Une caractérisation des lois normales : une approche par transport optimal d'un théorème de C. Stein

Erik Thomas *

Résumé

Dans cet article, nous retrouvons une caractérisation de la loi normale centrée réduite donnée par C. Stein dans [8]. Notre preuve utilise le transport optimal (partie 2) et les distributions (partie 3).

Mots clés : loi normale, équation de Stein, transport optimal, distributions

1 Introduction

La loi normale est sûrement la loi la plus importante de toute les Mathématiques, au moins pour le théorème central limite. La loi normale est caractérisée par son espérance μ et son écart-type σ : sa densité est alors donnée par :

$$f_{\mu,\sigma}(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \mathrm{e}^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}.$$

Dans [8], C. Stein donne une nouvelle caractérisation de la loi normale :

Théorème 1.1. *Théorème de Stein.*
Pour tout variable aléatoire réelle Z, on a :

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}\left(f'(Z) - Zf(Z)\right) = 0 \text{ pour toute fonction } f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}) \text{ telle que } \int_{\mathbb{R}} |xf(x)| \,\mathrm{d}x < +\infty \\ \iff \quad & X \hookrightarrow \mathscr{N}(0,1) \end{aligned}$$

On remarque que l'implication $\Longleftarrow$ est évidente : c'est une intégration par parties.

Stein utilise ce résultat pour mesurer la distance entre la loi d'une variable aléatoire réelle Z et la loi normale. Pour cela, il considère l'opérateur S défini sur une classe de fonctions assez grande par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad S(f)(x) := f'(x) - xf(x).$$

Si $\mathbb{E}(S(f)(Z)) \approx 0$ pour une « grande » classe de fonctions, alors il est raisonnable de penser que la loi de Z est proche de la loi normale. Nous ne développons pas cette idée ici et nous renvoyons à [8].

Une autre question peut se poser : la résolution de l'équation de Stein : $S(f) = h$ où h est donnée. On peut montrer que si f est continue et $f' \in L^1(\mathbb{R})$, alors l'équation $S(f) = h$ admet une solution. On peut alors donner des estimations sur $\|h\|_\infty^{\mathbb{R}}$ et $\|h'\|_\infty^{\mathbb{R}}$ à l'aide de $\|f'\|_{L^1(\mathbb{R})}$. Cette approche peut servir pour démontrer l'inégalité de Berry-Esséen (voir [8]).

Dans cet article, nous retrouvons la caractérisation de Stein dans une forme plus faible en utilisant le transport optimal. Le transport optimal a montré, depuis les années 1990, son utilité pour établir des inégalités classiques d'Analyse comme les inégalités de convolution de Young optimales et leurs formes inverses (voir [2]), l'inégalité de Prékopa-Leindler ou l'inégalité de Brunn-Minkowski. Nous renvoyons à [1] pour un aperçu général de l'utilisation du transport optimal.

Ici, nous prouvons la version suivante du théorème de Stein. Notre version est plus faible car nous traitons uniquement le cas des variables aléatoires à densité.

Voici le résultat que nous allons établir.

* erik.thomas@ens-rennes.fr

Théorème 1.2. *Théorème de Stein, version faible.*

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ *une fonction continue telle que* $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$ *et vérifiant*

$$\forall g \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}), \quad \int_{\mathbb{R}} g'(x) f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} x g(x) f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{1}$$

Alors, f est la densité d'une loi normale centrée réduite.

Remarque 1. L'hypothèse « $\forall g \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R})$ » doit être comprise dans le sens suivant : si l'une des deux intégrales converge au sens de Lebesgue, alors l'autre converge au sens de Lebesgue et elles ont la même valeur.

Dans la partie 2, nous énonçons un résultat de transport optimal dans $\mathbb{R}$, dans la partie 3 nous énonçons quelques résultats sur les distributions utiles pour la partie 4, dans laquelle nous prouvons le théorème 1.2.

2 Transport optimal dans $\mathbb{R}$

Dans cette sous-partie, nous établissons un résultat concernant le transport optimal dans $\mathbb{R}$. Grâce à la relation d'ordre naturelle $\leq$, les résultats sont beaucoup plus faciles à obtenir que dans le cas général. Nous renvoyons à [4] et [6] pour des résultats plus généraux.

Ainsi, le but n'est pas d'énoncer des résultats avec des hypothèses optimales, mais seulement des résultats qui nous suffisent ici. Encore une fois, nous renvoyons à [4] et [6]. Pour une présentation exhaustive du transport optimal, nous renvoyons à [9].

Théorème 2.1. *Transport optimal dans $\mathbb{R}$.*

Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$, mesurables, à valeurs positives et dans $L^1(\mathbb{R})$. On suppose que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f = \int_{\mathbb{R}} g = 1$. *Alors, il existe une fonction $T : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, appelée application de Brenier entre les fonctions f et g, telle que*

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \int_{-\infty}^{T(t)} g = \int_{-\infty}^{t} f.$$

De plus, T est croissante, dérivable presque partout sur $\mathbb{R}$ et pour presque tout $t \in \mathbb{R}$, on a la relation suivante, dite équation de Monge-Ampère :

$$T'(t)\, g(T(t)) = f(t). \tag{2}$$

Pour prouver le théorème 2.1, nous utiliserons le résultat classique suivant :

Lemme 2.1. *Régularité de l'intégrale d'une fonction L^1.*

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction mesurable et appartenant à $L^1(\mathbb{R})$. Alors, la fonction $x \longmapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$ *est continue et croissante sur $\mathbb{R}$. La fonction* $x \longmapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$ *est dérivable presque partout sur $\mathbb{R}$, et pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, on a :*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t\right) = f(x).$$

De plus,

$$\lim_{x \to +\infty} \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}} f \quad \textit{et} \quad \lim_{x \to -\infty} \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

La preuve de ce résultat classique d'intégration est renvoyée à [7].

Nous prouvons le théorème 2.1.

Démonstration. • Soient les fonctions

$$\widetilde{f} : x \longmapsto \int_{-\infty}^{x} f \quad \text{et} \quad \widetilde{g} : x \longmapsto \int_{-\infty}^{x} g.$$

Soient aussi les ensembles

$$I_f = \left\{x \in \mathbb{R},\ \int_{-\infty}^{x} f \in \left]0, 1\right[\right\} \quad \text{et} \quad I_g = \left\{x \in \mathbb{R},\ \int_{-\infty}^{x} g \in \left]0, 1\right[\right\}.$$

D'après le lemme 2.1, les fonctions $\widetilde{f}$ et $\widetilde{g}$ sont continues et croissantes, ainsi les ensembles I_f et I_g sont des intervalles ouverts non vides de $\mathbb{R}$. On écrit

$$I_f = \left]a_f, b_f\right[\quad \text{et} \quad I_g = \left]a_g, b_g\right[,$$

a_f, a_g pouvant être égaux à $-\infty$ et b_f, b_g pouvant être égaux à $+\infty$.

- Soit $t \in \mathbb{R}$.
  - ⋆ Si $t \in I_f$. D'après le lemme 2.1, la fonction $\widetilde{g}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et

    $$\lim_{x \to a_g^+} \int_{-\infty}^{x} g = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to b_g^-} \int_{-\infty}^{x} g = 1.$$

    Comme $\displaystyle\int_{-\infty}^{t} f \in \left]0, 1\right[$, le théorème des valeurs intermédiaires assure que l'ensemble des éléments x de I_g tels que

    $$\int_{-\infty}^{t} f = \int_{-\infty}^{x} g$$

    n'est pas vide : on le note A_t. De plus, par continuité et croissance de $\widetilde{g}$, A_t est un intervalle fermé inclus dans I_g. On pose alors

    $$T(t) := \sup(A_t).$$

    Par continuité de $\widetilde{f}$, on a alors

    $$\widetilde{f}(t) = \widetilde{g}(T(t)),$$

    soit

    $$\int_{-\infty}^{t} f = \int_{-\infty}^{T(t)} g.$$

  - ⋆ Si $t \leq a_f$, on pose $T(t) := a_g$ de sorte que

    $$\int_{-\infty}^{t} f = \int_{-\infty}^{T(t)} g \, (= 0).$$

  - ⋆ Si $t \geq b_f$, on pose $T(t) := b_g$ de sorte que

    $$\int_{-\infty}^{t} f = \int_{-\infty}^{T(t)} g \, (= 1).$$

  Il est clair que la fonction T ainsi définie est croissante sur $\mathbb{R}$ et on a

  $$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \int_{-\infty}^{t} f = \int_{-\infty}^{T(t)} g. \tag{3}$$

- La relation (3) se réécrit en

  $$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \widetilde{f}(t) = \widetilde{g}(T(t)). \tag{4}$$

  D'après le lemme 2.1, les fonctions $\widetilde{f}$ et $\widetilde{g}$ sont dérivables presque partout sur $\mathbb{R}$. D'après le théorème de dérivation des fonctions monotones de Lebesgue, T est dérivable presque partout sur $\mathbb{R}$. Ainsi, pour presque tout $t \in \mathbb{R}$, on a

  $$T'(t)\, g(T(t)) = f(t).$$

  On remarque aussi que $T'(t) \geq 0$ presque-partout.

□

Remarque 2. Lorsque les fonctions f et g sont supposées continues et $g(t) > 0$ pour tout réel t ($\widetilde{g}$ est alors bijective de $\mathbb{R}$ sur $\left]0, 1\right[$), la relation (4) se réécrit en

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad T(t) = \widetilde{g}^{-1}\left(\widetilde{f}(t)\right).$$

On en déduit alors que T est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et l'équation de Monge-Ampère (2) est alors vraie partout.

3 Généralités sur les distributions

Dans cette partie, nous énonçons les définitions et les propositions dont nous aurons besoin plus loin. Pour alléger, la plupart des preuves ont été omises et nous renvoyons à [3] pour un cours complet sur les distributions.

3.1 Généralités

Soit Ω un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$. On définit l'espace vectoriel réel $\mathscr{D}(\Omega)$ des fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ à support compact inclus dans Ω et, si K est un compact inclus dans Ω, $\mathscr{D}(K)$ l'ensemble de ces fonctions dont le support est inclus dans K. Il n'est pas évident, même pour $n = 1$, que cet espace vectoriel n'est pas réduit à $\{0\}$. C'est un exercice classique de montrer que la fonction $\widetilde{\rho}$ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\widetilde{\rho}(x) := \begin{cases} \mathrm{e}^{-1/x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

est une fonction $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. On remarque que la fonction définie sur $\mathbb{R}^n$ par

$$\rho(x) := \widetilde{\rho}\left(1 - \|x\|^2\right)$$

est $\mathscr{C}^\infty$ avec un support $\mathrm{supp}(\rho) = B'(0,1)$. On rappelle que le support $\mathrm{supp}(\rho)$ d'une fonction est l'adhérence de l'ensemble $\{x \in \mathbb{R}^n \ ; \ \rho(x) \neq 0\}$. Avant de donner la définition d'une distribution, on donne la

Définition 3.1. *Multi-indice.*

Soit $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. On appelle multi-indice tout élément $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$. Ces éléments fournissent des notations commodes pour les monômes et les dérivées partielles :

$$\begin{array}{rcl} x^\alpha & = & x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} \ ; \\ \partial_i & = & \partial / \partial x_i \ ; \\ \partial^\alpha f & = & \partial_1^{\alpha_1} \cdots \partial_n^{\alpha_n} f = \dfrac{\partial^{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}. \end{array}$$

La notation ci-dessus doit être reservée pour les fonctions dont on sait que l'ordre de dérivation n'intervient pas : c'est heureusement le cas des fonctions $\mathscr{C}^\infty$ (lemme de Schwarz).

L'entier $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ est noté $|\alpha|$ et est appelé la longueur du multi-indice α.

Définition 3.2. *Distribution.*

Soit $T : \mathscr{D}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ une application linéaire. On dit que T est une distribution sur l'ouvert Ω si elle satisfait la propriété de continuité suivante : pour tout compact K de Ω, il existe un entier naturel p et une constante C tels que

$$\forall \varphi \in \mathscr{D}(K) \qquad |T(\varphi)| \leq C \sup_{\substack{x \in K \\ |\alpha| \leq p}} |\partial^\alpha \varphi(x)| . \tag{5}$$

On note $\mathscr{D}'(\Omega)$ l'ensemble des distributions sur Ω.

La notation $T(\varphi)$ est communément remplacée par la notation $\langle T, \varphi \rangle$, que l'on utilisera dans toute la suite.

Exemple 1. On note

$$L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R} \text{ mesurable telle que pour tout compact } K \subset \Omega, \int_K |f| < +\infty \right\}.$$

À toute fonction $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, on associe une application T_f définie par

$$\forall \varphi \in \mathscr{D}(\Omega) \qquad \langle T_f, \varphi \rangle := \int f(x) \varphi(x) \, \mathrm{d}x.$$

Il est facile de voir que T_f est linéaire et que pour tout compact K de Ω et pour tout φ appartenant à $\mathscr{D}(K)$

$$|\langle T_f, \varphi \rangle| \leq \left(\int_K |f(x)| \, \mathrm{d}x \right) \left(\sup_{x \in K} |\varphi(x)| \right).$$

Par conséquent, T_f est une distribution sur Ω.

Définition 3.3. *Multiplication d'une distribution par une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$.*

Soit Ω un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$. Soit $T \in \mathscr{D}'(\Omega)$ et $f \in \mathscr{C}^\infty(\Omega)$. On définit la distribution fT par :

$$\forall \varphi \in \mathscr{D}(\Omega), \quad \langle fT, \varphi \rangle := \langle T, f\varphi \rangle .$$

Pour que cette définition soit valide, il faudrait vérifier que la propriété de continuité (5) est bien satisfaite. On laisse cette vérification au lecteur.

3.2 Lemme de du Bois-Reymond

Lemme 3.1. *Lemme de du Bois-Reymond.*

Soient Ω un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$ et $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ tels que pour tout $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$, $\displaystyle\int f\varphi = 0$. Alors $f = 0$ presque-partout sur Ω.

Remarque 3. Soit Ω un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$ et soit l'application

$$T : \begin{cases} L^1_{\text{loc}}(\Omega) & \longrightarrow \mathscr{D}'(\Omega) \\ f & \longmapsto T_f \end{cases},$$

où T_f est la distribution définie à l'exemple 1.

Il est clair que T est linéaire. Le lemme 3.1 assure que le noyau de T est réduit à $\{0\}$, ainsi T est injective. Cela nous autorise, et nous le ferons systématiquement par la suite, à assimiler une fonction $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ à sa distribution naturellement associée T_f.

3.3 Dérivation d'une distribution et formule de Leibniz

Définition 3.4. *Dérivation d'une distribution.*

Soit $T \in \mathscr{D}'(\Omega)$. Pour $i \in \{1, \ldots, n\}$ et $\alpha \in \mathbb{N}^n$ un multi-indice, on définit les applications linéaires $\partial_i T$ et $\partial^\alpha T$ par : pour tout $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$

$$\langle \partial_i T, \varphi \rangle := -\langle T, \partial_i \varphi \rangle \qquad \textit{et} \qquad \langle \partial^\alpha T, \varphi \rangle := (-1)^\alpha \langle T, \partial^\alpha \varphi \rangle .$$

Il faut vérifier que ces applications vérifient la propriété de continuité (5). Par exemple, pour $\partial_i T$,

$$\begin{aligned} |\langle \partial_i T, \varphi \rangle| &= |\langle T, \partial_i \varphi \rangle| \\ &\leq C \sup_{\substack{x \in K, \\ |\alpha| \leq p}} \left| \partial^\alpha \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) \right| \\ &\leq C \sup_{\substack{x \in K, \\ |\beta| \leq p+1}} \left| \partial^\beta \varphi(x) \right| . \end{aligned}$$

Ainsi $\partial_i T$ vérifie la propriété de continuité (5) et $\partial_i T$ est bien une distribution sur Ω. On procède de même pour montrer que $\partial^\alpha T$ est une distribution sur Ω.

Il est facile de voir que la dérivation est une opération linéaire sur $\mathscr{D}'(\Omega)$, i.e. si T_1 et T_2 sont deux éléments de $\mathscr{D}'(\Omega)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors, pour tout multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^n$, on a

$$\partial^\alpha (T_1 + \lambda T_2) = \lambda \partial^\alpha T_1 + \partial^\alpha T_2.$$

Remarque 4. Il est facile de montrer que si $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de classe ad hoc sur Ω, alors les dérivées partielles $\partial_i f$ au sens classique et au sens des distributions coïncident.

On peut énoncer des formules permettant de dériver le produit d'une distribution et d'une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$.

Proposition 3.1. *Formule de Leibniz.*

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}$ non vide. Soit $f \in \mathscr{C}^\infty(\Omega)$ et $T' \in \mathscr{D}'(\Omega)$. On a

$$(fT)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} T^{(n-k)}.$$

En particulier,

$$(fT)' = f'T + fT'.$$

On notera que, comme f est de classe $\mathscr{C}^\infty$, les dérivées qui portent sur f sont des dérivées au sens classique d'après la remarque 4.

3.4 Lemme utile

Le but de ce paragraphe est la résolution de l'équation différentielle (au sens des distributions) $T' = 0$.

Proposition 3.2. *Soit $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ telle que $T' = 0$ (distribution nulle). Alors, T est une fonction constante presque-partout.*

Démonstration. Soit $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ telle que $T' = 0$. Ainsi pour tout $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$, on a

$$\langle T', \varphi \rangle = -\langle T, \varphi' \rangle = 0,$$

soit

$$\langle T, \varphi' \rangle = 0.$$

Remarquons déjà que si $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ et $\displaystyle\int \varphi = 0$, alors $\langle T, \varphi \rangle = 0$. En effet, la fonction ψ définie par $\psi(x) := \displaystyle\int_{-\infty}^{x} \varphi(t)\,\mathrm{d}t$ appartient bien à $\mathscr{D}(\mathbb{R})$ car $\displaystyle\int \varphi = 0$ et $\psi' = \varphi$. De plus,

$$\langle T, \varphi \rangle = \langle T, \psi' \rangle = -\langle T', \psi \rangle = 0.$$

Fixons $\phi_0 \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ telle que $\displaystyle\int \phi_0 = 1$, dont l'existence est assurée par une construction antérieure. Pour $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$, on écrit

$$\varphi = \left(\int \varphi\right)\phi_0 + \left(\varphi - \left(\int \varphi\right)\phi_0\right).$$

Comme $\displaystyle\int \left(\varphi - \left(\int \varphi\right)\phi_0\right) = 0$, on a

$$\langle T, \varphi \rangle = \left\langle T, \left(\int \varphi\right)\phi_0 \right\rangle = \langle T, \phi_0 \rangle \left(\int \varphi\right) = T_{f_0}(\varphi),$$

où f_0 est la fonction constante presque-partout égale à $\langle T, \phi_0 \rangle$. Ainsi, T est la fonction constante f_0.
La synthèse est claire : une fonction T constante presque-partout vérifie $T' = 0$.

□

4 Preuve du résultat principal

Avant de prouver le théorème 1.2, nous utiliserons les lemmes suivants.

Lemme 4.1. *Soit f vérifiant les hypothèses du théorème 1.2. Alors, f est paire.*

Nous prouvons le lemme 4.1.

Démonstration. On écrit la décomposition en partie paire/partie impaire pour f ; on a donc $f = f_p + f_i$ avec f_p paire et f_i impaire.

La relation (1) appliquée avec $g \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ paire donne

$$\int_{\mathbb{R}} f_i(x)\, g'(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} x f_i(x)\, g(x)\,\mathrm{d}x. \tag{6}$$

On notera que la relation (6) est évidente lorsque g est supposée impaire car elle donne $0 = 0$. Comme toute fonction $g \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ est somme de sa partie paire et de sa partie impaire, on en déduit que

$$\forall g \in \mathscr{D}(\mathbb{R}), \quad \int_{\mathbb{R}} f_i(x)\, g'(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} x f_i(x)\, g(x)\,\mathrm{d}x.$$

En introduisant la dérivée de f_i au sens des distributions, on a

$$\forall g \in \mathscr{D}(\mathbb{R}), \quad -\int_{\mathbb{R}} f_i'(x)\, g(x)\, \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} x f_i(x)\, g(x)\, \mathrm{d}x.$$

Le lemme 3.1 permet d'affirmer que $-f_i' = x f_i$ (égalité au sens des distributions).

D'après la proposition 3.1 et la remarque 4, on a (au sens des distributions) :

$$\left(\mathrm{e}^{x^2/2} f_i\right)' = x\mathrm{e}^{x^2/2} f_i + \mathrm{e}^{x^2/2} f_i' = \mathrm{e}^{x^2/2}\left(x f_i + f_i'\right) = 0.$$

D'après la proposition 3.2, on en déduit que la distribution $\mathrm{e}^{x^2/2} f_i$ est constante, ainsi $f_i(x) = \lambda \mathrm{e}^{-x^2/2}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Comme f_i est impaire, on en déduit que $\lambda = 0$, donc f_i est nulle.

□

Et le second lemme.

Lemme 4.2. *Soient μ et ν deux mesures de probabilités sur $\mathbb{R}$ à densités notées f et g que l'on suppose paires. On suppose que $\Phi_g : x \longmapsto \int_{-\infty}^{x} g(t)\, \mathrm{d}t$ est injective. Alors, l'application de Brenier T entre les fonctions f et g donnée par la proposition 2.1 est impaire.*

Démonstration. On remarque que $T(0) = 0$. En effet, par parité de f et g, on a

$$\frac{1}{2} = \int_{-\infty}^{0} f(t)\, \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{T(0)} g(t)\, \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{0} g(t)\, \mathrm{d}t,$$

soit $\Phi_g(0) = \Phi_g(T(0))$. Par injectivité de Φ_g, on a $T(0) = 0$.

Soit $x \in \mathbb{R}_+$. D'une part, par définition de T, on a

$$\int_{-\infty}^{-x} f(t)\, \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{T(-x)} g(t)\, \mathrm{d}t. \tag{7}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{x} f(t) &= \int_{-\infty}^{T(x)} g(t)\, \mathrm{d}t \quad \text{par définition de } T \\
&= \int_{-\infty}^{-T(x)} g(t)\, \mathrm{d}t + \int_{-T(x)}^{T(x)} g(t)\, \mathrm{d}t \\
&= \int_{T(x)}^{+\infty} g(t)\, \mathrm{d}t + \int_{-T(x)}^{T(x)} g(t)\, \mathrm{d}t \quad \text{car } g \text{ est paire} \\
&= 1 - \int_{-\infty}^{T(x)} g(t)\, \mathrm{d}t + \int_{-T(x)}^{T(x)} g(t)\, \mathrm{d}t \\
&= 1 - \int_{-\infty}^{x} f(t)\, \mathrm{d}t + 2\int_{-T(x)}^{0} g(t)\, \mathrm{d}t \quad \text{par définition de } T \text{ et car } g \text{ est paire.}
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$2\int_{-\infty}^{x} f(t)\, \mathrm{d}t = 1 + 2\int_{-T(x)}^{0} g(t)\, \mathrm{d}t.$$

Comme f est paire, on a $\int_{-\infty}^{0} f(t)\, \mathrm{d}t = \frac{1}{2}$, ainsi la ligne précédente donne

$$\int_{-x}^{0} f(t)\, \mathrm{d}t = \int_{-T(x)}^{0} g(t)\, \mathrm{d}t,$$

soit, en ajoutant $\frac{1}{2} = \int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ (toujours car f et g sont paires), on a :

$$\int_{-x}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-T(x)}^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Il s'ensuit que

$$\int_{-\infty}^{-x} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{-T(x)} g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Cette ligne utilisée avec la ligne (7) donne

$$\int_{-\infty}^{-T(x)} g(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{T(-x)} g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Comme Φ_g est injective, on a $T(-x) = -T(x)$.

Si $x \in \mathbb{R}_-$, on a $-x \in \mathbb{R}_+$, donc $T(x) = T(-(-x)) = -T(-x)$, ce qui permet de conclure sur l'imparité de T.

$\square$

Nous prouvons maintenant le théorème 1.2.

Démonstration. Soit f vérifiant les hypothèses du théorème 1.2. Soit φ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-x^2/2}.$$

Soit T l'application de Brenier donnée par la proposition 2.1 entre les fonctions f et φ. Déjà, le lemme 4.1 assure que f est paire. Comme φ est continue et à valeurs strictement positives, la fonctions $x \longmapsto \int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-t^2/2} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{2\pi}}$ est injective, ainsi, d'après le lemme 4.2, T est impaire. D'après la proposition 2.1 et la remarque 2, T est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et l'équation de Monge-Ampère (2) est alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-T(x)^2/2} T'(x). \tag{8}$$

Soit $I := \int_{-\infty}^{+\infty} (T(x) - x)^2 f(x)\,\mathrm{d}x$. Comme l'intégrale $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{d}x$ converge au sens de Lebesgue, la ligne (1) donne :

$$\int_{\mathbb{R}} x^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} x \times x f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} (x)' f(x)\,\mathrm{d}x = 1$$

où (par abus), $(x)'$ désigne la dérivée de $x \longmapsto x$.

L'équation de Monge-Ampère (8) et une intégration par parties donnent

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} T(x)^2 f(x)\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} T(x)\, T(x)\, \mathrm{e}^{-T(x)^2/2} T'(x)\,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[T(x)\, \mathrm{e}^{-T(x)^2/2} \right]_{-\infty}^{+\infty} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} T'(x)\, \mathrm{e}^{-T(x)^2/2} \mathrm{d}x \\
&= 0 + \int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{d}x \\
&= 1
\end{aligned}$$

car $\left[T(x)\, \mathrm{e}^{-T(x)^2/2} \right]_{-\infty}^{+\infty} = 0$ par croissance comparée.

L'inégalité de Cauchy-Schwarz pour la mesure $\mathrm{d}\mu(x) := f(x)\,\mathrm{d}x$ donne

$$\int_{\mathbb{R}} |x T(x)| f(x)\,\mathrm{d}x \leq \sqrt{\int_{\mathbb{R}} x^2 f(x)\,\mathrm{d}x} \sqrt{\int_{\mathbb{R}} T(x)^2 f(x)\,\mathrm{d}x}. \tag{9}$$

Ainsi, on a

$$I = \int_{\mathbb{R}} T^2(x) f(x) \,\mathrm{d}x - 2\int_{\mathbb{R}} xT(x) f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}} x^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 2 - 2\int_{\mathbb{R}} xT(x) f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{10}$$

D'une part, on remarque que l'intégrale $\int_{\mathbb{R}} xT(x) f(x)\,\mathrm{d}x$ converge au sens de Lebesgue (d'après la ligne (9)). La ligne (1) assure alors que

$$\int_{\mathbb{R}} xT(x) f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} T'(x) f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{11}$$

D'autre part, l'équation de Monge-Ampère (8) et une intégration par parties donnent

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} xT(x) f(x)\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} xT(x)\,\mathrm{e}^{-T(x)^2/2} T'(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[-x\mathrm{e}^{-T(x)^2/2}\right]_{-\infty}^{+\infty} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-T(x)^2/2}\mathrm{d}x \\
&= 0 + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-T(x)^2/2}\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

car, par imparité de T,

$$\left[-x\mathrm{e}^{-T(x)^2/2}\right]_{-\infty}^{+\infty} = \lim_{A\to+\infty} \left[-x\mathrm{e}^{-T(x)^2/2}\right]_{-A}^{A} = 0.$$

De l'équation de Monge-Ampère (8), on déduit (en prenant les conventions suivantes de la théorie de l'intégration $\frac{1}{0} = +\infty$ et $0 \times \infty = 0$),

$$\int_{\mathbb{R}} xT(x) f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} f(x) \frac{1}{T'(x)}\mathrm{d}x. \tag{12}$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée avec la mesure $\mathrm{d}\mu$ et les lignes (11) et (12) donnent

$$\begin{aligned}
1 &= \int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{R}} \sqrt{T'(x)} \times \frac{1}{\sqrt{T'(x)}} f(x)\,\mathrm{d}x \\
&\leq \sqrt{\int_{\mathbb{R}} T'(x) f(x)\,\mathrm{d}x} \sqrt{\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{T'(x)} f(x)\,\mathrm{d}x} \\
&\leq \int_{\mathbb{R}} xT(x) f(x)\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Cette ligne utilisée dans (10) donne

$$I = \int_{\mathbb{R}} (T(x) - x)^2 f(x)\,\mathrm{d}x \leq 0.$$

Comme $f(x) > 0$ pour tout réel x, on en déduit que $T(x) = x$ pour tout x. L'équation de Monge-Ampère (8) donne finalement

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-x^2/2}.$$

□

Références

[1] F. Barthe, *Autour de l'inégalité de Brunn-Minkowski*. Annales de la faculté de Toulouse $6^{\text{ème}}$ série, tome 12, no. 2, pp. 127-178, 2003.

[2] F. Barthe, *Optimal Young's inequality and its converse : a simple proof.* Geom. Func. Anal. 8, pp. 234-242, 1998.

[3] J.-M. Bony, *Cours d'analyse-Théorie des distributions et analyse de Fourier.* Les Éditions de l'École Polytechnique, 2001.

[4] Y. Brenier, *Polar factorization and monotone rearrangement of vector-valued functions.* Comm. Pure Appl. Math. 44, no. 4, pp. 375-417, 1991.

[5] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle.* Dunod, 2005.

[6] R. J. McCann, *Existence and uniqueness of monotone measure-preserving maps.* Duke Math. Journal 80 (2), pp. 309-323, 1995.

[7] W. Rudin, *Real and Complex Analysis.* McGraw-Hill Education, 1986.

[8] C. Stein, *A bound for the error in the normal approximation to the distribution of the sum of dependant random variables.* Sixth Berkeley Symposium, 1972.

[9] C. Villani, *Topics in mass transportation.* Graduate Studies in Mathematics, Vol. 58, Amer. Math. Soc., Providence.