Existence de sous-groupes de $(\mathbb{R}, +)$ non triviaux et non dénombrables

Erik Thomas [*]

Résumé

Le but de cette note est de prouver l'existence d'un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ non trivial et non dénombrable. Nous donnons deux approches : une première en donnant un exemple explicite : l'ensemble des points de convergence absolue d'une série trigonométrique ; la seconde approche utilise le lemme de Zorn.

1 Introduction

C'est un exercice classique que de montrer qu'un sous-groupe G de $(\mathbb{R}, +)$ est soit nul, soit de la forme $a\mathbb{Z}$ avec $a > 0$ (lorsque $\inf(G \cap \mathbb{R}_+^*) > 0$), soit dense dans $\mathbb{R}$ (lorsque $\inf(G \cap \mathbb{R}_+^*) = 0$). Ainsi, il est facile de construire des groupes denses : il suffit de les prendre de la forme $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$ avec a et b linéairement indépendants dans $\mathbb{Q}$.

Mais tous ces exemples sont des groupes dénombrables. Une question paraît alors légitime : existe t-il des sous-groupes de $\mathbb{R}$ non triviaux et non dénombrables ?

Nous répondons à cette question par l'affirmative en donnant deux approches : la première donne un exemple explicite défini comme l'ensemble de convergence absolue d'une série trigonométrique, l'autre approche est non constructive et utilise le lemme de Zorn.

2 Un exemple à l'aide des séries trigonométriques

Proposition 2.1. *Nature algébrique de l'ensemble de convergence absolue d'une série trigonométrique de sinus.*

Soit $\sum_{n\geq 0} \rho_n \sin(a_n x)$ *une série trigonométrique.*

L'ensemble de convergence absolue cette série trigonométrique est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$.

Démonstration. On note

$$\mathscr{A} := \left\{ x \in \mathbb{R},\ \sum_{n\geq 0} |\rho_n \sin(a_n x)| < +\infty \right\}.$$

Il est clair que $0 \in \mathscr{A}$. Soit $(x, y) \in \mathscr{A}^2$, pour conclure, il suffit de remarquer que

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, \quad |\rho_n \sin(a_n (x - y))| &= |\rho_n \sin(a_n x)\cos(a_n y) - \rho_n \cos(a_n x)\sin(a_n y)| \\ &\leq |\rho_n \sin(a_n x)| + |\rho_n \cos(a_n y)|. \end{aligned}$$

□

Proposition 2.2. *Un sous-groupe non dénombrable.*

L'ensemble de converge absolue de la série trigonométrique $\sum_{n\geq 0} \sin(n!\pi x)$ *est un groupe non dénombrable et différent de* $\mathbb{R}$.

[*] erik.thomas@ens-rennes.fr

Cet exemple est donné par J. Arbault dans [2]. Nous avons un peu simplifié son approche. Voir aussi [4] pour un exposé détaillé sur les séries trigonométriques.

Avant de prouver la proposition 2.2, nous utiliserons le lemme suivant.

Lemme 2.1. *Décomposition factorielle d'un réel.*

Pour tout réel $x \in [0,1[$*, il existe une unique suite* $(a_n)_{n\geq 2}$ *vérifiant : pour tout* $n \geq 2$, $0 \leq a_n \leq n-1$*, la suite* $(a_n - (n-1))_{n\geq 2}$ *ne stationne pas à* 0 *et telle que* $x = \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{a_n}{n!}$.

Nous prouvons le lemme 2.1.

Démonstration. On procède par analyse/synthèse.

- *Analyse* :
  On suppose qu'une telle suite existe. Soit $n \geq 3$. On a :

$$\begin{aligned} n!\sum_{p=2}^{n-1}\frac{a_p}{p!} + a_n \leq n!x &= n!\sum_{p=2}^{n-1}\frac{a_p}{p!} + a_n + n!\sum_{p=n+1}^{+\infty}\frac{a_p}{p!} \\ &< n!\sum_{p=2}^{n-1}\frac{a_p}{p!} + a_n + n!\sum_{p=n+1}^{+\infty}\frac{p-1}{p!} \\ &< n!\sum_{p=2}^{n-1}\frac{a_p}{p!} + a_n + n!\sum_{p=n+1}^{+\infty}\left(\frac{1}{(p-1)!} - \frac{1}{p!}\right) \\ &< n!\sum_{p=2}^{n-1}\frac{a_p}{p!} + a_n + 1. \end{aligned}$$

  On notera que la première inégalité est stricte car la suite $(a_n - (n-1))_{n\geq 2}$ ne stationne pas à 0. Il s'ensuit que

$$\forall n \geq 3, \quad a_n = \lfloor n!x - n!\sum_{p=2}^{n-1}\frac{a_p}{p!}\rfloor.$$

  Pour $n = 2$, un calcul analogue montre que $a_2 = \lfloor 2x \rfloor$.
  Ainsi, si une telle suite $(a_n)_{n\geq 2}$ existe, elle est unique.

- *Synthèse* :
  Soit $(a_n)_{n\geq 2}$ définie par :

$$a_2 = \lfloor 2x \rfloor \quad \text{et} \quad \forall n \geq 3, \quad a_n = \lfloor n!x - n!\sum_{p=2}^{n-1}\frac{a_p}{p!}\rfloor. \tag{1}$$

  Par définition de la partie entière, on a

$$\forall n \geq 3, \quad x - \frac{1}{n!} \leq \sum_{p=2}^{n}\frac{a_p}{p!} < x. \tag{2}$$

  Ainsi, la série $\displaystyle\sum_{n\geq 2}\frac{a_n}{n!}$ converge et $x = \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{a_n}{n!}$. Pour montrer que $0 \leq a_n \leq n-1$, on procède par récurrence. Il est clair que $0 \leq a_2 = \lfloor 2x \rfloor \leq 1 = 2-1$. Soit $n \geq 3$. On suppose que

$$\forall k \in [\![2, n-1]\!], \quad 0 \leq a_k \leq k-1.$$

  Les lignes (1) et (2) assurent que $a_n \geq 0$. La ligne (2) permet d'écrire :

$$\begin{aligned} a_n &< n!x - n!\sum_{p=2}^{n-1}\frac{a_p}{p!} \\ &< n!\sum_{p=n}^{+\infty}\frac{a_p}{p!}. \end{aligned}$$

Les hypothèses de récurrence permettent alors d'affirmer que :

$$\begin{aligned} a_n &< n! \sum_{p=n}^{+\infty} \frac{p-1}{p!} \\ &< n! \sum_{p=n}^{+\infty} \left(\frac{1}{(p-1)!} - \frac{1}{p!} \right) \\ &< n! \times \frac{1}{(n-1)!} \\ &< n. \end{aligned}$$

Ceci termine la récurrence.
Il est reste à montrer que la suite $(a_n - (n-1))_{n \geq 2}$ ne stationne pas à 0. Supposons qu'il existe $N \geq 3$ tel que

$$\forall n \geq N, \quad a_n = n - 1.$$

On peut donc écrire

$$x = \sum_{p=2}^{+\infty} \frac{a_p}{p!} = \sum_{p=2}^{N-1} \frac{a_p}{p!} + \sum_{p=N}^{+\infty} \frac{p-1}{p!} = \sum_{p=2}^{N-1} \frac{a_p}{p!} + \frac{1}{(N-1)!} = \sum_{p=2}^{+\infty} \frac{b_p}{p!}$$

où l'on a posé

$$\forall p \geq 2, \quad b_p = \begin{cases} a_p & \text{si } p \leq N-1 \\ N-1 & \text{si } p = N \\ 0 & \text{si } p \geq N+1 \end{cases}.$$

Il est clair que pour tout $p \geq 2$, $0 \leq b_p \leq p-1$. Cela contredit l'unicité de la suite $(a_n)_{n \geq 2}$ établie lors de l'analyse.
On en déduit que la suite $(a_n - (n-1))_{n \geq 2}$ n'est pas stationnaire.

□

On revient à la preuve du théorème 2.2.

Démonstration. Soit

$$\mathscr{A} := \left\{ x \in \mathbb{R}, \sum_{n \geq 0} |\sin(n!\pi x)| < +\infty \right\}.$$

- D'après la proposition 2.1, $(\mathscr{A}, +)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$.
- Soit $x \in [0, 1[$, d'après le lemme 2.1, on peut écrire

$$x = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} \quad \text{et} \quad 0 \leq a_n \leq n-1.$$

Pour tout $n \geq 2$, on a

$$n!x = n! \sum_{p=2}^{n} \frac{a_p}{p!} + \frac{a_{n+1}}{n+1} + \frac{a_{n+2}}{(n+1)(n+2)} + n! \sum_{p=n+3}^{+\infty} \frac{a_p}{p!}.$$

Si l'on pose $\theta_n := n! \sum_{p=n+3}^{+\infty} \frac{a_p}{p!}$, on a

$$n!x = \frac{a_{n+1}}{n+1} + \frac{a_{n+2}}{(n+1)(n+2)} + \theta_n \pmod 1.$$

Par définition de a_n, on a

$$\forall n \geq 2, \quad 0 \leq \theta_n \leq n! \sum_{p=n+3}^{+\infty} \frac{p}{p!} = n! \sum_{p=n+2}^{+\infty} \frac{1}{p!}.$$

Il s'ensuit que

$$\theta_n \leq \frac{n!}{(n+2)!} \left(1 + \frac{1}{n+3} + \frac{1}{(n+3)(n+4)} + \frac{1}{(n+3)(n+4)(n+5)} + \cdots \right).$$

On pose $A_n := 1 + \dfrac{1}{n+3} + \dfrac{1}{(n+3)(n+4)} + \dfrac{1}{(n+3)(n+4)(n+5)} + \cdots < +\infty$. Il est clair que A_n est fini pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. On pose $A := A_0$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n \leq A$. On a alors

$$\forall n \geq 2, \quad \theta_n \leq \frac{A}{(n+1)(n+2)}. \tag{3}$$

Il s'ensuit que la série $\sum_{n\geq 2} \theta_n$ converge.

De plus, pour tout $n \geq 2$, on a : $0 \leq \dfrac{a_{n+2}}{(n+1)(n+2)} \leq \dfrac{a_{n+2}}{n+2}$. Ainsi, si la série $\sum_{n\geq 2} \dfrac{a_{n+1}}{n+1}$ converge, alors la série $\sum_{n\geq 2} \dfrac{a_{n+2}}{(n+1)(n+2)}$ converge. Le cas échéant, on a alors

$$|\sin(n!\pi x)| \underset{n\to+\infty}{=} \pi\frac{a_{n+1}}{n+1} + \pi\frac{a_{n+2}}{(n+1)(n+2)} + \pi\theta_n + \left(\frac{a_{n+1}}{n+1} + \frac{a_{n+2}}{(n+1)(n+2)} + \theta_n \right) \varepsilon_n \tag{4}$$

où $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$. Ainsi, la série $\sum_{n\geq 0} |\sin(n!\pi x)|$ converge dès que la série $\sum_{n\geq 2} \dfrac{a_{n+1}}{n+1}$ converge.

Pour prouver que $\mathscr{A}$ n'est pas dénombrable, il suffit de prouver que l'ensemble des réels de $[0,1[$ pour lesquels la série $\sum_{n\geq 2} \dfrac{a_{n+1}}{n+1}$ converge n'est pas dénombrable.

Pour tout $u \in \{0,1\}^{[\![2,+\infty[\![}$, on définit la suite $(\psi(u))_{n\geq 2}$ par :

$$\forall n \geq 2, \quad \psi(u)_n = \begin{cases} u_k & \text{si } n = 2^k \ (k \in \mathbb{N}^*) \\ 0 & \text{si } n \text{ n'est pas une puissance de } 2 \end{cases}.$$

Il est clair que l'application ψ ainsi définie est injective et pour tout $u \in \{0,1\}^{[\![2,+\infty[\![}$, la série $\sum_{n\geq 2} \dfrac{\psi(u)_n}{n}$ converge et pour tout $n \geq 2$, $0 \leq \psi(u)_n \leq n-1$.

Comme $\{0,1\}^{[\![2,+\infty[\![}$ n'est pas dénombrable, l'ensemble des suites pour lesquelles la série $\sum_{n\geq 2} \dfrac{a_n}{n}$ converge n'est pas dénombrable.

- Si $x = \sum_{n=2}^{+\infty} \dfrac{1}{n!}$ (ainsi $a_n = 1$ pour $n \geq 2$), alors les lignes (3) et (4) donnent $|\sin(n!\pi x)| \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\pi}{n}$. La série $\sum_{n\geq 2} |\sin(n!\pi x)|$ diverge, ainsi $\mathscr{A} \neq \mathbb{R}$.

$\square$

Nous allons maintenant montrer que $\mathscr{A}$ est un groupe mesurable de mesure nulle. Pour cela, nous utiliserons le résultat suivant.

Théorème 2.1. *Théorème de Steinhaus.*

Soit A une partie mesurable de $\mathbb{R}$ de mesure strictement positive. Alors, $A - A := \left\{a - b,\ (a,b) \in A^2\right\}$ contient un voisinage de 0.

Nous renvoyons la preuve à [3].

Proposition 2.3. *$\mathscr{A}$ est mesurable et de mesure nulle.*

Démonstration. $\mathscr{A}$ est mesurable car c'est l'ensemble de convergence simple d'une suite de fonctions mesurables.

On note λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. Si $\lambda(A) > 0$, alors d'après le théorème 2.1, $\mathscr{A} - \mathscr{A}$ contiendrait un voisinage de 0.

Or, $\mathscr{A}$ est un groupe, donc on a $\mathscr{A} - \mathscr{A} = \mathscr{A}$. Ainsi, si $\mathscr{A}$ contenait un voisinage de 0, on aurait $\mathscr{A} = \mathbb{R}$, ce qui est exclu par la proposition 2.2.

□

3 Une approche non constructive

L'idée est de prendre le « plus grand » groupe qui satisfait une condition donnée et de montrer que ce sous-groupe n'est pas dénombrable. Pour assurer l'existence d'un tel groupe, on utilise souvent un argument de maximalité, donc le lemme de Zorn.

Lemme 3.1. *Lemme de Zorn.*
Soit $(A, \leq)$ un ensemble ordonné. On suppose que toute partie totalement ordonnée (appelée chaîne) admet un majorant. Alors, E admet un élément maximal.

Le lemme de Zorn a de très nombreuses applications. Parmi les plus célèbres, on peut citer (la liste est loin d'être exhaustive) :

1. Le théorème d'Hahn-Banach qui assure le prolongement des formes linéaires ;
2. le théorème de Steinitz qui assure que tout corps admet une clôture algébrique ;
3. le théorème de Krull qui montre que tout idéal d'un anneau commutatif est contenu dans un idéal maximal ;
4. l'existence de base pour tout espace vectoriel ;
5. l'existence de parties de $\mathbb{R}$ non Lebesgue mesurables.

Proposition 3.1. *Il existe un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ non dénombrable et non trivial.*

Démonstration. Soit
$$\mathscr{A} := \{G \text{ sous-groupe de } (\mathbb{R}, +) \text{ tel que } G \cap \pi\mathbb{Q} = \{0\}\}$$
que l'on ordonne avec la relation d'ordre d'inclusion $\subset$. Il est clair que $\mathscr{A} \neq \varnothing$.

Soit $(G_i)_{i \in I}$ une chaîne d'éléments de $\mathscr{A}$ et soit $\mathscr{G} := \bigcup_{i \in I} G_i$. Soit $(x, y) \in \mathscr{G}^2$: il existe $i, j \in I$ tels que $x \in G_i$ et $y \in G_j$.

Par définition de la famille $(G_i)_{i \in I}$, on a $G_i \subset G_j$ ou $G_j \subset G_i$. Par exemple, on suppose que $G_i \subset G_j$. Comme $(G_j, +)$ un est un groupe, on a $x - y \in G_j$, donc $x - y \in \mathscr{G}$, ainsi $(\mathscr{G}, +)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$.

Il est clair que $\mathscr{G} \cap \pi\mathbb{Q} = \{0\}$. Ainsi, $(\mathscr{G}, +)$ est un majorant de la chaîne $(G_i)_{i \in I}$.

D'après le lemme de Zorn, $\mathscr{A}$ admet un élément maximal pour la relation $\subset$ que l'on note G. Il est clair que $G \neq \mathbb{R}$ car $G \cap \pi\mathbb{Q} = \{0\}$.

Supposons alors que G soit dénombrable, on écrit $G = \{x_n,\ n \in \mathbb{N}^*\}$. Soit
$$E := \mathrm{Vect}_{\mathbb{Q}}(G) = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \left\{ \sum_{i=1}^{n} q_i x_i,\ (q_1, \ldots, q_n) \in \mathbb{Q}^n \right\}.$$
Comme $\mathbb{Q}$ est dénombrable, E l'est aussi comme réunion dénombrable d'ensembles dénombrables : on écrit $E = \{y_n,\ n \in \mathbb{N}^*\}$. Soit
$$F := E + \pi\mathbb{Q} = \{e + \pi r,\ (e, r) \in E \times \mathbb{Q}\}.$$
Comme $F = \bigcup_{n=1}^{+\infty} (y_n + \pi\mathbb{Q})$, F est alors dénombrable et soit $x \in \mathbb{R} \backslash F$ (notons que $\mathbb{R} \backslash F$ est bien non vide) et $H := \langle G \cup \{x\} \rangle$ le sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ engendré par $G \cup \{x\}$. Il est clair que $G \subset H$ et $G \neq H$.

Soit $y \in H \cap \pi\mathbb{Q}$ que l'on suppose non nul : il existe $g \in G$, $m \in \mathbb{Z}$ et $r \in \mathbb{Q}$ tels que

$$y = g + mx = r\pi.$$

Notons que $m \neq 0$. En effet, si $m = 0$, on aurait $g = r\pi$. Or $G \cap \pi\mathbb{Q} = \{0\}$, donc $g = r = 0$, puis $y = 0$, ce qui est exclu. Ainsi $m \neq 0$ et on peut écrire $x = \frac{r}{m}\pi - \frac{1}{m}g \in F$, ce qui est de nouveau exclu par choix de x, ainsi $m = 0$, ce qui est impossible.

On a montré que $H \cap \pi\mathbb{Q} = \{0\}$, ainsi $H \in \mathscr{A}$. Cela contredit la maximalité de G. On en déduit que G n'est pas dénombrable.

$\square$

Remarque 1. La partie 3, bien que moins technique que la partie 2, ne doit pas cacher l'utilisation de l'axiome du choix via le lemme de Zorn : elle ne permet pas donner d'exemple concret de sous-groupe strict de $(\mathbb{R}, +)$ non dénombrable.

Pour plus de détails sur le lemme de Zorn et notamment pour une preuve de son équivalence avec l'axiome du choix, nous renvoyons à [1].

Références

[1] P. Ageron, *Logique, ensembles, catégories : Le point de vue constructif.* Ellipses, 2000.

[2] J. Arbault, *Sur l'ensemble de convergence absolue d'une série trigonométrique.* Bulletin de la S.M.F., tome 80, pp. 253-317, 1952.

[3] H. Steinhaus, *Sur les distances des points des ensembles de mesure positive*, Fund. Math. 1, 1920, pp. 93-104.

[4] A. Zygmund, *Trigonometric Series.* Cambridge Press University, Cambridge, England, 1979.