Sur l'inverse des matrices

Erik Thomas[*]

Résumé

Dans cet article, on montre que si $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$, il existe un unique polynôme P de degré P_A inférieur ou égal à $\deg(\pi_A) - 1$ tel que $P_A(A) = A^{-1}$.

On caractérise les matrices de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ en lesquelles l'application $A \longmapsto P_A$ est continue et on montre que l'application $A \longmapsto \deg(P_A)$ est semi-continue inférieurement.

1 Introduction

Pour le moment, $\mathbf{K}$ est un corps quelconque.

Pour tout matrice $A \in \mathrm{M}_n(\mathbf{K})$, on note π_A son polynôme minimal et χ_A son polynôme caractéristique (unitaire).

Avant de passer à l'énoncé de nos résultats, on rappelle le résultat classique d'algèbre linéaire suivant.

Proposition 1.1. *Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$. Il existe un unique $P \in \mathbf{K}[X]$ tel que $\deg(P) \leq \deg(\pi_A) - 1$ vérifiant $A^{-1} = P(A)$.*

Démonstration. — L'unicité est claire, s'il existait deux polynômes P et Q de degré inférieur ou égal à $\deg(\pi_A) - 1$, on aurait $P(A) = Q(A) = A^{-1}$, puis $(P - Q)(A) = 0$, ainsi π_A diviserait $P - Q$. Pour des raisons de degré, on a $P - Q = 0$.

— Notons que $\pi_A(0) \neq 0$. En effet, si $\pi_A(0) = 0$, on pourrait écrire $\pi_A = XQ$. Comme A est inversible, on aurait $Q(A) = 0$. Or, $\deg(Q) < \deg(\pi_A)$ et $Q \neq 0$, cela contredit la définition de π_A.

On écrit alors $\pi_A = \sum_{k=0}^{d} a_k X_k$ avec $a_0 \neq 0$. On a alors

$$\pi_A(A) = 0 \iff A\left(-\frac{1}{a_0}\sum_{k=1}^{d} a_k A^{k-1}\right) = \mathrm{I}_n.$$

□

Définition 1.1. *Pour $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$, on définit P_A l'unique polynôme de degré inférieur ou égal à $\deg(\pi_A) - 1$ tel que $A^{-1} = P_A(A)$.*

Remarque 1. La preuve de la proposition 1.1 assure que $P_A = \dfrac{\pi_A(0) - \pi_A}{\pi_A(0)X}$.

Voici nos principaux résultats. Une norme est fixée sur $\mathrm{M_n}(\mathbf{C})$, par exemple $A \longmapsto \mathrm{tr}\left(A\overline{A}^T\right)^{1/2}$. Toutes les notions de topologie de $\mathrm{M}_n(\mathbf{C})$ s'entendent pour cette norme.

Proposition 1.2. *L'application $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{C}) \longmapsto \deg(P_A)$ est semi-continue inférieurement.*

Proposition 1.3. *L'application $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{C}) \longmapsto P_A$ est continue sur l'ouvert des matrices dont le polynôme minimal est de degré n et discontinue ailleurs.*

[*] `erik.thomas@ens-rennes.fr`

2 Preuve des résultats

La preuve de la proposition 1.2 est rapide.

Démonstration. Comme $\deg(P_A) = \deg(\pi_A) - 1$, il suffit de montrer que $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{C}) \longmapsto \deg(\pi_A)$ est semi-continue inférieurement.

On remarque que $\deg(\pi_A) \geq d \iff \left(\mathrm{I}_n, A, \ldots, A^{d-1}\right)$ est libre. Or, pour B assez proche de A, la famille $\left(\mathrm{I}_n, B, \ldots, B^{d-1}\right)$ reste libre, ainsi $\deg(\pi_B) \geq d$.

Ainsi, l'ensemble $\{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{C}),\ \deg(\pi_A) \geq d\}$ est un ouvert de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$, donc $A \longmapsto \deg(\pi_A)$ est semi-continue inférieurement sur $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$.

□

Avant de prouver la proposition 1.3, nous aurons besoin de résultats intermédiaires.

Proposition 2.1. *Réduction de Jordan*

Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbf{C})$. On note $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ les valeurs propres de A. Alors, A est semblable à la matrice suivante appelée réduite de Jordan de A

$$\begin{pmatrix} J_{1,1}(\lambda_1) & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & J_{1,k_1}(\lambda_1) & & & & & \\ & & & \ddots & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & J_{r,1}(\lambda_r) & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & J_{r,k_r}(\lambda_r) \end{pmatrix}$$

où les $J_{i,j}$ ($j \in [\![1, k_i]\!]$) sont les blocs de Jordan de la forme

$$J_{i,j} = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_i & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_i \end{pmatrix}.$$

Remarque 2. Une même valeur propre peut avoir plusieurs blocs de Jordan.

Remarque 3. La réduction reste vraie dans n'importe quel corps sous l'hypothèse que χ_A est scindé.

La preuve est classique et est renvoyée à [1].

On en déduit les deux propositions suivantes intéressantes en elles-mêmes.

Proposition 2.2. *Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbf{C})$ dont on note*

$$\begin{pmatrix} J_{1,1}(\lambda_1) & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & J_{1,k_1}(\lambda_1) & & & & & \\ & & & \ddots & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & J_{r,1}(\lambda_r) & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & J_{r,k_r}(\lambda_r) \end{pmatrix}$$

sa réduite de Jordan. Pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, on note α_i la taille du plus grand bloc de Jordan associé à la valeur propre λ_i. Le polynôme minimal de A est de degré $\displaystyle\sum_{i=1}^{r} \alpha_i$.

Démonstration. On commence par remarquer que le polynôme minimal d'un bloc de Jordan $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$ de taille k est $(X-\lambda)^k$.

Soit P un polynôme annulateur de A. Par calcul par blocs, on a

$$\begin{pmatrix} P\left(J_{1,1}(\lambda_1)\right) & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & P\left(J_{1,k_1}(\lambda_1)\right) & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & P\left(J_{r,1}(\lambda_r)\right) & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & P\left(J_{r,k_r}(\lambda_r)\right) \end{pmatrix} = 0.$$

On a alors

$$\forall i \in [\![1,r]\!],\ \forall j \in [\![1,k_i]\!], \quad P\left(J_{i,j}(\lambda_i)\right) = 0.$$

Ainsi P est un polynôme annulateur de $J_{i,j}(\lambda_i)$ pour tout $i \in [\![1,r]\!]$ et pour tout $j \in [\![1,k_i]\!]$.

En particulier, $(X-\lambda_i)^{\alpha_i}$ divise P, puis $(X-\lambda_1)^{\alpha_1}\cdots(X-\lambda_r)^{\alpha_r}$ divise P.

Comme $(X-\lambda_1)^{\alpha_1}\cdots(X-\lambda_r)^{\alpha_r}$ annule A, on en déduit que $\pi_A = (X-\lambda_1)^{\alpha_1}\cdots(X-\lambda_r)^{\alpha_r}$.

□

Proposition 2.3. *Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbf{C})$.*

$\deg(\pi_A) = n$ si, et seulement si, toutes les valeurs propres de A admettent un unique bloc de Jordan.

Démonstration. ($\Longleftarrow$) On écrit

$$\begin{pmatrix} J_1(\lambda_1) & & & & \\ & J_2(\lambda_2) & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & J_r(\lambda_r) \end{pmatrix}$$

la réduite de Jordan de A. Si P est un polynôme annulateur de A, on a

$$\begin{pmatrix} P\left(J_1(\lambda_1)\right) & & & & \\ & P\left(J_2(\lambda_2)\right) & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & P\left(J_r(\lambda_r)\right) \end{pmatrix}.$$

En notant α_i la taille du bloc de Jordan $J_i(\lambda_i)$ et en remarquant que $\displaystyle\sum_{i=1}^{r} \alpha_i = n$, $(X-\lambda_1)^{\alpha_1}\cdots(X-\lambda_r)^{\alpha_r}$ divise π_A puis $\deg(\pi_A) = n$.

($\Longrightarrow$) Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ les valeurs propres de A. Supposons que l'une de ces valeurs propres aient au moins deux blocs de Jordan, par exemple λ_1.

D'après la proposition 2.2, α_1 (la taille du plus grand bloc de Jordan pour la valeur propre λ_1) est strictement plus petit que le nombre de λ_1 sur la diagonale, ainsi $\deg(\pi_A) < n$.

□

Nous passons à la preuve de la proposition 1.3.

Démonstration. — La preuve de la proposition 1.2 assure que l'ensemble des matrices dont le polynôme minimal est de degré n est un ouvert de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$. Soit A une telle matrice et soit $(A_p)_{p\in\mathbf{N}}$ une suite $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$. Quitte à enlever un nombre fini d'éléments de la suite, on peut supposer que pour tout $p \in \mathbf{N}$, $\deg\left(\pi_{A_p}\right) = n$.

Il s'ensuit que pour tout $p \in \mathbf{N}$, $\chi_{A_p} = \pi_{A_p}$. Or, les coefficients du polynôme caractéristique dépendent polynomialement de ceux de la matrice, il s'ensuit que $\lim\limits_{p\to+\infty} \chi_{A_p} = \chi_A$. Or, $\deg(\pi_A) = n$, donc $\pi_A = \chi_A$.

Il s'ensuit donc $\lim\limits_{p\to+\infty} \pi_{A_p} = \pi_A$.

Notons que $\lim\limits_{p\to+\infty} \pi_{A_p}(0) = \pi_A$, donc $\lim\limits_{p\to+\infty} P_{A_p} = P_A$, ce qui prouve la continuité de $M \longmapsto P_M$ en A.

— Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ une matrice dont le polynôme minimal est de degré inférieur ou égal à $n-1$. D'après la proposition 2.3, il existe une valeur propre de A ayant au moins deux blocs de Jordan, disons λ. Comme $\deg(\pi_A) \leq n-1$, d'après la proposition 2.3, la réduite de Jordan de A pour au moins une valeur propre, par exemple λ_1, admet au moins deux blocs de Jordan. On écrit alors la réduite de Jordan de B

$$\begin{pmatrix} J_{1,1}(\lambda_1) & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & J_{1,k_1}(\lambda_1) & & \\ & & & J_{2,1}(\lambda_2) & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}.$$

On note aussi P une matrice de passage.

Soit $(A_p)_{p\in\mathbf{N}^*}$ définie par :

$$A_p = P \begin{pmatrix} J_{1,1}(\lambda_1) & 1/p & & & & & & \\ & J_{1,2}(\lambda_1) & 1/p & & & & & \\ & & \ddots & \ddots & & & & \\ & & & J_{1,k_1-1}(\lambda_1) & 1/p & & & \\ & & & & J_{1,k_1}(\lambda_1) & & & \\ & & & & & J_{2,1}(\lambda_2) & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & J_{r,k_r}(\lambda_r) \end{pmatrix} P^{-1}$$

où les $1/p$ ont été intercalés entre chaque bloc de Jordan pour la valeur propre λ_1, i.e.

$$\begin{pmatrix} J_{1,1}(\lambda_1) & 1/p & & & \\ & J_{1,2}(\lambda_1) & 1/p & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & J_{1,k_1-1}(\lambda_1) & 1/p \\ & & & & J_{1,k_1}(\lambda_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & & & & & & & & & \\ & \ddots & \ddots & & & & & & & & \\ & & \lambda_1 & 1 & & & & & & & \\ & & & \lambda_1 & 1/p & & & & & & \\ & & & & \lambda_1 & 1 & & & & & \\ & & & & & \ddots & \ddots & & & & \\ & & & & & & \lambda_1 & 1 & & & \\ & & & & & & & \lambda_1 & 1/p & & \\ & & & & & & & & \lambda_1 & 1 & \\ & & & & & & & & & & \ddots \end{pmatrix}.$$

Il est clair que $(A_p)_{p\in\mathbf{N}^*}$ converge vers A.

On note

$$\chi_A = \chi_{A_p} = (X-\lambda_1)^{\beta_1} \cdots (X-\lambda_r)^{\beta_r}.$$

D'après la proposition 2.2, $\deg(\pi_A) = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i$ où pour tout $\in [\![1, r]\!]$, α_i est la taille du plus grand bloc de Jordan de la valeur propre λ_i.
Comme A_p est semblable à

$$\begin{pmatrix} J_{1,1}(\lambda_1) & 1 & & & & & & \\ & J_{1,2}(\lambda_1) & 1 & & & & & \\ & & \ddots & \ddots & & & & \\ & & & J_{1,k_1-1}(\lambda_1) & 1 & & & \\ & & & & J_{1,k_1}(\lambda_1) & & & \\ & & & & & J_{2,1}(\lambda_2) & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & J_{r,k_r}(\lambda_r) \end{pmatrix},$$

son polynôme minimal est de degré $\beta_1 + \sum_{i=2}^{r} \alpha_i > \sum_{i=1}^{r} \alpha_i$ car la valeur propre λ_1 a au moins deux blocs de Jordan.
La suite $\left(\pi_{A_p}\right)_{p\in\mathbf{N}^*}$ est constante, la suite $\left(P_{A_p}\right)_{p\in\mathbf{N}^*}$ l'est aussi et $\deg\left(P_{A_p}\right) > \deg(P_A)$, donc la suite $\left(P_{A_p}\right)_{p\in\mathbf{N}^*}$ ne peut pas converger vers P_A.

$\square$

Références

[1] M. Cognet, *Algèbre linéaire*, Bréal.