Liens entre les inégalités isopérimétriques et les inégalités de Cheeger

Erik Thomas*

Résumé

Dans cet article, nous nous intéressons aux liens entre les inégalités isopérimétriques et les inégalités de type Cheeger. Nous montrons que sous certaines hypothèses, ces deux types d'inégalités sont équivalentes.

Nous retrouvons alors les inégalités de Wirtinger et énonçons d'autres inégalités intégrales.

Nous terminons l'article en donnant deux généralisations possibles pour les mesures ne satisfaisant pas une inégalité de type Cheeger.

1 Introduction

1.1 Historique et but de l'article

Lorsque la reine Didon arriva sur les côtes tunisiennes pour y fonder une ville qui deviendra Carthage, les indigènes lui proposèrent de lui donner des terres qui pourraient tenir dans la peau d'un bœuf.

La reine découpa la peau d'un bœuf en très fines lanières et entoura une zone circulaire car, à périmètre donné, le cercle est la figure géométrique qui maximise l'aire.

Les grecs de l'Antiquité n'ignoraient pas ce résultat et savaient que pour une «figure» géométrique d'aire $\mathscr{A}$ et de périmètre $\mathscr{P}$, on a :

$$\mathscr{P}^2 \geq 4\pi\mathscr{A} \tag{1}$$

avec égalité pour les disques.

De manière générale, si $(X, \mathscr{X}, \mu)$ est un espace probabilisé, on dit que μ satisfait une inégalité isopérimétrique s'il existe $c > 0$ tel que

$$\forall A \in \mathscr{X}, \quad \mu^+(A) \geq c \min\{\mu(A), 1 - \mu(A)\},$$

où $\mu^+(A)$ est le «périmètre» de A (mesure du bord, voir la définition 2.5).

L'inégalité (1) peut être démontrée en utilisant les séries de Fourier et la formule de Stokes, par exemple. Une autre preuve, plus intéressante pour nous, utilise l'inégalité de Wirtinger

$$\forall f \in \mathscr{C}^1_{\mathrm{pm}}(\mathbb{R}), \quad \int_0^1 |f'(t)|\,\mathrm{d}t \geq 4\int_0^1 |f(t) - m_f|\,\mathrm{d}t$$

où m_f est une valeur médiane de f pour la mesure de Lebesgue sur $[0, 1]$ (voir définition 2.3).

L'idée consiste à prendre pour f la fonction indicatrice d'un ensemble, ou du moins, une suite qui converge vers l'indicatrice d'un ensemble et faire un passage à la limite. L'inégalité s'appelle une forme fonctionnelle de l'inégalité isopérimétrique.

Nous prouverons l'inégalité de Wirtinger plus loin, mais en partant de l'inégalité isopérimétrique, voir la proposition 3.1 et le corollaire 3.1.

Dans un premier temps, nous introduirons la notion de constante isopérimétrique pour une mesure borélienne de probabilité sur $\mathbb{R}$.

Nous ferons le lien entre les problèmes isopérimétriques et les problèmes de type «Cheeger» (qui généralise l'inégalité de Wirtinger) : trouver une constante $c > 0$ telle que

$$\forall f \in \mathscr{C}^1_{\mathrm{pm}}(\mathbb{R}), \quad \int_{\mathbb{R}} |f'|\,\mathrm{d}\mu(t) \geq c\int_{\mathbb{R}} |f - m_f|\,\mathrm{d}\mu(t).$$

*erik.thomas@ens-rennes.fr

Plus précisément, nous montrerons que ces problèmes sont équivalents.

Dans une seconde partie, nous traiterons le cas de quelques mesures de $\mathbb{R}_+$: nous calculerons les fonctions isopérimétriques associées à ces mesures. Cela permettra d'énoncer de jolies inégalités intégrales (voir le corollaire 3.3).

Dans une troisième partie, nous traiterons le cas de certaines mesures qui n'admettent pas d'inégalité isopérimétrique ou de manière équivalente, qui n'admettent pas d'inégalité de type Cheeger.

Nous donnerons deux stratégies qui permettent de répondre à cette difficulté : la première consiste à énoncer l'inégalité de Cheeger dans L^1 faible (voir la définition 4.1), une deuxième approche consiste à «pondérer» la mesure (voir la définition 4.2).

Cet article constitue donc une petite introduction aux approches modernes des problèmes isopérimétriques. Le lecteur intéressé par ces problématiques pourra consulter la littérature classique dont nous nous sommes inspirés. Nous citons (et nous nous excusons auprès des autres que nous oublions) [1], [2] et [6].

1.2 Notations utilisées

- Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$, on notera $\mathscr{O}(I)$ l'ensemble des intervalles ouverts inclus dans I.
- Si (X, τ) est un espace topologique, on note $\mathscr{B}(X)$ la tribu sur X des boréliens : c'est la plus petite tribu contenant tous les ouverts.
- Soient $(X, \mathscr{X}, \mu)$ est une espace mesuré et $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable. Alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$, l'ensemble $\{f > t\} := \{x \in X,\ f(x) > t\}$ est mesurable et on notera $\mu(\{f > t\})$ sa mesure.
- Si $(X, \mathscr{X}, \mu)$ est un espace mesuré et $f : X \longrightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction mesurable, on notera $\displaystyle\int_X f \mathrm{d}\mu \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ l'intégrale (de Lebesgue) de la fonction f par rapport à la mesure μ.
- Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$, l'ensemble $\mathscr{C}^1_{\mathrm{pm}}(I)$ désigne l'ensemble des fonctions $\mathscr{C}^1$ par morceaux, i.e. c'est l'ensembles des fonctions continues sur I et pour tout segment $[a, b] \subset I$, il existe une subdivision $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n < x_{n+1} = b$ telle que la restriction à chaque intervalle $]a_i, a_{i+1}[$ se prolonge en une fonction $\mathscr{C}^1$ sur $[a_i, a_{i+1}]$.
- Toutes les mesures considérées ici seront positives.
- Si $A \subset \mathbb{R}$, on notera ∂A le bord de A par $\partial A := \mathrm{adh}(A) \setminus (\mathrm{int}(A))$: c'est l'adhérence privé de l'intérieur.

2 Prolégomènes

2.1 Généralités sur les mesures

Nous ne ferons pas un exposé détaillé sur la théorie de la mesure, nous introduisons simplement les notions que nous utiliserons.

Le lecteur intéressé pourra consulter [7].

Définition 2.1. *Mesure borélienne.*
Soit $\mu : \mathscr{B}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$. On dit que μ est une mesure borélienne sur $\mathbb{R}$ si :

- $\mu(\varnothing) = 0$ *;*
- *pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments deux à deux disjoints de $\mathscr{B}(\mathbb{R})$,*

$$\mu\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mu(A_n),$$

l'égalité ayant lieu dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$.

Définition 2.2. *Mesure de probabilité.*
Soit μ une mesure borélienne sur $\mathbb{R}$.
On dit que μ est une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}$ si $\mu(\mathbb{R}) = 1$.

Proposition 2.1. *Théorème de convergence monotone.*

Soit μ une mesure borélienne de probabilité sur $\mathbb{R}$.

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante (pour l'inclusion) de boréliens de $\mathbb{R}$.

Alors,

$$\mu\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mu(A_n).$$

Démonstration. La preuve, très classique, est renvoyée à [7].

□

Définition 2.3. *Valeur médiane.*

Soit $(X, \mathscr{X}, \mu)$ un espace probabilisé. Soit $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable. Soit $m \in \mathbb{R}$.

On dit que m est ***une*** *valeur médiane de f pour la mesure μ si :*

$$\forall t \geq m, \quad \mu(\{f > t\}) \leq \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \forall t < m, \quad \mu(\{f > t\}) > \frac{1}{2}.$$

Par abus, nous dirons parfois «on suppose $m_f = 0$», il faut comprendre que l'on suppose que 0 est une valeur médiane de f pour la mesure μ.

Proposition 2.2. *Minimisateurs L^2.*

Soit $(X, \mathscr{X}, \mu)$ un espace probabilisé. Soit $f \in L^2(\mu)$.

Alors,

$$\inf_{c\in\mathbb{R}} \int_X (f(x) - c)^2 \,\mathrm{d}\mu(x) = \int_X \left(f(x) - \int_X f(x)\,\mathrm{d}\mu(x)\right)^2 \mathrm{d}\mu(x).$$

Démonstration. Soit $f \in L^2(\mu)$. Comme μ est une mesure de probabilité, d'après l'inégalité de Hölder, on a

$$\int_X |f| \,\mathrm{d}\mu = \int_X |f| \times 1 \leq \sqrt{\int_X f^2 \mathrm{d}\mu} < +\infty,$$

car $f \in L^2(\mu)$, ainsi $f \in L^1(\mu)$. Cela permet de définir sur $\mathbb{R}$ la fonction φ par : pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\varphi(t) := \int_X (f(x) - t)^2 \,\mathrm{d}\mu(x) = t^2 - 2t \int_X f(x)\,\mathrm{d}\mu(x) + \int_X f^2(x)\,\mathrm{d}\mu(x).$$

φ est un trinôme dont le minimum est atteint pour $t := \displaystyle\int_X f(x)\,\mathrm{d}\mu(x)$.

□

2.2 Mesures de Hausdorff et mesures de bord

Dans cette sous-partie, nous renvoyons à [3] pour un exposé plus détaillé sur la mesure de Hausdorff.

Définition 2.4. *Mesure de Hausdorff.*

Soient $s > 0$, $\delta > 0$ et $d \in \mathbb{N}^*$. Soit $A \subset \mathbb{R}^d$.

On définit $\mathscr{H}^s_\delta(A)$ par

$$\mathscr{H}^s_\delta(A) := \inf\left\{\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha(s)\left(\frac{\operatorname{diam}(A_n)}{2}\right)^s,\ A \subset \bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n,\ \operatorname{diam}(A_n) \leq \delta\right\}$$

où $\alpha(s) := \dfrac{\pi^{\frac{s}{2}}}{\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right)}$ et Γ est la fonction définie par

$$\forall x > 1, \quad \Gamma(x) := \int_0^{+\infty} t^{x-1} \mathrm{e}^{-t} \mathrm{d}t.$$

Lorsque $s \in \mathbb{N}^*$, $\alpha(s)$ est le volume de $\mathbb{S}^{s-1}$: la boule de centre 0 et de rayon 1 de $\mathbb{R}^s$ pour la norme euclidienne.

On définit enfin $\mathscr{H}^s(A)$ par :

$$\mathscr{H}^s(A) := \lim_{\delta\to 0^+} \mathscr{H}^s_\delta(A).$$

Proposition 2.3. *Mesure $\mathscr{H}^0$.*

Soit $d \in \mathbb{N}^*$. La mesure $\mathscr{H}^0$ est la mesure de comptage sur $\mathbb{R}^d$, c'est-à-dire

$$\forall A \in \mathscr{P}\left(\mathbb{R}^d\right), \quad \mathscr{H}^0(A) = \begin{cases} +\infty & \text{si } A \text{ est infini} \\ \operatorname{card}(A) & \text{si } A \text{ est fini} \end{cases}.$$

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{R}^d$. Pour tout $\delta > 0$, le singleton $\{x\}$ est le plus petit δ-recouvrement de $\{x\}$, donc

$$\mathscr{H}^0_\delta(\{x\}) = \alpha(1)\left(\frac{\operatorname{diam}(\{x\})}{2}\right)^0 = 1.$$

En faisant tendre δ vers 0, on trouve que $\mathscr{H}^0(\{x\}) = 1$. Or, $\mathscr{H}^0$ est une mesure, ainsi si E est une partie finie ou dénombrable de $\mathbb{R}^d$, on peut écrire $E = \bigcup\limits_{x \in E} \{x\}$, d'où

$$\mathscr{H}^0(E) = \sum_{x \in E} \mathscr{H}^0(\{x\}) = \sum_{x \in E} 1.$$

On en déduit que pour toute partie dénombrable E de $\mathbb{R}^d$, on a

$$\mathscr{H}^0(E) = \begin{cases} \operatorname{card}(E) & \text{si } E \text{ est fini} \\ +\infty & \text{si } E \text{ est infini} \end{cases}.$$

Si E n'est pas dénombrable, il existe une partie D dénombrable $D \subset E$, de sorte que

$$\mathscr{H}^0(E) = +\infty.$$

$\square$

Définition 2.5. *Mesure de bord.*

Soit μ une mesure borélienne sur $\mathbb{R}$ à densité dont on note g la densité. On définit une mesure de bord μ^+ associée à μ par :

$$\forall A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}), \quad \mu^+(A) := \int_{\partial A} g(x)\, \mathrm{d}\mathscr{H}^0(x).$$

Proposition 2.4. *Caractérisation des ouverts de $\mathbb{R}$.*

Soit O un ouvert non vide de $\mathbb{R}$.

Il existe deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq b_n$ telles que :

$$O = \bigcup_{n=0}^{+\infty}]a_n, b_n[$$

où les intervalles $]a_n, b_n[$ sont deux à deux disjoints.

Démonstration. Comme O est ouvert, on écrit O comme réunion de ses composantes connexes non triviales (non vides) $O = \bigcup\limits_{i \in I} O_i$ où les O_i sont des intervalles ouverts non vides de $\mathbb{R}$.

Les intervalles O_i sont non vides et par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, il existe dans O_i un rationnel r_i.

On construit ainsi une injection de I vers $\mathbb{Q}$, il s'ensuit que I est au plus dénombrable.

$\square$

Proposition 2.5. *Mesure de bord d'un ouvert de $\mathbb{R}$.*

Soit μ une mesure borélienne sur $\mathbb{R}$ à densité dont on note g la densité. On suppose g continue sur $\mathbb{R}$. Soit O un ouvert de $\mathbb{R}$.

- *Si* $O = \bigcup_{n=0}^{N}]a_n, b_n[$ *(réunion finie d'intervalles deux à deux disjoints, tous non vides), alors*

$$\mu^+ (O) = \sum_{x \in \bigcup_{n=0}^{N} \{a_n, b_n\}} g(x).$$

En particulier,

$$\mu^+ (O) \geq \sum_{n=0}^{N} \mu^+ (]a_n, b_n[) = \sum_{n=0}^{N} (g(a_n) + g(b_n)).$$

- *Si* $O = \bigcup_{n=0}^{+\infty}]a_n, b_n[$ *(réunion infinie d'intervalles deux à deux disjoints tous non vides), alors*

$$\mu^+ (O) \geq \sum_{x \in \bigcup_{n=0}^{+\infty} \{a_n, b_n\}} g(x).$$

Démonstration. Soit O un ouvert non vide de $\mathbb{R}$.

- On suppose que O est une réunion finie de ses composantes connexes : on écrit $O = \bigcup_{n=1}^{N}]a_n, b_n[$ avec les intervalles $]a_n, b_n[$ tous non vides et deux à deux disjoints.
  Dans ce cas, $\partial O = \{a_n, b_n,\ n \in [\![0, N]\!]\}$. Comme $\mathscr{H}^0$ est la mesure de comptage sur $\mathbb{R}$, il s'ensuit que

$$\mu^+ (O) = \sum_{x \in \bigcup_{n=0}^{N} \{a_n, b_n\}} g(x).$$

- On suppose que O est une réunion infinie de ses composantes connexes : on écrit : $O = \bigcup_{n=0}^{+\infty}]a_n, b_n[$ avec les intervalles $]a_n, b_n[$ tous non vides et deux à deux disjoints.
  Dans ce cas, $\partial O \subset \{a_n, b_n,\ n \in \mathbb{N}\}$, puis comme $\mathscr{H}^0$ est la mesure de comptage sur $\mathbb{R}$, il s'ensuit que

$$\mu^+ (O) \geq \sum_{x \in \bigcup_{n=0}^{+\infty} \{a_n, b_n\}} g(x).$$

$\square$

2.3 Inégalité de Cheeger et inégalité isopérimétrique

Dans ce paragraphe, nous introduisons les notions pour les résultats principaux.

Définition 2.6. *Inégalité de Cheeger.*
Soit μ une mesure borélienne de probabilité sur $\mathbb{R}$.
On dit que μ satisfait l'inégalité de Cheeger s'il existe un réel $c > 0$ tel que : pour toute fonction $f \in \mathscr{C}^1_{\mathrm{pm}}(\mathbb{R})$

$$\int_{\mathbb{R}} |f'| \,\mathrm{d}\mu \geq c \int_{\mathbb{R}} |f - m_f| \,\mathrm{d}\mu. \tag{2}$$

La meilleure constante (i.e. la plus grande) qui satisfait (2) *sera appelée constante de Cheeger de la mesure μ et sera notée $D_{\mathrm{Che}}(\mu)$.*

Définition 2.7. *Inégalité isopérimétrique.*
Soit μ une mesure borélienne de probabilité sur $\mathbb{R}$.
On dit que μ satisfait l'inégalité isopérimétrique s'il existe un réel $c > 0$ tel que

$$\forall\, O \in \mathscr{O}(\mathbb{R}), \quad \mu^+ (O) \geq c \min \{\mu(O), 1 - \mu(O)\}. \tag{3}$$

La meilleure constante qui satisfait (3) *(i.e. la plus grande) est appelée constante d'isopérimétrie de la mesure μ et on la notera $D_{\mathrm{iso}}(\mu)$.*

Proposition 2.6. *Soit μ une mesure borélienne de probabilité sur $\mathbb{R}$.*

Pour tout $t \in [0,1]$, on définit $I_\mu(t)$ par :

$$I_\mu(t) := \inf_{\substack{A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}) \\ \mu(A)=t}} \mu^+(A).$$

La fonction I_μ s'appelle la fonction isopérimétrique de la mesure μ. Elle vérifie :

i) $I_\mu(0) = 0$.

ii) La fonction I_μ est symétrique par rapport à $\frac{1}{2}$:

$$\forall t \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \quad I_\mu(1-t) = I_\mu(t).$$

Ainsi, il suffit de définir la fonction I_μ sur l'intervalle $\left]0, \frac{1}{2}\right]$.

iii) μ satisfait l'inégalité isopérimétrique avec la constante d'isopérimétrie $D_{\mathrm{iso}}(\mu)$ si, et seulement si,

$$\forall t \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \quad I_\mu(t) \geq D_{\mathrm{iso}}(\mu)\, t.$$

Démonstration. *i)* On a $I_\mu(0) = \mu^+(\varnothing) = 0$.

ii) Soit $t \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$. On a :

$$\begin{aligned} I_\mu(1-t) &= \inf_{\substack{A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}) \\ \mu(A)=1-t}} \mu^+(A) \\ &= \inf_{\substack{\overline{A} \in \mathscr{B}(\mathbb{R}) \\ \mu(\overline{A})=t}} \mu^+(\overline{A}) \\ &= I_\mu(t) \end{aligned}$$

où $\overline{A}$ désigne le complémentaire de A dans $\mathbb{R}$.

iii) La preuve utilise la définition de $D_{\mathrm{iso}}(\mu)$ et la symétrie de la fonction I_μ par rapport à $\frac{1}{2}$.

□

Proposition 2.7. *Lien entre l'inégalité de Cheeger et inégalité isopérimétrique pour les mesures à densité.*

Soit μ une mesure borélienne de probabilité définie sur $\mathbb{R}$. On suppose que μ a une densité continue g.

Alors, les lignes (2) *et* (3) *sont équivalentes : l'existence de l'une de ces constantes implique l'existence de l'autre, et $D_{\mathrm{iso}}(\mu) = D_{\mathrm{Che}}(\mu)$.*

Avant de prouver la proposition 2.7, nous utiliserons les résultats suivants.

Lemme 2.1. *Soit $(X, \mathscr{X}, \mu)$ un espace mesuré. Soit $f \in L^p(\mu)$ $(p \geq 1)$ à valeurs positives. Alors*

$$\|f\|_{L^p(\mu)} = \left(p \int_0^{+\infty} t^p \mu(\{f > t\}) \frac{\mathrm{d}t}{t}\right)^{1/p}.$$

Nous prouvons le lemme.

Démonstration. Pour tout $x \in X$, on écrit

$$f^p(x) = \int_0^{+\infty} \chi_{\{f^p > t\}}(x)\, \mathrm{d}t,$$

où $\chi_{\{f^p>t\}}$ est l'indicatrice de l'ensemble $\{y \in X,\ f^p(y) > t\}$, ainsi

$$\int_X f^p(x)\, \mathrm{d}\mu(x) = \int_X \left(\int_0^{+\infty} \chi_{\{f^p>t\}}(x)\, \mathrm{d}t\right) \mathrm{d}\mu(x).$$

En utilisant le théorème de Fubini, on obtient

$$\begin{aligned}
\int_X f^p(x)\,\mathrm{d}\mu(x) &= \int_0^{+\infty}\left(\int_X \chi_{\{f^p>t\}}(x)\,\mathrm{d}\mu(x)\right)\mathrm{d}t\\
&= \int_0^{+\infty}\left(\int_X \chi_{\left\{f>t^{\frac{1}{p}}\right\}}(x)\,\mathrm{d}\mu(x)\right)\mathrm{d}t\\
&= \int_0^{+\infty}\mu\left(\left\{f>t^{\frac{1}{p}}\right\}\right)\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Le changement de variable $u=t^{\frac{1}{p}}$ permet d'écrire

$$\int_X f^p(x)\,\mathrm{d}\mu(x) = p\int_0^{+\infty} u^p\mu(\{f>u\})\,\frac{\mathrm{d}u}{u}.$$

□

Nous citons aussi la formule de la co-aire dont nous nous servirons. Nous renvoyons à [4] pour la preuve.

Théorème 2.1. *Formule de la co-aire.*
Soit $d\in\mathbb{N}^*$. Soient $h:\mathbb{R}^d\longrightarrow\mathbb{R}_+$ mesurable et $u:\mathbb{R}^d\longrightarrow\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1_{\mathrm{pm}}$. Alors

$$\int_{\mathbb{R}^d}|\nabla u(x)|\,h(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}}\left(\int_{u^{-1}(\{t\})} h(x)\,\mathrm{d}\mathscr{H}^{n-1}(x)\right)\mathrm{d}t,$$

l'égalité ayant lieu dans $\mathbb{R}_+\cup\{+\infty\}$.

Passons à la preuve de la proposition 2.7.

Démonstration. • On suppose que $D_{\mathrm{iso}}(\mu)>0$. Montrons que $D_{\mathrm{Che}}(\mu)>0$ et que $D_{\mathrm{Che}}(\mu)\geq D_{\mathrm{iso}}(\mu)$.
Soit $f\in\mathscr{C}^1_{\mathrm{pm}}(\mathbb{R})$. On suppose que $m_f=0$. Notons que comme f est continue, pour tout $t\in\mathbb{R}$, les ensembles $\{f>t\}$ sont des ouverts de $\mathbb{R}$.
D'après la formule de la co-aire, on a :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}}\left|f'(x)\right|g(x)\,\mathrm{d}x &= \int_{\mathbb{R}}\left(\int_{f^{-1}(\{t\})} g(x)\,\mathrm{d}\mathscr{H}^0(x)\right)\mathrm{d}t\\
&= \int_{\mathbb{R}}\mu^+(\{f>t\})\,\mathrm{d}t\\
&\geq D_{\mathrm{iso}}(\mu)\int_{\mathbb{R}}\min\{\mu(\{f>t\}),1-\mu(\{f>t\})\}\,\mathrm{d}t\\
&\geq D_{\mathrm{iso}}(\mu)\int_{-\infty}^{0}\min\{\mu(\{f>t\}),\mu(\{f\leq t\})\}\,\mathrm{d}t\\
&+D_{\mathrm{iso}}(\mu)\int_0^{+\infty}\min(\{\mu\{f>t\}),\mu(\{f\leq t\})\}\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

En utilisant le fait que $m_f=0$ et la croissance de la mesure, on a

$$\forall t\geq 0,\quad \mu(\{f>t\})\leq\frac{1}{2}\quad\text{donc}\quad\mu(\{f\leq t\})\geq\frac{1}{2}$$

et

$$\forall t<0,\quad \mu(\{f>t\})>\frac{1}{2}\quad\text{donc}\quad\mu(\{f\leq t\})<\frac{1}{2},$$

ainsi

$$\int_{\mathbb{R}}\left|f'(x)\right|g(x)\,\mathrm{d}x\geq D_{\mathrm{iso}}(\mu)\int_{-\infty}^{0}\mu(\{f\leq t\})\,\mathrm{d}t+D_{\mathrm{iso}}(\mu)\int_0^{+\infty}\mu(\{f>t\})\,\mathrm{d}t.$$

Comme pour tout $t \leq 0$, $\mu(\{f \leq t\}) \geq \mu(\{f < t\})$, on obtient

$$\int_{\mathbb{R}} \left|f'(x)\right| g(x)\,\mathrm{d}x \geq D_{\text{iso}}(\mu) \int_{-\infty}^{0} \mu(\{f < t\})\,\mathrm{d}t + D_{\text{iso}}(\mu) \int_{0}^{+\infty} \mu(\{f > t\})\,\mathrm{d}t. \tag{4}$$

En posant $f^{+} := \max\{0, f\}$ et $f^{-} := \max\{0, -f\}$ de sorte que l'on ait $f = f^{+} - f^{-}$ et $|f| = f^{+} + f^{-}$, on peut réécrire (4) en

$$\int_{\mathbb{R}} \left|f'(x)\right| g(x)\,\mathrm{d}x \geq D_{\text{iso}}(\mu) \int_{-\infty}^{0} \mu\left(\left\{-f^{-} < t\right\}\right)\mathrm{d}t + D_{\text{iso}}(\mu) \int_{0}^{+\infty} \mu\left(\left\{f^{+} > t\right\}\right)\mathrm{d}t.$$

Le changement de variable $u = -t$ dans la première intégrale du membre de droite de l'inégalité donne

$$\int_{\mathbb{R}} \left|f'(x)\right| g(x)\,\mathrm{d}x \geq D_{\text{iso}}(\mu) \int_{0}^{+\infty} \mu\left(\left\{f^{-} > u\right\}\right)\mathrm{d}u + D_{\text{iso}}(\mu) \int_{0}^{+\infty} \mu\left(\left\{f^{+} > t\right\}\right)\mathrm{d}t.$$

En appliquant le lemme 2.1 aux fonctions positives f^{-} et f^{+}, on obtient finalement

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \left|f'(x)\right| \mathrm{d}\mu(x) &= \int_{\mathbb{R}} \left|f'(x)\right| g(x)\,\mathrm{d}x \\
&\geq D_{\text{iso}}(\mu) \int_{\mathbb{R}} f^{-}(x)\, g(x)\,\mathrm{d}x + D_{\text{iso}}(\mu) \int_{\mathbb{R}} f^{+}(x)\, g(x)\,\mathrm{d}x \\
&\geq D_{\text{iso}}(\mu) \int_{\mathbb{R}} |f(x)|\, g(x)\,\mathrm{d}x \\
&\geq D_{\text{iso}}(\mu) \int_{\mathbb{R}} |f(x)|\,\mathrm{d}\mu(x).
\end{aligned}$$

On a montré que $D_{\text{Che}}(\mu) > 0$ et par définition de $D_{\text{Che}}(\mu)$, on a aussi montré que $D_{\text{Che}}(\mu) \geq D_{\text{iso}}(\mu)$.

- On suppose que $D_{\text{Che}}(\mu) > 0$. Montrons que $D_{\text{iso}}(\mu) > 0$ et $D_{\text{iso}}(\mu) \geq D_{\text{Che}}(\mu)$.

  Soit O un ouvert de $\mathbb{R}$ tel que $\mu(O) \leq \frac{1}{2}$.

  On commence par supposer $\mu(O) < \frac{1}{2}$, le cas $\mu(O) = \frac{1}{2}$ se ramène au cas précédent (voir ci-dessous).

  ⋆ On commence par supposer que O est un intervalle ouvert $O =]a, b[$.

  Pour $\varepsilon > 0$ assez petit, on définit la fonction f_ε par $f_\varepsilon(x) := \frac{1}{\varepsilon}(\varepsilon - \operatorname{dist}(x, O))_{+}$ de sorte que l'on ait :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_\varepsilon(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in]a, b[\\ \frac{1}{\varepsilon}(x - a + \varepsilon) & \text{si } x \in]a - \varepsilon, a] \\ \frac{1}{\varepsilon}(b + \varepsilon - x) & \text{si } x \in [b, b + \varepsilon[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

  Il est facile de voir que $f_\varepsilon \in \mathscr{C}^1_{\text{pm}}(\mathbb{R})$ et $m_{f_\varepsilon} = 0$ pour ε assez petit car $\mu(O) < \frac{1}{2}$. Le théorème de convergence dominée assure que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}} |f_\varepsilon(x)|\,\mathrm{d}\mu(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}} f_\varepsilon(x)\, g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = \mu(]a, b[).$$

  De plus, comme

$$\forall x \in \mathbb{R} \backslash \{a, b\}, \quad f'_\varepsilon(x) = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon} & \text{si } x \in]a - \varepsilon, a[\\ -\frac{1}{\varepsilon} & \text{si } x \in]b, b + \varepsilon[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases},$$

  on a

$$\int_{\mathbb{R}} \left|f'_\varepsilon(x)\right| \mathrm{d}\mu(x) = \frac{1}{\varepsilon} \int_{a-\varepsilon}^{a} g(x)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{\varepsilon} \int_{b}^{b+\varepsilon} g(x)\,\mathrm{d}x.$$

On en déduit donc

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}} \left| f'_{\varepsilon}(x) \right| \mathrm{d}\mu(x) = g(a) + g(b) = \mu(]a,b[) \,.$$

Comme

$$\int_{\mathbb{R}} \left| f'_{\varepsilon}(x) \right| \mathrm{d}\mu(x) \geq D_{\text{Che}}(\mu) \int_{\mathbb{R}} \left| f_{\varepsilon}(x) - m_f \right| \mathrm{d}\mu(x) \,,$$

on en déduit que pour tout intervalle ouvert O tel que $\mu(O) < \dfrac{1}{2}$,

$$\mu^+(O) \geq D_{\text{Che}}(\mu)\, \mu(O) \,.$$

- $\star$ On suppose maintenant que O est une union finie de ses composantes connexes non vides : on a $O = \bigcup_{n=0}^{N}]a_n, b_n[$.

  D'après la proposition 2.5 et ci-dessus, on a

$$\begin{aligned} \mu^+(O) &\geq \sum_{n=0}^{N} \mu^+(]a_n, b_n[) \\ &\geq D_{\text{Che}}(\mu) \sum_{n=0}^{N} \mu(]a_n, b_n[) \\ &\geq D_{\text{Che}}(\mu)\, \mu(O) \,. \end{aligned}$$

- $\star$ On se place dans le cadre où O est réunion infinie de ses composantes connexes non vides : $O = \bigcup_{n=0}^{+\infty}]a_n, b_n[$.

  Pour tout $N \in \mathbb{N}$, on introduit $O_N = \bigcup_{n=0}^{N}]a_n, b_n[$. Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\partial O_N \subset \partial O$, on a :

$$\forall N \in \mathbb{N}, \quad \mu^+(O) \geq \mu^+(O_N) \,.$$

  Or, d'après ci-dessus, on a :

$$\mu^+(O_N) \geq D_{\text{Che}}(\mu)\, \mu(O_N) \,.$$

  On en déduit que

$$\forall N \in \mathbb{N}, \quad \mu^+(O) \geq D_{\text{Che}}(\mu)\, \mu(O_N) \,.$$

  Comme la suite $(O_N)_{N \in \mathbb{N}}$ est croissante, par la proposition 2.1, $\lim_{N \to +\infty} \mu(O_N) = \mu(O)$, si bien que

$$\mu^+(O) \geq D_{\text{Che}}(\mu)\, \mu(O) \,.$$

On traite maintenant le cas d'un ouvert O tel que $\mu(O) = \dfrac{1}{2}$.

Pour ne pas alourdir la preuve, nous allons supposer que O n'a qu'une seule composante connexe : on écrit $O =]a,b[$.

Pour n assez grand, on définit $O_n = \left]a, b - \dfrac{1}{n}\right[$ de sorte que $\mu(O_n) < \dfrac{1}{2}$. D'après ci-dessus, on a :

$$\mu^+(O_n) \geq D_{\text{Che}}(\mu)\, \mu(O_n) \,.$$

D'après la proposition 2.1, on a $\lim_{n \to +\infty} \mu(O_n) = \dfrac{1}{2}$ et par continuité de g,

$$\lim_{n \to +\infty} \mu^+(O_n) = \lim_{n \to +\infty} \left(g(a) + g\left(b - \frac{1}{n}\right) \right) = g(a) + g(b) = \mu(O) \,.$$

On a montré que pour tout ouvert $O \subset \mathbb{R}$ tel que $\mu(O) \leq \frac{1}{2}$,

$$\mu^+(O) \geq D_{\mathrm{Che}}(\mu)\,\mu(O).$$

On a bien montré que $D_{\mathrm{iso}}(\mu) > 0$ et

$$D_{\mathrm{iso}}(\mu) \geq D_{\mathrm{Che}}(\mu).$$

On conclut : l'existence de l'une de ses constantes implique l'existence de l'autre et elles sont égales. □

3 Autres résultats

Dans cette partie, nous donnons des applications de la proposition 2.7.

3.1 Inégalité de Wirtinger

Proposition 3.1. *Inégalité de Wirtinger L^1.*
Pour toute fonction $f \in \mathscr{C}^1_{\mathrm{pm}}([0,1])$, on a :

$$\int_0^1 \left|f'(x)\right| \mathrm{d}x \geq 4 \int_0^1 \left|f(x) - m_f\right| \mathrm{d}x.$$

Démonstration. On note λ la mesure de Lebesgue restreinte à l'intervalle $[0,1]$: c'est une mesure de probabilité.

Soit $A \subset [0,1]$ un borélien tel que $c := \lambda(A) \in \left]0, \frac{1}{2}\right]$ et soit $B := [0,c]$. D'après la définition 2.5, on a :

$$\lambda^+(A) = \int_{\partial A} \mathrm{d}\mathscr{H}^0(x).$$

Comme $\sup(A)$ et $\inf(A)$ appartiennent à ∂A, on a $\lambda^+(A) \geq 2$. Or, $\lambda^+(B) = 2$ et $c \in \left]0, \frac{1}{2}\right]$, on en déduit que

$$\inf_{\substack{A \in \mathscr{B}([0,1]) \\ \lambda(A) = c}} \lambda^+(A) = 2.$$

On en déduit que

$$\forall t \in \left]0, \frac{1}{2}\right], \quad I_\lambda(t) = 2 \geq 4t.$$

On en déduit que $D_{\mathrm{iso}}(\lambda) \geq 4$ puis comme l'inégalité est une égalité pour $t = \frac{1}{2}$, on en déduit que $D_{\mathrm{iso}}(\lambda) = 4$.

D'après la proposition 2.7, on a $D_{\mathrm{Che}}(\lambda) = 4$, ainsi pour tout $f \in \mathscr{C}^1_{\mathrm{pm}}([0,1])$,

$$\int_0^1 \left|f'(x)\right| \mathrm{d}x \geq 4 \int_0^1 \left|f(x) - m_f\right| \mathrm{d}x.$$

□

Il est classique que les inégalités L^1 sont plus «fortes» que les inégalités L^2. La preuve du corollaire 3.1 est généralisable à d'autres cadres.

Corollaire 3.1. *Inégalité de Wirtinger L^2.*
Pour tout $f \in \mathscr{C}^1_{\mathrm{pm}}([0,1])$, on a :

$$\sqrt{\int_0^1 f'(t)^2\,\mathrm{d}t} \geq 2\sqrt{\int_0^1 \left(f(t) - \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t\right)^2 \mathrm{d}t}.$$

Démonstration. Soit $f \in \mathscr{C}^1_{\mathrm{pm}}\left([0,1]\right)$. On suppose que $m_f = 0$.

Soit la fonction g définie par :

$$\forall x \in [0,1], \quad g(x) := \begin{cases} -f^2(x) & \text{si } f(x) < 0 \\ f^2(x) & \text{si } f(x) \geq 0 \end{cases}$$

de sorte qu'une valeur médiane de g soit 0. On applique la proposition 3.1 à g. On obtient

$$2\int_0^1 \left|f'(t)\right| \left|f(t)\right| \mathrm{d}t \geq 4\int_0^1 f^2(t)\,\mathrm{d}t.$$

Puis, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on récupère :

$$2\int_0^1 f^2(t)\,\mathrm{d}t \leq \sqrt{\int_0^1 f'(t)^2\,\mathrm{d}t}\sqrt{\int_0^1 f^2(t)\,\mathrm{d}t}.$$

D'où

$$\sqrt{\int_0^1 f'(t)^2\,\mathrm{d}t} \geq 2\sqrt{\int_0^1 f^2(t)\,\mathrm{d}t}.$$

Par la proposition 2.2, on obtient finalement

$$\sqrt{\int_0^1 f'(t)^2\,\mathrm{d}t} \geq 2\sqrt{\int_0^1 \left(f(t) - \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t\right)^2 \mathrm{d}t}.$$

□

3.2 Inégalités isopérimétriques pour certaines mesures

Dans cette sous-partie, nous calculons quelques fonctions isopérimétriques pour quelques mesures supportées dans $\mathbb{R}_+$.

Proposition 3.2. *Calcul de la fonction isopérimétrique.*

Soit $g : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ continue, strictement décroissante et telle que $\int_0^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x = 1$. On définit la mesure de probabilité μ par $\mathrm{d}\mu(x) := g(x)\,\mathrm{d}x$.

Alors, la fonction isopérimétrique I_μ de la mesure μ est donnée par :

$$\forall t \in \left]0, \frac{1}{2}\right], \quad I_\mu(t) = g\left(F_g^{-1}(1-t)\right)$$

où F_g est définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad F_g(x) = \int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Démonstration. On note que F_g est une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $[0,1[$.

Soit $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}_+)$ tel que $0 < \mu(A) \leq \frac{1}{2}$. On pose $t := \mu(A)$ et soit $B := \left[F_g^{-1}(1-t), +\infty\right[$ de sorte que $\mu(B) = t$.

On remarque déjà que $\sup(A) \geq F_g^{-1}(1-t)$. En effet, si l'on avait $\sup(A) < F_g^{-1}(1-t)$, par croissance de la mesure, on aurait $\mu(A) < \mu(B)$, soit $t < t$.

Grâce à la proposition 3.2, on a $\mu^+(B) = g\left(F_g^{-1}(1-t)\right)$ et, comme $\sup(A) \in \partial A$, par décroissance de g, on a

$$\mu^+(A) \geq g(\sup(A)) \geq g\left(F_g^{-1}(1-t)\right).$$

On a montré que

$$t \in \left]0, \frac{1}{2}\right], \quad I_\mu(t) = g\left(F_g^{-1}(1-t)\right).$$

□

Proposition 3.3. *Une condition suffisante.*

On garde les mêmes notations que celles utilisées pour la proposition 3.2.

On suppose g dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et $\alpha := \inf_{t\in\left[F_g^{-1}\left(\frac{1}{2}\right),+\infty\right[} \frac{-g'(t)}{g(t)} > 0$, alors

$$\forall t \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \quad I_\mu(t) \geq \alpha t.$$

En particulier, $D_{\text{iso}}(\mu) \geq \alpha$.

Démonstration. Soit $t \in \left]0, \frac{1}{2}\right]$. I_μ est continue sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ (on a bien $\lim_{s\to 0} I_\mu(s) = \lim_{s\to 0} g\left(F_g^{-1}(1-s)\right) = 0$), dérivable sur $\left]0, \frac{1}{2}\right[$, par le théorème des accroissements finis,

$$\exists c \in \left]0, \frac{1}{2}\right[, \quad I_\mu(t) - \underbrace{I_\mu(0)}_{=0} = I'_\mu(c)(t-0). \tag{5}$$

Or, I_μ est dérivable sur $\left]0, \frac{1}{2}\right]$ et

$$\forall t \in \left]0, \frac{1}{2}\right], \quad I'_\mu(t) = \frac{-g'\left(F_g^{-1}(1-t)\right)}{g\left(F_g^{-1}(1-t)\right)} = \left(\frac{-g'}{g}\right)\left(F_g^{-1}(1-t)\right).$$

En utilisant la croissance de F_g^{-1}, pour tout $t \in \left]0, \frac{1}{2}\right]$, on a $F_g^{-1}(1-t) \in \left[F_g^{-1}\left(\frac{1}{2}\right), +\infty\right[$, ainsi par définition de α, on a :

$$\forall t \in \left]0, \frac{1}{2}\right], \quad I'_\mu(t) \geq \alpha.$$

En reprenant (5), on obtient :

$$\forall t \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \quad I_\mu(t) \geq \alpha t.$$

□

Corollaire 3.2. *Cas des mesures log-concaves.*

Un cas particulier important de la proposition 3.2 est le cas où g est log-concave : $\ln(g)$ est concave sur $\mathbb{R}_+$ ou de manière équivalente : il existe $V : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ convexe telle que pour tout $x \geq 0$, $g(x) = \mathrm{e}^{-V(x)}$.

En particulier, nous montrerons que $D_{\text{iso}}(\mu) \geq V\left(F_g^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right)$.

Démonstration. On vérifie les hypothèses de la proposition 3.2.

$\ln(g)$ est concave, donc

$$\forall x \geq 0, \quad \frac{\mathrm{d}^2 \ln(g)}{\mathrm{d}x^2} = \frac{g''(x)\,g(x) - g'(x)^2}{g'(x)^2} \leq 0.$$

Comme

$$\forall x \geq 0, \quad \frac{\mathrm{d}\left(\frac{-g'}{g}\right)}{\mathrm{d}x} = \frac{-g''(x)\,g(x) + g'(x)}{g^2(x)} \geq 0,$$

on en déduit que la fonction $-\frac{g'}{g}$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$, ainsi

$$\inf_{t\in\left[F_g^{-1}\left(\frac{1}{2}\right),+\infty\right[} \frac{-g'(t)}{g(t)} = V\left(F_g^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right) > 0$$

car $\frac{-g'(t)}{g(t)} = V(t)$.

□

Corollaire 3.3. *Exemples d'inégalités.*
Pour tout $f \in \mathscr{C}^1_{\text{pm}}(\mathbb{R}_+)$, on a :

$$\int_0^{+\infty} |f'(x)|\, \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x \geq \int_0^{+\infty} |f(x) - m_f|\, \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x, \tag{6}$$

et

$$\int_0^{+\infty} |f'(x)|\, \mathrm{e}^{-x^2/2}\mathrm{d}x \geq \alpha \int_0^{+\infty} |f(x) - m_f|\, \mathrm{e}^{-x^2/2}\mathrm{d}x \tag{7}$$

où α est une constante strictement positive dont nous donnerons une valeur approchée.

Démonstration. • Nous commençons par prouver (6).
Soit la mesure de probabilité μ supportée sur $\mathbb{R}_+$ et définie par $\mathrm{d}\mu(x) := \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$. La proposition 3.2 permet de calculer la fonction isopérimétrique de μ. De simples calculs donnent :

$$\forall t \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \quad I_\mu(t) = t.$$

Il s'ensuit que $D_{\text{iso}}(\mu) = D_{\text{Che}}(\mu) = 1$. Cela conclut (6).

• Nous prouvons (7).
Dans ce cas, le calcul explicite de la fonction isopérimétrique ne semble plus possible. Nous nous contentons de donner une donner une minoration de $D_{\text{iso}}(\gamma)$ en utilisant le corollaire 3.2.
Soit la mesure γ supportée sur $\mathbb{R}_+$ et définie par

$$\mathrm{d}\gamma(x) := \sqrt{\frac{2}{\pi}}\mathrm{e}^{-x^2/2}\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{-\left(x^2/2 - \ln(2/\pi)/2\right)}\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{-V(x)}\mathrm{d}x.$$

Il est facile de voir que γ est bien une mesure de probabilité.
D'après le corollaire 3.2, on a $D_{\text{iso}}(\gamma) \geq V\left(F_g^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right)$.
Un calcul numérique donne $V\left(F_g^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right) \approx 0{,}635$.

□

Exemple 1. Un résultat négatif.
Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}_+$ par $g(t) := \dfrac{1}{(1+t)^2}$. Soit la mesure μ supportée sur $\mathbb{R}_+$ définie par $\mathrm{d}\mu(x) := g(x)\,\mathrm{d}x$.
Alors,

$$\forall t \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \quad I_\mu(t) = t^2.$$

En particulier, μ n'admet pas de constante isopérimétrique.

Démonstration. Il est clair que la fonction g est décroissante sur $\mathbb{R}_+$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x = 1$, donc d'après la proposition 3.2, on a :

$$\forall t \in \left]0, \frac{1}{2}\right], \quad I_\mu(t) = g\left(F_g^{-1}(1-t)\right).$$

De simples calculs donnent

$$\forall x \geq 0, \quad F_g(x) = 1 - \frac{1}{1+x}$$

et

$$\forall y \in [0, 1[, \quad F_g^{-1}(y) = \frac{1}{1-y} - 1$$

de sorte

$$\forall t \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \quad I_\mu(t) = t^2.$$

□

4 Des généralisations possibles

Dans cette dernière partie, nous donnons deux stratégies qui permettent de donner des résultats positifs dans le cas où la mesure n'admet pas de constante isopérimétrique (voir exemple 1).

4.1 En «affaiblissant» les normes

La première possibilité est d'établir des inégalités de type Cheeger pour des normes de Lorentz.

Définition 4.1. *Soit $(X, \mathscr{X}, \mu)$ un espace mesuré.*
Soient α et r deux réels strictement positifs.
On définit $L^{\alpha,r}(\mu)$ par :

$$L^{\alpha,r}(\mu) := \left\{ f : X \longrightarrow \mathbb{R} \text{ mesurable}, \int_0^{+\infty} t^r \mu(\{|f| > t\})^{\frac{r}{\alpha}} \frac{\mathrm{d}t}{t} < +\infty \right\}.$$

Pour $f \in L^{\alpha,r}(\mu)$, on définit

$$\|f\|_{L^{\alpha,r}(\mu)} := \left(r \int_0^{+\infty} t^r \mu(\{|f| > t\})^{\frac{r}{\alpha}} \frac{\mathrm{d}t}{t} \right)^{1/r}.$$

Remarque 1. D'après le lemme 2.1, si $f \in L^p(\mu)$, alors

$$\|f\|_{L^p(\mu)} = \left(p \int_0^{+\infty} \mu(\{|f| > t\}) \frac{\mathrm{d}t}{t} \right)^{1/p},$$

puis $f \in L^{p,p}(\mu)$.

Proposition 4.1. $\|\cdot\|_{L^{\alpha,r}}(\mu)$ *est une quasi-norme sur $L^{\alpha,r}(\mu)$.*
Soit $(X, \mathscr{X}, \mu)$ un espace mesuré. Soient α et r deux réels strictement positifs.
$\|\cdot\|_{L^{\alpha,r}(\mu)}$ *est une quasi-norme sur $L^{\alpha,r}(\mu)$, c'est-à-dire :*

- *Pour tout $f \in L^{\alpha,r}(\mu)$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda f \in L^{\alpha,r}(\mu)$ et*

$$\|\lambda f\|_{L^{\alpha,r}(\mu)} = |\lambda| \, \|f\|_{L^{\alpha,r}(\mu)}.$$

- $\|f\|_{L^{\alpha,r}(\mu)} = 0 \iff f = 0$ *(μ-presque partout).*
- *Pour tout $(f, g) \in (L^{\alpha,r}(\mu))^2$, $f + g \in L^{\alpha,r}(\mu)$ et*

$$\|f + g\|_{L^{\alpha,r}(\mu)} \leq \underbrace{2^{1/\alpha} \max\left\{1, 2^{(1-r)/r}\right\}}_{:= C_{\alpha,r}} \left(\|f\|_{L^{\alpha,r}(\mu)} + \|g\|_{L^{\alpha,r}(\mu)} \right).$$

Démonstration. Nous renvoyons à [5]. □

Remarque 2. Un autre exemple d'espace quasi-normé est $\mathbb{R}^d$ muni de l'application $\|\cdot\|_p$ ($p \in]0, 1[$) définie par $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^d |x_i|^p \right)^{1/p}$.

Nous allons prouver la

Proposition 4.2. *Lien entre l'inégalité de Cheeger et l'inégalité isopérimétrique pour les mesures à densité.*
Soit μ une mesure borélienne de probabilité sur $\mathbb{R}$ à densité dont on note g la densité. Soit $\alpha \in]0, 1[$.
Les propositions suivantes sont équivalentes :

i) Il existe une plus grande constante $D'_{\text{Che}}(\mu) > 0$ telle pour pour toute fonction $f \in \mathscr{C}^1_{\text{pm}}(\mathbb{R})$,

$$\int_{\mathbb{R}} |f'(x)| \, \mathrm{d}\mu(x) \geq D'_{\text{Che}}(\mu) \, \|f\|_{L^{\alpha,1}(\mu)}.$$

ii) Il existe une plus grande constante $D'_{\mathrm{iso}}(\mu) > 0$ telle que pour tout ouvert $O \in \mathscr{O}(\mathbb{R})$ tel que $\mu(O) \leq \dfrac{1}{2}$,

$$\mu^+(O) \geq D'_{\mathrm{iso}}(\mu) \min\{\mu(O), 1-\mu(O)\}^{1/\alpha}.$$

De plus, on a

$$D'_{\mathrm{Che}}(\mu) \geq \frac{D'_{\mathrm{iso}}(\mu)}{C_{\alpha,r}} \geq \frac{D'_{\mathrm{Che}}(\mu)}{C_{\alpha,r}}.$$

Remarque 3. Le cas où $\alpha \geq 1$ est déjà traité ci-dessus car

$$\min\{\mu(O), 1-\mu(O)\}^{1/\alpha} \geq \min\{\mu(O), 1-\mu(O)\}.$$

Démonstration. La preuve est semblable de celle de la proposition 2.7.

- Montrons l'existence de $D'_{\mathrm{iso}}(\mu)$ implique l'existence de $D'_{\mathrm{Che}}(\mu)$ et que $D'_{\mathrm{Che}}(\mu) \geq \dfrac{D'_{\mathrm{iso}}(\mu)}{C_{\alpha,r}}$.

  Soit $f \in \mathscr{C}^1_{\mathrm{pm}}(\mathbb{R})$. On suppose que $m_f = 0$. On remarque que, comme f est continue, pour tout $t \in \mathbb{R}$, les ensembles $\{f > t\}$ sont des ouverts de $\mathbb{R}$.
  D'après la formule de la co-aire, on a :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} |f'(x)|\, g(x)\, \mathrm{d}x &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{f^{-1}(\{t\})} g(x)\, \mathrm{d}\mathscr{H}^0(x) \right) \mathrm{d}t \\
&= \int_{\mathbb{R}} \mu^+(\{f > t\})\, \mathrm{d}t \\
&\geq D'_{\mathrm{iso}}(\mu) \int_{\mathbb{R}} \min\{\mu(\{f > t\}), 1-\mu(\{f > t\})\}^{1/\alpha}\, \mathrm{d}t \\
&\geq D'_{\mathrm{iso}}(\mu) \int_{-\infty}^{0} \min\{\mu(\{f > t\}), \mu(\{f \leq t\})\}^{1/\alpha}\, \mathrm{d}t + \\
&+ D'_{\mathrm{iso}}(\mu) \int_{0}^{+\infty} \min\{\mu(\{f > t\}), \mu(\{f \leq t\})\}^{1/\alpha}\, \mathrm{d}t
\end{aligned}$$

  En utilisant le fait que $m_f = 0$, et la croissance de la mesure, on a

$$\forall t \geq 0, \quad \mu\{f > t\} \leq \frac{1}{2} \quad \text{donc} \quad \mu(\{f \leq t\}) \geq \frac{1}{2}$$

  et

$$\forall t < 0, \quad \mu\{f > t\} > \frac{1}{2} \quad \text{donc} \quad \mu\{(f \leq t)\} < \frac{1}{2},$$

  ainsi

$$\int_{\mathbb{R}} |f'(x)|\, g(x)\, \mathrm{d}x \geq D'_{\mathrm{iso}}(\mu) \int_{-\infty}^{0} \mu(\{f \leq t\})^{1/\alpha}\, \mathrm{d}t + D'_{\mathrm{iso}}(\mu) \int_{0}^{+\infty} \mu(\{f > t\})^{1/\alpha}\, \mathrm{d}t. \tag{8}$$

  En posant $f^+ := \max\{0, f\}$ et $f^- := \max\{0, -f\}$ de sorte que l'on ait $f = f^+ - f^-$ et $|f| = f^+ + f^-$, on peut réécrire (8) en

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} |f'(x)|\, g(x)\, \mathrm{d}x &\geq D'_{\mathrm{iso}}(\mu) \int_{-\infty}^{0} \mu\left(\{-f^- \leq t\}\right)^{1/\alpha} \mathrm{d}t + D'_{\mathrm{iso}}(\mu) \int_{0}^{+\infty} \mu\left(\{f^+ > t\}\right)^{1/\alpha} \mathrm{d}t \\
&\geq D'_{\mathrm{iso}}(\mu) \int_{-\infty}^{0} \mu\left(\{-f^- < t\}\right)^{1/\alpha} \mathrm{d}t + D'_{\mathrm{iso}}(\mu) \int_{0}^{+\infty} \mu\left(\{f^+ > t\}\right)^{1/\alpha} \mathrm{d}t
\end{aligned}$$

  Le changement de variable $u = -t$ dans la première intégrale du membre de droite de l'inégalité donne

$$\int_{\mathbb{R}} |f'(x)|\, g(x)\, \mathrm{d}x \geq D'_{\mathrm{iso}}(\mu) \int_{0}^{+\infty} \mu\left(\{f^- > u\}\right)^{1/\alpha} \mathrm{d}u + D'_{\mathrm{iso}}(\mu) \int_{0}^{+\infty} \mu\left(\{f^+ > t\}\right)^{1/\alpha} \mathrm{d}t.$$

Par la définition 4.1 appliquée aux fonctions f^- et f^+, on obtient finalement

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} \left|f'(x)\right| g(x)\,\mathrm{d}x &\geq D'_{\text{iso}}(\mu) \int_{\mathbb{R}} f^-(x)\, g(x)\,\mathrm{d}x + D'_{\text{iso}}(\mu) \int_{\mathbb{R}} f^+(x)\, g(x)\,\mathrm{d}x \\ &\geq D'_{\text{iso}}(\mu) \left(\|f^-\|_{L^{\alpha,1}(\mu)} + \|f^+\|_{L^{\alpha,1}(\mu)} \right) \\ &\geq \frac{D'_{\text{iso}}(\mu)}{C_{\alpha,r}} \|f^- + f^+\|_{L^{\alpha,1}(\mu)} \\ &\geq \frac{D'_{\text{iso}}(\mu)}{C_{\alpha,r}} \|f\|_{L^{\alpha,1}(\mu)}.\end{aligned}$$

On a montré que $D'_{\text{Che}}(\mu) > 0$ et par définition de $D'_{\text{Che}}(\mu)$, on a aussi montré que $D'_{\text{Che}}(\mu) \geq \dfrac{D'_{\text{iso}}(\mu)}{C_{\alpha,r}}$.

- On suppose que $D'_{\text{Che}}(\mu) > 0$, montrons que $D'_{\text{iso}}(\mu) > 0$ et $D'_{\text{iso}}(\mu) \geq D'_{\text{Che}}(\mu)$.
  Soit O un ouvert de $\mathbb{R}$ tel que $\mu(O) \leq \dfrac{1}{2}$, on commence par supposer $\mu(O) < \dfrac{1}{2}$.
  - ⋆ On commence par supposer que O est un intervalle ouvert $O =]a,b[$.
    Pour $\varepsilon > 0$, on définit la fonction f_ε par $f_\varepsilon(x) := \dfrac{1}{\varepsilon}\left(\varepsilon - \operatorname{dist}(x,O)\right)_+$ de sorte que l'on ait :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_\varepsilon(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in]a,b[\\ \dfrac{1}{\varepsilon}(x - a + \varepsilon) & \text{si } x \in]a-\varepsilon, a] \\ \dfrac{1}{\varepsilon}(b + \varepsilon - x) & \text{si } x \in [b, b+\varepsilon[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

    Il est facile de voir que f_ε est $\mathscr{C}^1_{\text{pm}}(\mathbb{R})$ et, le théorème de convergence dominée assure que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}} |f_\varepsilon(x)|\,\mathrm{d}\mu(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}} f_\varepsilon(x)\, g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = \mu(]a,b[).$$

    De plus, comme

$$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{a,b\}, \quad f'_\varepsilon(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\varepsilon} & \text{si } x \in]a-\varepsilon, a[\\ -\dfrac{1}{\varepsilon} & \text{si } x \in]b, b+\varepsilon[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases},$$

    on a

$$\int_{\mathbb{R}} \left|f'_\varepsilon(x)\right| \mathrm{d}\mu(x) = \frac{1}{\varepsilon} \int_{a-\varepsilon}^a g(x)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{\varepsilon} \int_b^{b+\varepsilon} g(x)\,\mathrm{d}x.$$

    En utilisant la proposition 2.5, on en déduit donc

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}} \left|f'_\varepsilon(x)\right| \mathrm{d}\mu(x) = g(a) + g(b) = \mu(]a,b[).$$

    Comme

$$\int_{\mathbb{R}} \left|f'_\varepsilon(x)\right| \mathrm{d}\mu(x) \geq D'_{\text{Che}}(\mu) \int_{\mathbb{R}} \left|f_\varepsilon(x) - m_f\right| \mathrm{d}\mu(x),$$

    on en déduit que pour tout intervalle ouvert O tel que $\mu(O) < \dfrac{1}{2}$,

$$\mu^+(O) \geq D'_{\text{Che}}(\mu)\, \mu(O).$$

  - ⋆ On suppose maintenant que O est une union finie de ses composantes connexes non vides : on a $O = \displaystyle\bigcup_{n=0}^{N}]a_n, b_n[$.

D'après la proposition 2.5 et ci-dessus, on a

$$\begin{aligned}\mu^+(O) &\geq \sum_{n=0}^{N} \mu^+(]a_n, b_n[)\\ &\geq D'_{\text{Che}}(\mu) \sum_{n=0}^{N} \mu(]a_n, b_n[)\\ &\geq D'_{\text{Che}}(\mu)\,\mu(O).\end{aligned}$$

⋆ On se place dans le cadre où O est réunion infinie de ses composantes connexes non vides : $O = \bigcup_{n=0}^{+\infty}]a_n, b_n[$.

Pour tout $N \in \mathbb{N}$, on introduit $O_N = \bigcup_{n=0}^{N}]a_n, b_n[$. Il est clair que :

$$\forall N \in \mathbb{N}, \quad \mu^+(O) \geq \mu^+(O_N).$$

Or, d'après ci-dessus, on a :

$$\mu^+(O_N) \geq D'_{\text{Che}}(\mu)\,\mu(O_N).$$

On en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mu^+(O) \geq D'_{\text{Che}}(O_N).$$

Par la proposition 2.1, $\lim_{N \to +\infty} \mu(O_N) = \mu(O)$, si bien que

$$\mu^+(O) \geq D'_{\text{Che}}(\mu)\,\mu(O).$$

Le cas où $\mu(O) = \frac{1}{2}$ se traite comme dans la preuve de la proposition 2.7.

Ainsi, on a montré que $D'_{\text{iso}}(\mu) > 0$ et par définition de $D'_{\text{iso}}(\mu)$, on a aussi

$$D'_{\text{iso}}(\mu) \geq D'_{\text{Che}}(\mu).$$

Finalement, on a établi

$$D'_{\text{Che}}(\mu) \geq \frac{D'_{\text{iso}}(\mu)}{C_{\alpha,r}} \geq \frac{D'_{\text{Che}}(\mu)}{C_{\alpha,r}}.$$

□

Exemple 2. Nous reprenons l'exemple 1. Soit μ la mesure supportée sur $\mathbb{R}_+$ dont la densité est $g(t) = \frac{1}{(1+t)^2}$.

Nous y avons établi que :

$$\forall t \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \quad I_\mu(t) = t^2,$$

donc $D'_{\text{iso}}(\mu) = 1$. D'après la proposition 4.2 appliquée avec $\alpha = \frac{1}{2}$, on a : pour tout $f \in \mathscr{C}^1_{\text{pm}}(\mathbb{R})$,

$$\int_0^{+\infty} |f'(x)|\, \mathrm{d}\mu(x) \geq \|f\|_{L^{\frac{1}{2},1}(\mu)}.$$

4.2 En mettant un poids

Une autre approche pour pallier à l'absence de constante isopérimétrique est de pondérer la mesure de bord.

Lemme 4.1. *Intégrabilité de puissances de fonctions convexes.*

Soit $g : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ une fonction convexe, dérivable et croissante telle que $\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ et soit $\beta > 1$.

Alors, la fonction $x \longmapsto g^{-\beta}(x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

Démonstration. Comme $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$, il existe $a \in \mathbb{R}_+$ tel que $g'(a) > 0$. Comme g est convexe, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad g(x) \geq g'(a)(x-a) + g(a).$$

Pour x assez grand, on obtient

$$g^{-\beta}(x) \leq \left(g'(a)(x-a) + g(a)\right)^{-\beta}.$$

La fonction $x \longmapsto (g'(a)(x-a) + g(a))^{-\beta}$ étant intégrable au voisinage de $+\infty$ (car $\beta > 1$), par comparaison, g l'est aussi.

□

Définition 4.2. *Mesure de bord à poids.*

Soit $g : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ une fonction convexe, dérivable et strictement croissante. Soit $\beta > 1$.

Il est aisé de montrer que $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ et on note $Z_\beta := \int_{\mathbb{R}_+} g^{-\beta}(x)\,\mathrm{d}x$. D'après le lemme 4.1, on a bien $Z_\beta < +\infty$.

Soit la mesure de probabilité supportée sur $\mathbb{R}_+$ définie par : $\mathrm{d}\mu(x) := \frac{1}{Z_\beta} g^{-\beta}(x)\,\mathrm{d}x$.

Soit la mesure de bord ν^+ de poids g définie par :

$$\forall O \in \mathscr{O}(\mathbb{R}_+), \quad \nu^+(O) := \int_{\partial O} g(x) \frac{g^{-\beta}(x)}{Z_\beta} \mathrm{d}\mathscr{H}^0(x).$$

On définit sur $[0,1]$ la fonction isopérimétrique J_μ par :

$$\forall t \in [0,1], \quad J_\mu(t) := \inf_{\substack{A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}_+) \\ \mu(A) = t}} \nu^+(A).$$

Proposition 4.3. *Calcul de la fonction isopérimétrique.*

On garde les mêmes hypothèses et notations que celles de la définition 4.2.

La fonction J_μ est symétrique par rapport à $\frac{1}{2}$ et

$$\forall t \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \quad J_\mu(t) = \frac{1}{Z_\beta} g^{1-\beta}\left(F_g^{-1}(1-t)\right)$$

où F_g est définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad F_g(x) := \frac{1}{Z_\beta} \int_0^x g^{-\beta}(x)\,\mathrm{d}x.$$

Démonstration. La preuve est la même que celle de la proposition 3.2.

□

Proposition 4.4. *Toujours avec les mêmes hypothèses et notations que ci-dessus, il existe $\alpha > 0$ tel que*

$$\forall t \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \quad J_\mu(t) \geq \alpha t. \tag{9}$$

Autrement dit, la mesure μ satisfait une inégalité isopérimétrique «à poids» : nous notons $D''_{\mathrm{iso}}(\mu)$ la meilleure constante (i.e. la plus grande) qui vérifie (9).

Démonstration. La preuve est semblable à celle de la proposition 3.3.

J_μ est dérivable sur $\left]0, \frac{1}{2}\right]$ et

$$\forall t \in \left]0, \frac{1}{2}\right], \quad J'_\mu(t) = (\beta - 1)\, g'\left(F_g^{-1}(1-t)\right).$$

Soit $t \in \left]0, \frac{1}{2}\right]$, comme J_μ est continue sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$, par le théorème des accroissements finis

$$\exists c \in \left]0, \frac{1}{2}\right[, \quad J_\mu(t) - \underbrace{J_\mu(0)}_{=0} = J'_\mu(c)\, t = (\beta - 1)\, g'\left(F_g^{-1}(1-c)\right) t.$$

Comme $c \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$, par croissance de F_g^{-1}, on a $F_g^{-1}(1-c) \geq F_g^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$.

En utilisant la croissance de g' (g est convexe), on obtient finalement

$$J_\mu(t) \geq (\beta - 1)\, g'\left(F_g^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right) t.$$

En particulier, nous avons montré que $D''_{\text{iso}}(\mu) \geq (\beta - 1)\, g'\left(F_g^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right) > 0$ car $\beta > 1$ et g' est supposée strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

$\square$

Corollaire 4.1. *Inégalité de Cheeger pour les mesures à poids.*

Avec les notations de la définition 4.2 et de la proposition 4.3. Soit la mesure ν supportée sur $\mathbb{R}_+$ définie par $\mathrm{d}\nu(x) := \frac{1}{Z_\beta} g^{1-\beta}(x)\,\mathrm{d}x$.

Alors, on a

$$\begin{aligned}
\forall f \in \mathscr{C}^1_{\text{pm}}(\mathbb{R}_+) \quad & \int_{\mathbb{R}_+} \left|f'(x)\right| \mathrm{d}\nu(x) \geq D''_{\text{iso}}(\mu) \int_{\mathbb{R}_+} \left|f(x) - m_f\right| \mathrm{d}\mu(x) \\
\iff & \int_{\mathbb{R}_+} \left|f'(x)\right| g^{1-\beta}(x)\,\mathrm{d}x \geq D''_{\text{iso}}(\mu) \int_{\mathbb{R}_+} \left|f(x) - m_f\right| g^{-\beta}(x)\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Démonstration. La preuve étant sensiblement la même que celle de la proposition 2.7, nous omettons certains détails.

Soit $f \in \mathscr{C}^1_{\text{pm}}(\mathbb{R}_+)$. On suppose $m_f = 0$. Par la formule de la co-aire, on a :

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \left|f'(x)\right| \mathrm{d}\nu(x) &= \int_{\mathbb{R}_+} \left|f'(x)\right| g^{-\beta+1}(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{f^{-1}\{t\}} g^{-\beta+1}(x)\,\mathrm{d}\mathscr{H}^0(x)\right) \mathrm{d}t \\
&= \int_{\mathbb{R}} \nu^+(\{f > t\})\,\mathrm{d}t \\
&\geq D''_{\text{iso}}(\mu) \int_{\mathbb{R}} \min\{\mu(\{f > t\}), 1 - \mu(\{f > t\})\}\,\mathrm{d}t \\
&\geq D''_{\text{iso}}(\mu) \int_{-\infty}^0 \mu(\{f < t\})\,\mathrm{d}t + D''_{\text{iso}}(\mu) \int_0^{+\infty} \mu(\{f > t\})\,\mathrm{d}t \\
&\geq D''_{\text{iso}}(\mu) \left(\int_0^{+\infty} \mu\left(\{f^- > t\}\right) \mathrm{d}t + \int_0^{+\infty} \mu\left(\{f^+ > t\}\right) \mathrm{d}t\right) \\
&\geq D''_{\text{iso}}(\mu) \int_0^{+\infty} |f(x)|\,\mathrm{d}\mu(x).
\end{aligned}$$

$\square$

Exemple 3. Nous reprenons l'exemple 1. Soit μ la mesure supportée sur $\mathbb{R}_+$ dont la densité est $h(t) := \frac{1}{(1+t)^2} = g^{-2}(t)$. Pour faire l'analogie avec les notations utilisées dans la définition 4.2, on a $g : t \longmapsto 1 + t$, $\beta = 2$ et $Z_\beta = 1$.

Soit la mesure ν^+ définie par :

$$\forall O \in \mathscr{O}(\mathbb{R}_+), \quad \nu^+(O) := \int_{\partial O} g^{-1}(x)\, \mathrm{d}\mathscr{H}^0(x) = \int_{\partial O} (1+x)^{-1}\, \mathrm{d}\mathscr{H}^0(x).$$

Par la proposition 4.3, on a :

$$\forall f \in \mathscr{C}^1_{\mathrm{pm}}(\mathbb{R}_+), \quad \int_{\mathbb{R}_+} \left|f'(x)\right| (1+x)^{-1}\, \mathrm{d}x \geq D''_{\mathrm{iso}}(\mu) \int_{\mathbb{R}_+} \left|f(x) - m_f\right| (1+x)^{-2}\, \mathrm{d}x$$

avec $D''_{\mathrm{iso}}(\mu) \geq (\beta - 1)\, g'\left(F_g^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right) = 1.$

Références

[1] S. G. Bobkov, *Isoperimetric and analytic inequalities for log-concave measures.* The Annals of Probability 1999, Vol. 27, No. 4, pp. 1903- 1921.

[2] S. G. Bobkov, C. Houdré, *Some Connections between Sobolev-type Inequalities and Isoperimetry.*

[3] L. C. Evans et R. F. Gariepy, *Measure Theory and Fine Properties of Functions.* CRC Press, 1992.

[4] H. Federer, *Geometric Measure Theory.* Springer, 1969.

[5] L. Grafakos, *Classical Fourier analysis.* Volume 249 of Graduate Texts in Mathematics. Springer, New York, second edition, 2008.

[6] E. Milman, *On the role of Convexity in Isoperimetry, Spectral Gap and Concentration.*

[7] W. Rudin, *Analyse réelle et complexe.* Dunod, 3ème édition, 2009.