Une utilisation méconnue des polynômes d'Hermite

Erik Thomas*

Résumé

Le but de cet article est d'établir une inégalité de Poincaré pour la mesure gaussienne γ_1. Pour cela, nous utilisons les polynômes d'Hermite et le fait qu'ils constituent une base hilbertienne de $L^2(\gamma_1)$.

Mots clés : Mesure gaussienne, inégalité de Poincaré

1 Introduction

Dans toute la suite de l'article on pose

$$\varphi(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-x^2/2}$$

et on introduit la mesure borélienne γ_1 par $\mathrm{d}\gamma_1(x) := \varphi(x)\,\mathrm{d}x$. Ainsi, pour tout borélien $A \subset \mathbb{R}$, on a :

$$\gamma_1(A) = \int_A \varphi(x)\,\mathrm{d}x.$$

On note $\mathscr{C}_c^1(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et à support compact.

Le but de cet article est d'établir le résultat suivant :

Proposition 1.1. *Inégalité de Poincaré pour la mesure gaussienne.*

Pour toute fonction $f \in \mathscr{C}_c^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\gamma_1)$ telle que $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{d}\gamma_1(x) = 0$, on a :

$$\int_{\mathbb{R}} f'^2(x)\,\mathrm{d}\gamma_1(x) \geq \int_{\mathbb{R}} f^2(x)\,\mathrm{d}\gamma_1(x).$$

Pour établir cette inégalité, nous adoptons une approche hilbertienne. Cette approche a déjà été utilisée avec succès pour établir par exemple l'inégalité de Wirtinger à l'aide des séries de Fourier.

Proposition 1.2. *Inégalité de Wirtinger.*

Pour toute fonction $f : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}$ de classe $\mathscr{C}^1$ telle que $f(0) = f(2\pi)$ et $\int_0^{2\pi} f(t)\,\mathrm{d}t = 0$, on a :

$$\int_0^{2\pi} \left|f'(t)\right|^2 \mathrm{d}t \geq \int_0^{2\pi} |f(t)|^2\,\mathrm{d}t.$$

Nous reproduisons la preuve de [1].

Démonstration. La preuve utilise les séries de Fourier.

On se place dans l'espace de Hilbert $L^2([0, 2\pi], \mathbb{C})$ dont le produit scalaire usuel $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est défini par

$$\forall (f, g) \in L^2([0, 2\pi], \mathbb{C})^2, \quad \langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} f(t)\,\overline{g(t)}\frac{\mathrm{d}t}{2\pi}.$$

On note $\|\cdot\|_2$ la norme associée.

*erik.thomas@ens-rennes.fr

Par hypothèse f et f' appartiennent à $L^2([0,2\pi],\mathbb{C})$. D'après l'égalité de Parseval, on a :

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(t)|^2\,\mathrm{d}t = \|f\|_2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}}|a_n|^2 \quad \text{et} \quad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f'(t)|^2\,\mathrm{d}t = \|f'\|_2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}}|b_n|^2$$

avec

$$\forall n\in\mathbb{Z},\quad a_n = \int_0^{2\pi} f(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}\frac{\mathrm{d}t}{2\pi} \quad \text{et} \quad b_n = \int_0^{2\pi} f'(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}\frac{\mathrm{d}t}{2\pi}.$$

On note que $a_0 = b_0 = 0$. De plus, une simple intégration permet de vérifier que $b_n = \mathrm{i}na_n$. On en déduit alors que :

$$\int_0^{2\pi}|f'(t)|^2\,\mathrm{d}t = 2\pi\sum_{n\in\mathbb{Z}^*}|b_n|^2 = 2\pi\sum_{n\in\mathbb{Z}^*}n^2|a_n|^2 \geq 2\pi\sum_{n\in\mathbb{Z}^*}|a_n|^2 = \int_0^{2\pi}|f(t)|^2\,\mathrm{d}t.$$

□

Remarque 1. Les points cruciaux de la preuve sont le fait que la famille $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ avec $e_n : t \longmapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}$ est une base hilbertienne de $L^2([0,2\pi],\mathbb{C})$ et que $e_n' = \mathrm{i}ne_n$.

Ce sont les mêmes idées que nous utiliserons pour établir la proposition 1.1.

2 Polynômes d'Hermite

Dans cette partie, nous donnons sans démonstration les propriétés qui nous serons utiles sur les polynômes d'Hermite. Nous renvoyons à [2].

Définition 2.1. *Polynômes d'Hermite.*

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on définit H_n par :

$$H_n(x) = (-1)^n\,\mathrm{e}^{x^2/2}\frac{\mathrm{d}^n\left(\mathrm{e}^{-x^2/2}\right)}{\mathrm{d}x^n}.$$

On se place dans $L^2(\gamma_1)$ que l'on munit du produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ défini par :

$$\forall (f,g)\in L^2(\gamma_1)^2,\quad \langle f,g\rangle = \int_{\mathbb{R}} f(t)\,g(t)\,\mathrm{d}\gamma_1(t).$$

On note $\|\cdot\|_2$ la norme associée.

Proposition 2.1. *Propriétés des polynômes d'Hermite.*

Les polynômes d'Hermite vérifient les relations suivantes :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad H_{n+1} - XH_n + nH_{n-1} = 0, \tag{1}$$

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad H_n'' - XH_n' + nH_n = 0 \tag{2}$$

et

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad H_n' = nH_{n-1}. \tag{3}$$

Proposition 2.2. *Pour tout $(n,m)\in\mathbb{N}^2$, on a $\langle H_n, H_m\rangle = n!\delta_{n,m}$.*

Définition 2.2. *Polynômes d'Hermite normalisés.*

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose $\widetilde{H_n} = \dfrac{1}{\sqrt{n!}}H_n$.

Remarque 2. La proposition 2.1 assure alors que

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad \widetilde{H_n}'' - X\widetilde{H_n}' + n\widetilde{H_n} = 0 \quad \text{et} \quad \widetilde{H_n}' = \sqrt{n}\widetilde{H_{n-1}}.$$

Remarque 3. La famille $\left(\widetilde{H_0},\widetilde{H_1},\dots\right)$ est une famille orthonormée de $\mathbb{R}[X]$ pour le produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

Une autre propriété intéressante des polynômes d'Hermite est qu'ils forment une base hilbertienne de $L^2(\gamma_1)$. Autrement dit, on a :

Proposition 2.3. *Pour tout $f \in L^2(\gamma_1)$, il existe une unique suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{N})$ (i.e. $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^2 < +\infty$) telle que*

$$\lim_{N\to+\infty} \left\| f - \sum_{n=0}^{N} a_n \widetilde{H_n} \right\|_2 = 0.$$

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \left\langle f, \widetilde{H_n} \right\rangle$.

Remarque 4. On écrira $f = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \widetilde{H_n}$ tout en se souvenant que l'égalité est en norme $\|\cdot\|_2$ et non pas ponctuelle.

3 Approche spectrale de l'inégalité de Poincaré pour la mesure de Gauss

Définition 3.1. *On définit, pour f assez régulière, la fonction Lf par*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad Lf(x) := f''(x) - xf'(x).$$

La proposition suivante montre que l'opérateur L est bien adaptée à la mesure γ_1 car il existe une formule d'intégration par parties.

Proposition 3.1. *Pour tout $(f,g) \in \mathscr{C}_c^2(\mathbb{R})$, on a :*

$$\int_{\mathbb{R}} f(t)\, Lg(t)\, \mathrm{d}\gamma_1(t) = -\int_{\mathbb{R}} f'(t)\, g'(t)\, \mathrm{d}\gamma_1(t).$$

Démonstration. Comme les fonctions f et g sont de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et à support compact, les intégrations par parties sont justifiées. On a :

$$\int_{\mathbb{R}} f(t)\, Lg(t)\, \mathrm{d}\gamma_1(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(t)\, g''(t)\, \mathrm{e}^{-t^2/2}\mathrm{d}t - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(t)\, g'(t)\, t\mathrm{e}^{-t^2/2}\mathrm{d}t. \tag{4}$$

Une intégration par parties dans la seconde intégrale de (4) donne :

$$\int_{\mathbb{R}} f(t)\, g'(t)\, t\mathrm{e}^{-t^2/2}\mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}} \left(f'(t)\, g'(t) + f(t)\, g''(t)\right) \mathrm{e}^{-t^2/2}\mathrm{d}t. \tag{5}$$

En remplaçant (5) dans (4), on a :

$$\int_{\mathbb{R}} f(t)\, Lg(t)\, \mathrm{d}\gamma_1(t) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f'(t)\, g'(t)\, \mathrm{e}^{-t^2/2}\mathrm{d}t = -\int_{\mathbb{R}} f'(t)\, g'(t)\, \mathrm{d}\gamma_1(t).$$

□

La proposition suivante permet de donner un lien entre les coefficients de la décomposition de f et f' dans la base hilbertienne des polynômes d'Hermite.

Proposition 3.2. *Soit $f \in \mathscr{C}_c^1(\mathbb{R})$. On écrit :*

$$f = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \widetilde{H_n} \quad \text{et} \quad f' = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n \widetilde{H_n}.$$

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $b_{n-1} = \sqrt{n}\, a_n$.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la proposition 2.3, on a :

$$a_n = \int_{\mathbb{R}} f(t)\,\widetilde{H_n}(t)\,\mathrm{d}\gamma_1(t) = -\frac{1}{n}\int_{\mathbb{R}} f(t)\left(-n\widetilde{H_n}(t)\right)\mathrm{d}\gamma_1(t).$$

La relation (2) et la proposition 3.1 assurent alors que :

$$a_n = -\frac{1}{n}\int_{\mathbb{R}} f(t)\,L\widetilde{H_n}(t)\,\mathrm{d}\gamma_1(t) = \frac{1}{n}\int_{\mathbb{R}} f'(t)\,\widetilde{H_n}'(t)\,\mathrm{d}\gamma_1(t).$$

La relation (3) donne $\widetilde{H_n}' = \sqrt{n}\widetilde{H_{n-1}}$

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\int_{\mathbb{R}} f'(t)\,\widetilde{H_{n-1}}(t)\,\mathrm{d}\gamma_1(t) = \frac{1}{\sqrt{n}}b_{n-1}.$$

□

On passe à la preuve de la proposition 1.1.

Démonstration. Par des arguments usuelles de densité, il suffit de faire la preuve pour des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ à support compact.

Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ à support compact. On suppose que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f\,\mathrm{d}\gamma_1 = 0$.

Comme f et f' sont des élḿents de $L^2(\gamma_1)$, on écrit $f = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\widetilde{H_n}$ et $f' = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\widetilde{H_n}$. On a donc :

$$\int_{\mathbb{R}} f'^2\,\mathrm{d}\gamma_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n^2.$$

Or, d'après la proposition 3.2, on a $b_n = \sqrt{n+1}a_{n+1}$, ainsi

$$\int_{\mathbb{R}} f'^2\mathrm{d}\gamma_1 = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)\,a_{n+1}^2 \geq \sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2.$$

Or, comme $\widetilde{H_0} = 1$, on a $a_0 = \left\langle f, \widetilde{H_0}\right\rangle = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(t)\,\mathrm{d}\gamma_1(t) = 0$, on obtient finalement :

$$\int_{\mathbb{R}} f'^2\mathrm{d}\gamma_1 \geq \sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n^2 = \int_{\mathbb{R}} f^2\,\mathrm{d}\gamma_1.$$

□

Références

[1] M. Berger, B. Gostiaux, *Géométrie différentielle : variétés, courbes et surfaces*, Presses universitaires de France, 1992.

[2] J. Dieudonné, *Calcul infinitésimal*, Hermann, 1980.