Sur les croissances intermédiaires

Erik Thomas*

Résumé

Dans cette note, on donne des exemples de fonctions à croissance intermédiaire entre les fonctions logarithmiques et les fonctions puissances et entre les fonctions puissances et les fonctions exponentielles.

1 Introduction

On apprend en classe de Terminale les croissances comparées sous la forme imagée suivante : « les fonctions exponentielles battent les fonctions puissances, qui elles-mêmes battent les fonctions logarithmiques en $+\infty$ ». On apprend alors à écrire cette phrase avec des relations de domination :

$$\forall \alpha > 0,\ \forall \beta > 0,\ \forall a > 1, \quad \ln(x)^\alpha \underset{x \to +\infty}{=} o\left(x^\beta\right) \quad \text{et} \quad x^\beta \underset{x \to +\infty}{=} o\left(a^{x^\alpha}\right).$$

Une question paraît alors légitime : y a-t-il des croissances intermédiaires ? Peut-on trouver une fonction f définie sur un voisinage de $+\infty$ telle que

$$\forall \alpha > 0,\ \forall \beta > 0,\ \forall a > 1, \quad x^\beta \underset{x \to +\infty}{=} o(f(x)) \quad \text{et} \quad f(x) \underset{x \to +\infty}{=} o\left(a^{x^\alpha}\right) \ ? \tag{1}$$

Même question sur l'existence d'une fonction g telle que

$$\forall \alpha > 0,\ \forall \beta > 0, \quad \ln(x)^\alpha \underset{x \to +\infty}{=} o(g(x)) \quad \text{et} \quad g(x) \underset{x \to +\infty}{=} o\left(x^\beta\right) \ ? \tag{2}$$

Nous verrons que répondre à la question (1), c'est (presque) répondre à la question (2). Pour cela, nous utiliserons les séries entières et un résultat classique.

2 Réponse aux questions

2.1 Construction d'une fonction f répondant à la première question

On utilisera le résultat classique suivant sur les fonctions développables en série entière :

Proposition 2.1. *Soient* $f(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ *et* $g(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ *deux fonctions développables en série entière de rayon* $+\infty$ *toutes les deux. On suppose que que la suite* $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *est positive, ne stationne pas à* 0 *et que* $a_n \underset{n \to +\infty}{=} o(b_n)$.

Alors, $f(x) \underset{x \to +\infty}{=} o(g(x))$.

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. Soit $N \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \geq N$, $|a_n| \leq \varepsilon |b_n|$. Pour tout $x > 0$, on a

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| = \frac{\left|\sum_{n=0}^{N-1} a_n x^n + \sum_{n=N}^{+\infty} a_n x^n\right|}{\left|\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n\right|} \leq \frac{\sum_{n=0}^{N-1} a_n x^n}{\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n} + \varepsilon \frac{\sum_{n=N}^{+\infty} b_n x^n}{\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n}.$$

*erik.thomas@ens-rennes.fr

Comme $b_n \geq 0$ et $x > 0$, on a $\dfrac{\displaystyle\sum_{n=N}^{+\infty} b_n x^n}{\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n} \leq 1$. De plus, comme $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne stationne pas sur 0, on a

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\displaystyle\sum_{n=0}^{N-1} a_n x^n}{\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n} = 0.$$

Il existe $A > 0$ tel que pour tout $x \geq A$, on a $\left|\dfrac{f(x)}{g(x)}\right| \leq 2\varepsilon$, ce qui termine la preuve de la proposition.

$\square$

On pose $f(x) := \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(n!)^n}$. Comme $\dfrac{1}{(n!)^n} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n!}\right)$, le rayon de convergence de la précédente série entière vaut $+\infty$.

Il est clair que tout $\beta > 0$,

$$x^\beta \underset{x\to+\infty}{=} o(f(x)).$$

Soit $a > 1$ et $\alpha > 0$. Soit $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $\dfrac{1}{N} \leq \alpha$ de sorte que pour tout $x \geq 1$, $a^{x^{1/N}} \leq a^{x^\alpha}$. Or,

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad a^{x^{1/N}} = \mathrm{e}^{\ln(a) x^{1/N}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\ln(a)^n}{n!} x^{n/N}.$$

Pour tout $x \geq 1$, on peut donc écrire

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\ln(a)^n}{n!} x^{n/N} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=nN}^{(n+1)N-1} \frac{\ln^k(a)}{k!} x^{k/N} \right) \geq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{N}{((n+1)N-1)!} \min\left\{\ln^{nN}(a), \ln^{(n+1)N-1}(a)\right\} x^n.$$

On pose $h(x) := \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{N}{((n+1)N-1)!} \min\left\{\ln^{nN}(a), \ln^{(n+1)N-1}(a)\right\} x^n$.

Comme $\dfrac{1}{(n!)^n} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{N}{((n+1)N-1)!} \min\left\{\ln^{nN}(a), \ln^{(n+1)N-1}(a)\right\}\right)$, la proposition 2.1 assure que $f(x) \underset{x\to+\infty}{=} o(h(x))$, puis $f(x) \underset{x\to+\infty}{=} o\left(a^{x^\alpha}\right)$.

2.2 Construction d'une fonction g répondant à la seconde question

On pose, pour $x > 0$, $g(x) := f(\ln(x)) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\ln(x)^n}{(n!)^n}$. Soit $\beta > 0$. Il est clair que $\ln(x)^\beta \underset{x\to+\infty}{=} o(g(x))$.

Soit $\alpha > 0$ et $a > 1$ tel que $\ln(a) = \alpha$. D'après les résultats de la sous-partie 2.1, on a

$$g(x) = f(\ln(x)) \underset{x\to+\infty}{=} o\left(a^{\ln(x)^1}\right).$$

Comme $a^{\ln(x)} = x^\alpha$, on en déduit

$$g(x) \underset{x\to+\infty}{=} o(x^\alpha).$$

Références

[1] X. Oudot, *Maths MP/MP**. Vuibert, 2014.