}^{-2t} \int_{\mathbb{R}} f''\left(\mathrm{e}^{-t}x + \sqrt{1-\mathrm{e}^{-2t}}y\right) \mathrm{d}\gamma_1(y).
\end{aligned}$$

Deux nouvelles applications du théorème de dérivation de Lebesgue donnent

$$P_t(f)''(x) = \mathrm{e}^{-2t} \int_{\mathbb{R}} f''\left(\mathrm{e}^{-t}x + \sqrt{1-\mathrm{e}^{-2t}}y\right) \mathrm{d}\gamma_1(y).$$

On en déduit que

$$\frac{\partial P_t(f)(x)}{\partial t} = P_t(f)''(x) - xP_t(f)'(x) = L(P_t(f))(x).$$

□

Proposition 2.4. *P_t est auto-adjoint pour le produit scalaire de $L^2(\gamma_1)$.*
Pour toutes fonctions f, g à croissance lente, on a

$$\int_{\mathbb{R}} P_t(f)(x)\, g(x)\, \mathrm{d}\gamma_1(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\, P_t(g)(x)\, \mathrm{d}\gamma_1(x).$$

Démonstration. La preuve ressemble à celle de la proposition 2.2. On écrit

$$\int_{\mathbb{R}} P_t(f)(x)\, g(x)\, \mathrm{d}\gamma_1(x) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f\left(\mathrm{e}^{-t}x + \sqrt{1-\mathrm{e}^{-2t}}y\right) g(x)\, \mathrm{d}\gamma_1(y)\, \mathrm{d}\gamma_1(x).$$

On fait le changement de variables

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-t} & \sqrt{1-\mathrm{e}^{-2t}} \\ -\sqrt{1-\mathrm{e}^{-2t}} & \mathrm{e}^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-t} & -\sqrt{1-\mathrm{e}^{-2t}} \\ \sqrt{1-\mathrm{e}^{-2t}} & \mathrm{e}^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

Ainsi (les calculs sont les mêmes que ceux de la preuve de la proposition 2.2) :

$$\int_{\mathbb{R}} P_t(f)(x)\, g(x)\, \mathrm{d}\gamma_1(x) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(a)\, g\left(\mathrm{e}^{-t}a - \sqrt{1-\mathrm{e}^{-2t}}b\right) \mathrm{d}\gamma_1(a)\, \mathrm{d}\gamma_1(b).$$

Le nouveau changement de variables $x := a$ et $y := -b$ donne

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} P_t(f)(x)\, g(x)\,\mathrm{d}\gamma_1(x) &= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f(x)\, g\left(\mathrm{e}^{-t}x + \sqrt{1-\mathrm{e}^{-2t}}y\right)\mathrm{d}\gamma_1(x)\,\mathrm{d}\gamma_1(y)\\ &= \int_{\mathbb{R}} f(x)\, P_t(g)(x)\,\mathrm{d}\gamma_1(x).\end{aligned}$$

□

Corollaire 2.1. *Si l'on note $\mathbb{1}$ la fonction constante égale à 1 et si on remarque que $P_t(\mathbb{1}) = \mathbb{1}$, alors la proposition 2.4 donne : pour toute fonction f à croissance lente,*

$$\int_{\mathbb{R}} P_t(f)(x)\,\mathrm{d}\gamma_1(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{d}\gamma_1(x).$$

Remarque 3. La mesure γ_1 laisse invariant le semi-groupe.

Proposition 2.5. *Une formule d'intégrations par parties.*
Pour toute fonction f et g de classe $\mathscr{C}^2$ telles que f, f', f'', g, g' et g'' soient à croissance lente. Alors

$$\int_{\mathbb{R}} L(f)(x)\, g(x)\,\mathrm{d}\gamma_1(x) = -\int_{\mathbb{R}} f'(x)\, g'(x)\,\mathrm{d}\gamma_1(x).$$

Démonstration. On écrit

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} L(f)(x)\, g(x)\,\mathrm{d}\gamma_1(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}\left(f''(x) - xf'(x)\right) g(x)\,\mathrm{e}^{-x^2/2}\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} f''(x)\, g(x)\,\mathrm{e}^{-x^2/2}\mathrm{d}x - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} f'(x)\, g(x)\, x\mathrm{e}^{-x^2/2}\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

On fait une intégration par parties dans la première intégrale :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} f''(x)\, g(x)\,\mathrm{e}^{-x^2/2}\mathrm{d}x &= \left[f'(x)\, g(x)\,\mathrm{e}^{-x^2/2}\right]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{\mathbb{R}} f'(x)\left(g'(x) - xg(x)\right)\mathrm{e}^{-x^2/2}\mathrm{d}x\\ &= -\int_{\mathbb{R}} f'(x)\, g'(x)\,\mathrm{e}^{-x^2/2}\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}} f'(x)\, xg(x)\,\mathrm{e}^{-x^2/2}\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

le crochet $\left[f'(x)\, g(x)\,\mathrm{e}^{-x^2/2}\right]_{-\infty}^{+\infty}$ est nul car les fonctions f' et g sont à croissance lente. On en déduit finalement que

$$\int_{\mathbb{R}} L(f)(x)\, g(x)\,\mathrm{d}\gamma_1(x) = -\int_{\mathbb{R}} f'(x)\, g'(x)\,\mathrm{d}\gamma_1(x).$$

□

3 Des applications

3.1 Inégalité de Hölder

Le but de cette sous-partie est d'établir l'inégalité de Hölder en utilisant le semi-groupe d'Ornstein-Uhlenbeck.

Proposition 3.1. *Inégalité de Hölder.*
Soit $(p, q, r) \in [1, \infty]^3$ tel que $1/p + 1/q = 1/r$. Alors pour tout $(f_1, f_2) \in L^p(\mathbb{R}) \times L^q(\mathbb{R})$, on a

$$\|f_1 f_2\|_{L^r(\mathbb{R})} \leq \|f_1\|_{L^p(\mathbb{R})}\, \|f_2\|_{L^q(\mathbb{R})}. \tag{3}$$

Démonstration. Comme

$$\|f_1\|_{L^p(\mathbb{R})} = \||f_1|\|_{L^p(\mathbb{R})}, \quad \|f_2\|_{L^p(\mathbb{R})} = \||f_2|\|_{L^q(\mathbb{R})} \quad \text{et} \quad \|f_1 f_2\|_{L^r(\mathbb{R})} = \||f_1 f_2|\|_{L^r(\mathbb{R})},$$

on peut supposer f_1 et f_2 positives.

Si $p=1$ ou $q=1$, $r=1$, l'inégalité de Hölder est alors claire. Même remarque si $p=q=\infty$ (alors $r=\infty$). Ainsi, on suppose que $1<p<\infty$ et $1<q<\infty$, de sorte que $1<r<\infty$.

On pose r' le conjugué de Lebesgue de r : on a $1/r+1/r'=1$ de sorte que $1/p+1/q+1/r'=1$. Pour plus de lisibilité, on pose $c_1:=1/p$, $c_2:=1/q$ et $c_3:=1/r'$.

Comme le dual topologique de $L^r(\mathbb{R})$ est $L^{r'}(\mathbb{R})$, pour prouver (3), il suffit de prouver que pour tout $f_3\in L^{r'}(\mathbb{R})$ positive (car f_1 et f_2 le sont)

$$\int_{\mathbb{R}} f_1(x)\,f_2(x)\,f_3(x)\,\mathrm{d}x \leq \|f_1\|_{L^p(\mathbb{R})}\,\|f_2\|_{L^q(\mathbb{R})}\,\|f_3\|_{L^{r'}(\mathbb{R})}\,. \tag{4}$$

Comme l'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ à support compact est dense dans $L^p(\mathbb{R})$ (avec $1\leq p<\infty$) pour la norme $\|\cdot\|_{L^p(\mathbb{R})}$, on peut supposer f_1, f_2 et f_3 de classe $\mathscr{C}^\infty$ à support compact. On suppose que les fonctions f_1, f_2, f_3 sont toutes non nulles, sinon l'inégalité à prouver est claire.

Pour cela, on introduit la fonction α définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$$\alpha(t) := \int_{\mathbb{R}} P_t(f_1)^{c_1}(x)\,P_t(f_2)^{c_2}(x)\,P_t(f_3)^{c_3}(x)\,\mathrm{d}\gamma_1(x)\,.$$

Pour $i\in[\![1,3]\!]$, on pose $F_i^t(x) := \ln\left(P_t(f_i)(x)\right)$. On notera que $F_i^t(x)$ est bien définie pour tout $x\in\mathbb{R}$, i.e. que $P_t(f_i)(x)>0$ pour tout réel x.

On commence par remarquer que

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad \frac{\partial F_i^t(x)}{\partial t} = L\left(F_i^t\right)(x) + \left(F_i^t\right)'(x)^2 \tag{5}$$

où $'$ désigne la dérivée spatiale (i.e. par rapport à x). En effet, d'une part, en utilisant la proposition 2.3, on a

$$\frac{\partial F_i^t(x)}{\partial t} = \frac{\frac{\partial P_t(f)(x)}{\partial t}}{P_t(f)(x)} = \frac{P_t(f)''(x) - xP_t(f)'(x)}{P_t(f)(x)}.$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} L\left(F_i^t\right)(x) &= \ln\left(P_t(f)\right)''(x) - x\ln\left(P_t(f)\right)'(x) \\ &= \frac{P_t(f)''(x)\,P_t(f)(x) - \left(P_t(f)'\right)^2(x)}{P_t(f)^2(x)} - x\frac{P_t(f)'(x)}{P_t(f)(x)} \end{aligned}$$

et

$$\left(F_i^t\right)'(x)^2 = \frac{P_t(f)'(x)^2}{P_t(f)^2}.$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} L\left(F_i^t\right)(x) + \left(F_i^t\right)'(x)^2 &= \frac{P_t(f)''(x)\,P_t(f)(x) - \left(P_t(f)'\right)^2(x)}{P_t(f)^2(x)} - x\frac{P_t(f)'(x)}{P_t(f)(x)} + \frac{P_t(f)'(x)^2}{P_t(f)^2(x)} \\ &= \frac{P_t(f)''(x) - xP_t(f)'(x)}{P_t(f)(x)}. \end{aligned}$$

ce qui termine la preuve de (5).

Comme

$$\alpha(t) = \int_{\mathbb{R}} \exp\left(\sum_{i=1}^{3} c_i F_i^t(x)\right)\mathrm{d}\gamma_1(x)\,,$$

le théorème de dérivation de Lebesgue sous le signe intégrale donne

$$
\begin{aligned}
\alpha'(t) &= \int_{\mathbb{R}} \sum_{i=1}^{3} c_i \frac{\partial F_i^t(x)}{\partial t} \exp\left(\sum_{i=1}^{3} c_i F_i^t(x)\right) \mathrm{d}\gamma_1(x) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \sum_{i=1}^{3} c_i \left(L\left(F_i^t\right)(x) + \left(F_i^t\right)'(x)^2\right) \exp\left(\sum_{i=1}^{3} c_i F_i^t(x)\right) \mathrm{d}\gamma_1(x) \quad \text{en utilisant (5)} \\
&= \sum_{i=1}^{3} c_i \int_{\mathbb{R}} L\left(F_i^t\right)(x) \exp\left(\sum_{i=1}^{3} c_i F_i^t(x)\right) \mathrm{d}\gamma_1(x) + \int_{\mathbb{R}} \sum_{i=1}^{3} c_i \left(F_i^t\right)'(x)^2 \exp\left(\sum_{i=1}^{3} c_i F_i^t(x)\right) \mathrm{d}\gamma_1(x) \\
&= -\sum_{i=1}^{3} c_i \int_{\mathbb{R}} \left(F_i^t\right)'(x) \sum_{j=1}^{3} c_j \left(F_j^t\right)'(x) \exp\left(\sum_{i=1}^{3} c_i F_i^t(x)\right) \mathrm{d}\gamma_1(x) \quad \text{en utilisant la proposition 2.5} \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}} \sum_{i=1}^{3} c_i \left(F_i^t\right)'(x)^2 \exp\left(\sum_{i=1}^{3} c_i F_i^t(x)\right) \mathrm{d}\gamma_1(x) \\
&= -\int_{\mathbb{R}} \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} c_i c_j \left(F_i^t\right)'(x)(x) \left(F_j^t\right)'(x) \exp\left(\sum_{i=1}^{3} c_i F_i^t(x)\right) \mathrm{d}\gamma_1(x) \\
&\quad + \sum_{i=1}^{3} c_i \int_{\mathbb{R}} \left(F_i^t\right)'(x)^2 \exp\left(\sum_{i=1}^{3} c_i F_i^t(x)\right) \mathrm{d}\gamma_1(x) \\
&= -\int_{\mathbb{R}} \left(\sum_{i=1}^{3} c_i \left(F_i^t\right)'(x)\right)^2 \exp\left(\sum_{i=1}^{3} c_i F_i^t(x)\right) \mathrm{d}\gamma_1(x) + \int_{\mathbb{R}} \sum_{i=1}^{3} c_i \left(F_i^t\right)'(x)^2 \exp\left(\sum_{i=1}^{3} c_i F_i^t(x)\right) \mathrm{d}\gamma_1(x).
\end{aligned}
$$

Comme $c_1 + c_2 + c_3 = 1$, l'inégalité de Jensen utilisée avec la fonction convexe $x \longmapsto x^2$ donne

$$\left(\sum_{i=1}^{3} c_i \left(F_i^t\right)'(x)\right)^2 \leq \sum_{i=1}^{3} c_i \left(F_i^t\right)'(x)^2.$$

On en déduit que $\alpha'(t) \geq 0$. Ainsi,

$$\alpha(0) \leq \lim_{t \to +\infty} \alpha(t). \tag{6}$$

Or,

$$\alpha(0) = \int_{\mathbb{R}} f_1(x)^{c_1} f_2(x)^{c_2} f_3(x)^{c_3} \mathrm{d}\gamma_1(x),$$

et le théorème de convergence dominée et les résultats de la proposition 2.1 donnent

$$
\begin{aligned}
\lim_{t \to +\infty} \alpha(t) &= \int_{\mathbb{R}} \left(\left(\int_{\mathbb{R}} f_1 \mathrm{d}\gamma_1\right)^{c_1} \left(\int_{\mathbb{R}} f_2 \mathrm{d}\gamma_1\right)^{c_2}\right) \left(\left(\int_{\mathbb{R}} f_3 \mathrm{d}\gamma_1\right)^{c_3}\right) \mathrm{d}\gamma_1(x) \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}} f_1 \mathrm{d}\gamma_1\right)^{c_1} \left(\int_{\mathbb{R}} f_2 \mathrm{d}\gamma_1\right)^{c_2} \left(\int_{\mathbb{R}} f_3 \mathrm{d}\gamma_1\right)^{c_3}.
\end{aligned}
$$

La ligne (6) donne donc

$$\int_{\mathbb{R}} f_1(x)^{c_1} f_2(x)^{c_2} f_3(x)^{c_3} \mathrm{d}\gamma_1(x) \leq \left(\int_{\mathbb{R}} f_1 \mathrm{d}\gamma_1\right)^{c_1} \left(\int_{\mathbb{R}} f_2 \mathrm{d}\gamma_1\right)^{c_2} \left(\int_{\mathbb{R}} f_3 \mathrm{d}\gamma_1\right)^{c_3}.$$

En utilisant l'égalité précédente avec $f_i(x) \longleftarrow f_i(x)^{1/c_i} \mathrm{e}^{-x^2/2}$ ($i \in [\![1, 3]\!]$) et en utilisant le fait que $c_1 + c_2 + c_3 = 1$ on obtient finalement :

$$\int_{\mathbb{R}} f_1(x) f_2(x) f_3(x) \mathrm{d}x \leq \left(\int_{\mathbb{R}} f_1(x)^{1/c_1} \mathrm{d}x\right)^{c_1} \left(\int_{\mathbb{R}} f_2(x)^{1/c_2} \mathrm{d}x\right)^{c_2} \left(\int_{\mathbb{R}} f_3(x)^{1/c_3} \mathrm{d}x\right)^{c_3}.$$

En utilisant $c_1 = 1/p$, $c_2 = 1/q$ et $c_3 = 1/r'$, on trouve exactement (4).

$\square$

Mentionnons maintenant comment adapter la preuve précédente pour prouver le théorème 1.1.

Démonstration. 1. On suppose que les fonctions $f_1, \ldots, f_m$ sont toutes non nulles, sinon le résultat est clair.

2. Pour des raisons de densité, on commence par supposer que les fonctions $f_1, \ldots, f_m$ sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ à support compact.
3. On pose $F_i^t(x) := \ln(P_t(f_i))(x)$. Notons que F_i^t est bien définie.
4. On pose

$$\alpha(t) := \int_{\mathbb{R}} \prod_{i=1}^m P_t(f_i)^{c_i}(\langle x, u_i \rangle)\, \mathrm{d}\gamma_n(x) = \int_{\mathbb{R}} \exp\left(\sum_{i=1}^m c_i F_i^t(\langle x, u_i\rangle)\right) \mathrm{d}\gamma_n(x).$$

5. On dérive α en

$$\alpha'(t) = \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^m \left(c_i L\left(F_i^t\right)(\langle x, u_i\rangle) + \left(F_i^t\right)'(\langle x, u_i\rangle)^2\right) \exp\left(\sum_{i=1}^m c_i F_i^t(x)\right) \mathrm{d}\gamma_n(x).$$

   L'utilisation de la proposition 2.5 donne alors

$$\alpha'(t) = \int_{\mathbb{R}^n} \left(-\left|\sum_{i=1}^m c_i \left(F_i^t\right)'(\langle x, u_i\rangle) u_i\right|^2 + \sum_{i=1}^m c_i \left(F_i^t\right)'(\langle x, u_i\rangle)^2\right) \exp\left(\sum_{i=1}^m c_i F_i^t(x)\right) \mathrm{d}\gamma_n(x).$$

6. La ligne (1) assure que $\alpha'(t) \geq 0$.
7. Du point précédent, on conclut que $\alpha(0) \leq \lim_{t \to +\infty} \alpha(t)$.
8. On termine en remplaçant les fonctions $x \longmapsto f_i(x)$ par $x \longmapsto f_i(x)\mathrm{e}^{-|x|^2/2}$ et en utilisant le fait que la relation (1) donne $\displaystyle\sum_{i=1}^m c_i = n$.

□

3.2 Inégalité de log-Sobolev pour la loi normale

Définition 3.1. *Entropie gaussienne.*

Pour $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction mesurable. On définit, si possible, l'entropie de f par rapport à la mesure γ_1 par :

$$\mathrm{Ent}_{\gamma_1}(f) := \int_{\mathbb{R}} \ln(f(x)) f(x)\, \mathrm{d}\gamma_1(x).$$

Nous allons prouver l'inégalité suivante :

Théorème 3.1. *Inégalité de log-Sobolev pour γ_1.*

Pour toute fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ telle que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(x)\, \mathrm{d}\gamma_1(x) = 1$, on a

$$\mathrm{Ent}_{\gamma_1}(f) \leq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \frac{f'(x)^2}{f(x)} \mathrm{d}\gamma_1(x).$$

Démonstration. Pour $t \geq 0$, on pose

$$S(t) := \int_{\mathbb{R}} P_t(f)(x) \ln(P_t(f))(x)\, \mathrm{d}\gamma_1(x) = \mathrm{Ent}_{\gamma_1}(P_t(f)).$$

On notera que l'on a

$$S(0) = \int_{\mathbb{R}} f(x) \ln(f(x))\, \mathrm{d}\gamma_1(x) = \mathrm{Ent}_{\gamma_1}(f) \tag{7}$$

et, par convergence dominée,

$$\lim_{t \to +\infty} S(t) = \int_{\mathbb{R}} \left(\left(\int_{\mathbb{R}} f \mathrm{d}\gamma_1\right) \ln\left(\int_{\mathbb{R}} f \mathrm{d}\gamma_1\right)\right) \mathrm{d}\gamma_1(x) = 0 \tag{8}$$

car $\displaystyle\int f \mathrm{d}\gamma_1 = 1$. De plus, en utilisant le théorème de dérivation de Lebesgue sous le signe intégrale, S est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et

$$\begin{aligned}
\forall t \geq 0, \quad S'(t) &= \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial t} \left(P_t(f)(x) \ln\left(P_t(f)\right)(x)\right) \mathrm{d}\gamma_1(x) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\partial P_t(f)(x)}{\partial t} \ln\left(P_t(f)\right)(x) + P_t(f)(x) \frac{\frac{\partial P_t(f)(x)}{\partial t}}{P_t(f)(x)} \right) \mathrm{d}\gamma_1(x) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial P_t(f)(x)}{\partial t} \left(1 + \ln\left(P_t(f)\right)(x)\right) \mathrm{d}\gamma_1(x).
\end{aligned}$$

En utilisant la proposition 2.3, on obtient

$$\forall t \geq 0, \quad S'(t) = \int_{\mathbb{R}} L\left(P_t(f)\right)(x) \left(1 + \ln\left(P_t(f)\right)(x)\right) \mathrm{d}\gamma_1(x).$$

La proposition 2.5 donne alors

$$\forall t \geq 0, \quad S'(t) = -\int_{\mathbb{R}} P_t(f)'(x) \ln\left(P_t(f)\right)'(x) \mathrm{d}\gamma_1(x). \tag{9}$$

En utilisant le théorème de dérivation de Lebesgue sous le signe intégrale, on a

$$P_t(f)'(x) = \mathrm{e}^{-t} \int_{\mathbb{R}} f'\left(\mathrm{e}^{-t}x + \sqrt{1-\mathrm{e}^{-2t}}y\right) \mathrm{d}\gamma_1(y) = \mathrm{e}^{-t} P_t(f')(x).$$

Cette ligne utilisée avec (9) donne

$$\forall t \geq 0, \quad -S'(t) = \mathrm{e}^{-2t} \int_{\mathbb{R}} \frac{P_t(f')(x)^2}{P_t(f)(x)} \mathrm{d}\gamma_1(x). \tag{10}$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne

$$\begin{aligned}
P_t(f')(x)^2 &= \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{f'\left(\mathrm{e}^{-t}x + \sqrt{1-\mathrm{e}^{-2t}}y\right)}{\sqrt{f\left(\mathrm{e}^{-t}x + \sqrt{1-\mathrm{e}^{-2t}}y\right)}} \times \sqrt{f\left(\mathrm{e}^{-t}x + \sqrt{1-\mathrm{e}^{-2t}}y\right)} \mathrm{d}\gamma_1(y) \right)^2 \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{f'^2}{f} \left(\mathrm{e}^{-t}x + \sqrt{1-\mathrm{e}^{-2t}}y\right) \mathrm{d}\gamma_1(y) \right) \left(\int_{\mathbb{R}} f\left(\mathrm{e}^{-t}x + \sqrt{1-\mathrm{e}^{-2t}}y\right) \mathrm{d}\gamma_1(y) \right),
\end{aligned}$$

autrement dit,

$$\frac{P_t(f')(x)^2}{P_t(f)(x)} \leq P_t\left(\frac{f'^2}{f}\right)(x).$$

Cette ligne utilisée avec (10) donne

$$\forall t \geq 0, \quad -S'(t) \leq \mathrm{e}^{-2t} \int_{\mathbb{R}} P_t\left(\frac{f'^2}{f}\right)(x) \mathrm{d}\gamma_1(x).$$

En utilisant la proposition 2.1, on obtient

$$\forall t \geq 0, \quad -S'(t) \leq \mathrm{e}^{-2t} \int_{\mathbb{R}} \frac{f'^2(x)}{f(x)} \mathrm{d}\gamma_1(x).$$

Pour conclure, il suffit d'intégrer l'inégalité précédente :

$$-\int_0^{+\infty} S'(t) \mathrm{d}t \leq \left(\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-2t} \mathrm{d}t\right) \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{f'^2(x)}{f(x)} \mathrm{d}\gamma_1(x)\right).$$

En remarquant que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-2t} \mathrm{d}t = \frac{1}{2}$ et en utilisant les lignes (7) et (8), on a

$$\mathrm{Ent}_{\gamma_1}(f) \leq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \frac{f'^2(x)}{f(x)} \mathrm{d}\gamma_1(x).$$

$\square$

Références

[1] F. Barthe, D. Cordero-Erausquin, *Inverse Brascamp-Lieb inequalities along the Heat equation.* Geometric Aspects of Functional Analysis (2002-2003), LNM 1850, Springer, pp. 65-71, 2004.

[2] H. J. Brascamp, E. H. Lieb, *Best constants in Young's inequality, its converse and its generalization to more than three functions.* Adv. Math. 20, pp. 151–173, 1976.

[3] D. Cordero-Erausquin, `https://webusers.imj-prg.fr/~dario.cordero/Docs/M2/2019_2020/chap5_new.pdf`.

[4] M. Ledoux, *Concentration of measure and logarithmic Sobolev inequalities.* Séminaire de Probabilités XXXIII. Lecture Notes in Math. 1709, pp. 120-215, Springer, 1999.