Théorème de Dvoretzky-Rogers

Erik Thomas [*]

Résumé

Dans cet article, nous présentons le théorème de Dvoretzky-Rogers qui établit une équivalence entre le fait qu'un espace de Banach soit de dimension finie et l'équivalence entre la convergence absolue et la convergence inconditionnelle pour les séries.

1 Introduction

Dans toute cette note, $(E, \|\cdot\|)$ est un espace de Banach. Avant d'énoncer le théorème de Dvoretzky-Rogers, nous aurons besoin de la définition suivante.

Définition 1. *Soit* $\sum_{n\geq 1} x_n$ *une série d'éléments de* E*. On dit que :*

1. *la série* $\sum_{n\geq 1} x_n$ *converge absolument si la série numérique* $\sum_{n\geq 1} \|x_n\|$ *converge.*
2. *la série* $\sum_{n\geq 1} x_n$ *converge inconditionnellement si la série* $\sum_{n\geq 1} x_{\varphi(n)}$ *converge pour tout* $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{N}^*)$ *(ensemble des bijections de* $\mathbb{N}^*$ *sur* $\mathbb{N}^*$*).*

Il est clair que la convergence absolue d'une série entraîne la convergence inconditionnelle. La réciproque est vraie dans $\mathbb{R}$ et est généralement énoncée sous le nom de théorème de réarrangement de Riemann.

Théorème 1. *Théorème de réarrangement de Riemann.*
Soit $\sum_{n\geq 1} x_n$ *une série de réels convergente mais non absolument convergente.*

Alors, pour tout $x \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$*, il existe* $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{N}^*)$ *tel que la série* $\sum_{n=1}^{+\infty} x_{\varphi(n)} = x$.

Le résultat se généralise aux espaces de Banach E de dimension finie, le résultat est dû à Steinitz. On renvoie à [4].

Théorème 2. *Théorème de réarrangement de Steinitz.*
Soit $\sum_{n\geq 1} x_n$ *une série convergente mais non absolument convergente de* $\mathbb{R}^m$.

Alors, l'ensemble $\left\{ \sum_{n=1}^{+\infty} x_{\varphi(n)},\ \varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{N}^*) \text{ tel que } \sum_{n\geq 1} x_{\varphi(n)} \text{ converge} \right\}$ *est un sous-espace affine de* $\mathbb{R}^m$ *de dimension strictement positive.*

Dans [1], S. Banach pose la question de caractériser les espaces de Banach pour lesquels les deux types de convergence sont équivalents. La réponse est donnée par A. Dvoretzky et C. A. Rogers dans [2].

Théorème 3. *Théorème de Dvoretzky-Rogers.*
La convergence absolue et la convergence inconditionnelle sont équivalentes si, et seulement si, E *est de dimension finie.*

[*] erik.thomas@ens-rennes.fr

En fait, le théorème 3 est une conséquence du théorème suivant.

Théorème 4. *Soit E un espace de Banach de dimension infinie. Soit $\sum_{k \geq 1} c_k$ une série à termes strictement positifs convergente.*

Alors, il existe une suite $(x_k)_{k\geq 1}$ d'éléments de E avec $\|x_k\|^2 = c_k$ et telle que la série $\sum_{k\geq 1} x_k$ converge inconditionnellement.

Montrons comment le théorème 4 implique le théorème 3.

Démonstration. ($\Longleftarrow$) C'est le théorème de Steinitz (théorème 2).

($\Longrightarrow$) Si E n'est pas de dimension finie, alors en prenant $c_k = \dfrac{1}{k^2}$ et en notant $(x_k)_{k\geq 1}$ une suite donnée par le théorème 4, la série $\sum_{k\geq 1} x_k$ converge inconditionnellement mais ne converge pas absolument.

□

Dans la suite, nous montrons le théorème 4.

2 Sur les ellipsoïdes

Dans cette partie, on se place dans $\mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne canonique.

Définition 2. *Ellipsoïde.*

On appelle ellipsoïde de $\mathbb{R}^n$ tout ensemble $\mathscr{E}$ de la forme

$$\mathscr{E} = \{x \in \mathbb{R}^n,\ q(x) \leq 1\}$$

où q est une forme quadratique définie positive sur $\mathbb{R}^n$.

Proposition 1. *Volume d'un ellipsoïde.*

Soient $a_1, \dots, a_n$ des réels strictement positifs.

Le volume de l'ellipsoïde $\mathscr{E} = \left\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n,\ a_1^2 x_1^2 + \cdots + a_n^2 x_n^2 \leq 1\right\}$ est donné par

$$\mathrm{Vol}(\mathscr{E}) = \frac{\mathrm{Vol}\left(\mathbb{S}^{n-1}\right)}{a_1 \times \cdots \times a_n}.$$

Proposition 2. *Soit C un corps convexe (compact convexe) de $\mathbb{R}^n$ centré en 0 ($x \in C \iff -x \in C$). Il existe un ellipsoïde $\mathscr{E}$ de volume maximal inclus dans C.*

Les preuves de ces propositions sont classiques et on renvoie à [3].

Voici le premier résultat qui nous permettra de prouver le théorème 3.

Lemme 1. *On se place dans un espace euclidien de dimension n. Soit C un corps convexe centré en 0. Soit $r \in [\![1, n]\!]$. Il existe n vecteurs $a_1, \dots, a_n$ sur le bord de C tels que pour tout $(\lambda_1, \dots, \lambda_r) \in \mathbb{R}^r$, le vecteur $\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_r a_r \in \lambda C$ avec*

$$\lambda^2 = \left(2 + \frac{r(r-1)}{n}\right)\left(\lambda_1^2 + \cdots + \lambda_r^2\right). \tag{1}$$

Démonstration. En utilisant la proposition 2, on commence par inscrire dans C un ellipsoïde $\mathscr{E}$ de volume maximal. Quitte à composer par une une transformation linéaire bijective, on peut supposer que $\mathscr{E} = \mathbb{S}^{n-1}$.

On commence par montrer par récurrence que, quitte à composer par une transformation orthogonale (qui laisse invariant $\mathscr{E}$), il existe des vecteurs $a_1, \dots, a_r$ appartenant à $C \cap \mathbb{S}^{n-1}$ vérifiant

$$\forall k \in [\![1, r]\!], \quad \begin{cases} a_k = \left(a_{k,1}, a_{k,2}, \dots, a_{k,k}, 0, \dots 0\right) \\ a_{k,1}^2 + \cdots + a_{k,k-1}^2 = 1 - a_{k,k}^2 \leq \dfrac{k-1}{n} \end{cases}. \tag{2}$$

Le résultat est clair pour $k = 1$.

Supposons $a_1, \dots, a_{k-1}$ construits avec $k - 1 < r$. Construisons a_k.

Soit $r \in \mathbb{N}^*$. Soit l'ellipsoïde $\mathscr{E}_r$ défini par

$$\mathscr{E}_r = \left\{ (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n,\ \left(1 + \frac{1}{r}\right)^{n-k+1} (x_1^2 + \cdots + x_{k-1}^2) + \left(1 + \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2}\right)^{-k+1} (x_k^2 + \cdots + x_n^2) \leq 1 \right\}.$$

D'après la proposition 1, on a

$$\begin{aligned}
\operatorname{Vol}(\mathscr{E}_r) &= \frac{\operatorname{Vol}\left(\mathbb{S}^{n-1}\right)}{\sqrt{\left(1 + \frac{1}{r}\right)^{(n-k+1)(k-1)} \left(1 + \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2}\right)^{(-k+1)(n-k+1)}}} \\
&= \frac{\operatorname{Vol}\left(\mathbb{S}^{n-1}\right)}{\sqrt{\left(\dfrac{1 + \frac{1}{r}}{1 + \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2}}\right)^{(n-k+1)(k-1)}}} \\
&> \operatorname{Vol}\left(\mathbb{S}^{n-1}\right).
\end{aligned}$$

Par définition de $\mathscr{E}$, $\mathscr{E}_r$ n'est pas inclus dans C, ainsi il existe un vecteur $a_r = (a_1(r), \ldots, a_n(r)) \in \partial C \cap \mathscr{E}_r$.

Comme $\mathscr{E} = \mathbb{S}^{n-1}$ et $a_r \in \partial C$, on a $\|a_r\| \geq 1$. Ainsi, a_r vérifie

$$\begin{cases} a_1(r)^2 + \cdots + a_n(r)^2 \geq 1 \\ \left(1 + \frac{1}{r}\right)^{n-k+1} \left(a_1(r)^2 + \cdots + a_{k-1}(r)^2\right) + \left(1 + \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2}\right)^{-k+1} \left(a_k(r)^2 + \cdots + a_n(r)^2\right) \leq 1 \end{cases}, \tag{3}$$

soit

$$\left(\left(1 + \frac{1}{r}\right) - 1\right)^{n-k+1} \left(a_1(r)^2 + \cdots + a_{k-1}(r)^2\right) + \left(\left(1 + \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2}\right)^{-k+1} - 1\right) \left(a_k(r)^2 + \cdots + a_n(r)^2\right) \leq 0. \tag{4}$$

Pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, les suites $(a_j(r))_{r \in \mathbb{N}^*}$ sont bornées (par 1), quitte à extraire, on peut supposer qu'elles convergent. On note $a_k := \left(a_{k,1}, a_{k,2}, \ldots, a_{k,n}\right) = \lim\limits_{r \to +\infty} (a_1(r), \ldots, a_n(r))$. En faisant tendre r vers $+\infty$ dans (4), on obtient

$$(n-k+1)\left(a_{k,1}^2 + \cdots + a_{k,k-1}^2\right) + (-k+1)\left(a_{k,k}^2 + \cdots + a_{k,n}^2\right) \leq 0. \tag{5}$$

On note $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$, orthonormée pour le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^n$. Quitte à se placer dans la base orthonormée $\left(e_1, \ldots, e_{k-1}, \dfrac{(0, \ldots, 0, a_{k,k}, \ldots, a_{k,n})}{a_{k,k}^2 + \cdots + a_{k,n}^2}, \star, \ldots, \star\right)$, où les étoiles indiquent que la famille des k premiers vecteurs a été complétée en une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$, on peut supposer que les $n-k$ dernières coordonnées de a_k sont nulles. On notera que ce changement de base ne modifie pas les coordonnées des vecteurs $a_1, \ldots, a_{k-1}$. Il s'ensuit que $a_k = \left(a_{k,1}, \ldots, a_{k,k}, 0, \ldots, 0\right)$. En faisant tendre r vers $+\infty$ dans (3), on obtient $a_{k,1}^2 + \cdots + a_{k,k}^2 = 1$. En utilisant cette égalité dans (5), on a

$$\begin{aligned}
(n-k+1)\left(a_{1,1}^2 + \cdots + a_{k,k-1}^2\right) + (-k+1)\,a_{k,k}^2 \leq 0 \quad &\iff \quad (n-k+1)\left(1 - a_{k,k}^2\right) + (-k+1)\,a_{k,k}^2 \leq 0 \\
&\iff \quad n\left(1 - a_{k,k}^2\right) - (k+1) \leq 0 \\
&\iff \quad a_{k,1}^2 + \cdots + a_{k,k-1}^2 = 1 - a_{k,k}^2 \leq \frac{k-1}{n}.
\end{aligned}$$

Ceci termine la récurrence.

Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ r réels positifs. On a

$$
\begin{aligned}
\|\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_r a_r\|^2 &= \sum_{i=1}^{r} \left(\sum_{j=i}^{r} \lambda_j a_{j,i} \right)^2 \\
&= \sum_{i=1}^{r} \left(\lambda_i a_{i,i} + \sum_{j=i+1}^{r} \lambda_j a_{j,i} \right)^2 \\
&\leq \sum_{i=1}^{r} \left(2\lambda_i^2 a_{i,i}^2 + 2 \left(\sum_{j=i+1}^{r} \lambda_j a_{j,i} \right)^2 \right) \quad \text{car } (a+b)^2 \leq 2\left(a^2+b^2\right) \\
&\leq 2 \sum_{i=1}^{r} \left(\lambda_i^2 a_{i,i}^2 + \left(\sum_{j=i+1}^{r} \lambda_j^2 \right) \left(\sum_{k=i+1}^{r} a_{k,i}^2 \right) \right) \quad \text{inégalité de Cauchy-Schwarz} \\
&= 2 \left(\sum_{i=1}^{r} \lambda_i^2 a_{i,i}^2 + \sum_{i=1}^{r} \sum_{i+1 \leq j,k \leq r} \lambda_j^2 a_{k,i}^2 \right) \\
&= 2 \left(\sum_{i=1}^{r} \lambda_i^2 a_{i,i}^2 + \sum_{j=2}^{r} \sum_{k=2}^{r} \sum_{i=1}^{\min\{j-1,k-1\}} \lambda_j^2 a_{k,i}^2 \right) \\
&= 2 \left(\sum_{i=1}^{r} \lambda_i^2 a_{i,i}^2 + \sum_{j=1}^{r} \sum_{k=1}^{r} \sum_{i=1}^{\min\{j-1,k-1\}} \lambda_j^2 a_{k,i}^2 \right) \\
&= 2 \sum_{j=1}^{r} \left(a_{j,j}^2 + \sum_{k=1}^{r} \sum_{i=1}^{\min\{j-1,k-1\}} a_{k,i}^2 \right) \lambda_j^2.
\end{aligned}
$$

Or, en utilisant (2), on a

$$
\begin{aligned}
2 \sum_{j=1}^{r} \left(a_{j,j}^2 + \sum_{k=1}^{r} \sum_{i=1}^{\min\{j-1,k-1\}} a_{k,i}^2 \right) \lambda_j^2 &\leq 2 \sum_{j=1}^{r} \left(1 + \sum_{k=1}^{r} \frac{k-1}{n} \right) \\
&= \left(2 + \frac{r(r-1)}{n} \right) \sum_{j=1}^{r} \lambda_j^2 \\
&= \lambda^2.
\end{aligned}
$$

□

Remarque 1. On remarque que la preuve de ce lemme est une preuve « euclidienne », mais le résultat n'est pas euclidien.

3 Preuve du théorème 4

Avant de prouver le théorème 4, nous aurons besoin des lemmes suivants.

Lemme 2. *On suppose que E est un espace de Banach de dimension infinie. Soit $r \in \mathbb{N}^*$ et soient $c_1, \ldots, c_r$ des réels strictement positifs.*

Il existe des vecteurs $x_1, \ldots, x_r$ de E tels que pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, $\|x_i\|^2 = c_i$ et tels que

$$
\forall I \subset [\![1, r]\!], \quad \left\| \sum_{i \in I} x_i \right\|^2 \leq 3 \sum_{i \in I} c_i. \tag{6}
$$

Démonstration. Soit $n := r\,(r-1)$. Comme E est de dimension infinie, on peut trouver une famille libre de E contenant n éléments, disons $(z_1, \dots, z_n)$.

On munit $F := \operatorname{Vect}(z_1, \dots, z_n)$ d'une structure euclidienne. Soit C le corps convexe centré en 0 défini par

$$C := \{(x_1, \dots, x_n) \in F,\ \|x_1 z_1 + \cdots + x_n z_n\| \leq 1\}\,.$$

Soient $a_1, \dots, a_r$ les vecteurs donnés par le lemme 1. On écrit

$$\forall k \in [\![1, r]\!], \quad a_k = \big(a_{k,1}, \dots, a_{k,n}\big)\,.$$

Pour $k \in [\![1, r]\!]$, on définit x_k par

$$x_k := \sqrt{c_k}\,\big(a_{k,1} z_1 + \cdots + a_{k,n} z_n\big)\,.$$

Comme $a_1, \dots, a_r$ sont sur le bord de C, on a $\|x_k\|^2 = c_k$ pour tout $k \in [\![1, r]\!]$.

Si $I \subset [\![1, r]\!]$, d'après le lemme 1, on a $\sum_{i \in I} c_i^{1/2} a_i \in \lambda C$ avec $\lambda^2 = 3 \sum_{i \in I} c_i$, ce qui prouve (6) et termine la preuve la preuve du lemme.

□

Lemme 3. *Soit $\sum_{k \geq 1} c_k$ une série à termes strictement positifs convergente. Il existe une suite strictement croissante $0 = n_0 < n_1 < n_2 < \cdots$ telle que la série $\sum_{r \geq 0} \left(\sum_{k=n_r+1}^{n_{r+1}} c_k \right)^{1/2}$ converge.*

Démonstration. On suppose sans perte de généralité que $\sum_{k=1}^{+\infty} c_k = 1$. On pose $\ell_0 := 0$ et $n_0 := 0$. Comme $\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} c_k = 1$, il existe $n_1 \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\frac{1}{2^{\ell_0+1}} < \sum_{k=1}^{n_1} c_k \leq \frac{1}{2^{\ell_0}}.$$

Soit $\ell_1 \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{2^{\ell_1+1}} < \sum_{k=n_1+1}^{+\infty} c_k \leq \frac{1}{2^{\ell_1}}$. Par le même raisonnement que ci-dessus, il existe $n_2 \geq n_1 + 1$ tel que

$$\frac{1}{2^{\ell_1+1}} < \sum_{k=n_1+1}^{n_2} c_k \leq \frac{1}{2^{\ell_1}}.$$

Comme $0 < \sum_{k=n_2+1}^{+\infty} c_k < \frac{1}{2^{\ell_1+1}}$ (car $c_k > 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$), il existe $\ell_2 > \ell_1$ tel que $\frac{1}{2^{\ell_2+1}} < \sum_{k=n_2+1}^{+\infty} c_k \leq \frac{1}{2^{\ell_2}}$.

On construit donc par récurrence deux suites $(\ell_j)_{j \in \mathbb{N}}$ et $(n_j)_{j \in \mathbb{N}}$ strictement croissantes telles que

$$\frac{1}{2^{\ell_j+1}} < \sum_{k=n_j+1}^{+\infty} c_k \leq \frac{1}{2^{\ell_j}} \quad \text{et} \quad \frac{1}{2^{\ell_j+1}} < \sum_{k=n_j+1}^{n_{j+1}} c_k \leq \frac{1}{2^{\ell_j}} \tag{7}$$

De (7), on en déduit que $\left(\sum_{k=n_j+1}^{n_{j+1}} c_k \right)^{1/2} \leq \frac{1}{(\sqrt{2})^{\ell_j}}$, ce qui termine la preuve du lemme.

□

Nous pouvons maintenant montrer le théorème 4.

Démonstration. Soit $0 = n_0 < n_1 < n_2 < \cdots$ une suite strictement croissante telle que la série $\displaystyle\sum_{r\geq 0}\left(\sum_{k=n_r+1}^{n_{r+1}} c_k\right)^{1/2}$ converge (lemme 3).

D'après le lemme 2, pour tout $k \in [\![n_r+1, n_{r+1}]\!]$, on peut trouver des vecteurs $x_{n_r+1}, \ldots, x_{n_{r+1}}$ tels que

$$\forall I \subset [\![n_r+1, n_{r+1}]\!], \qquad \left\|\sum_{i\in I} x_i\right\|^2 \leq 3\sum_{i\in I} c_i.$$

Soit $\psi \in \mathscr{S}(\mathbb{N}^*)$. Soit $\varepsilon > 0$. Soit r assez grand tel que

$$\sum_{j=r}^{+\infty}\left(\sum_{k=n_j+1}^{n_{j+1}} c_k\right)^{1/2} \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Soit p tel que la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{p-1} x_{\psi(k)}$ contienne tous les x_k avec $k \leq n_r$. Ainsi, pour tout $q \geq p$, on a

$$\left\|\sum_{k=p}^{q} x_{\psi(k)}\right\| \leq \sum_{j=r}^{+\infty}\left\|\sum_{k=n_j+1}^{n_{j+1}} x_k\right\| \leq \sum_{j=r}^{+\infty}\left(3\sum_{k=n_j+1}^{n_{j+1}} c_k\right)^{1/2} \leq \varepsilon.$$

Comme E est complet, la série $\displaystyle\sum_{k\geq 1} x_{\psi(k)}$ converge. Cela étant vrai pour tout réarrangement, on en déduit que la série $\displaystyle\sum_{k\geq 1} x_k$ converge inconditionnellement.

□

Références

[1] S. Banach, *Théorie des Opérateurs Linéaires*, Warsaw, pp. 240, 1932.

[2] A. Dvoretzky, C. A. Rogers, *Absolute and Unconditional Convergence in Normed Linear Spaces*, Proc. Natl. Acad. Sci. U S A. 1950 Mar ; 36(3) : 192-197.

[3] S. Francinou, H. Gianella, S. Nicolas, *Oraux X-ENS, Algèbre 3*, Cassini.

[4] P. Rosenthal, *The remarkable theorem of Levy and Steinitz*, Amer. Math. Monthly 94 (1987), 342-351.