# À quoi ressemble une union croissante de boules « rondes » ?

Erik Thomas*

**Résumé**

Dans cette note, nous nous intéressons à déterminer $\bigcup_{n=0}^{+\infty} B(a_n, r_n)$ où $B(a_n, r_n)$ est la boule euclidienne ouverte de $\mathbb{R}^d$ (pour la norme usuelle) de centre $a_n$ et de rayon $r_n > 0$ avec pour tout $n \in \mathbb{N}$, $B(a_n, r_n) \subset B(a_{n+1}, r_{n+1})$.

# 1 Introduction et premiers résultats

## 1.1 Introduction et notations

Dans toute cette note, on se place dans $\mathbb{R}^d$ muni de son produit scalaire usuel et de la norme associée, notée $\|\cdot\|$.

Dans cette note, nous nous intéressons à la nature géométrique d'une union croissante (pour l'inclusion) de boules ouvertes. Autrement dit, on s'intéresse à la nature géométrique de $\bigcup_{n=0}^{+\infty} B(a_n, r_n)$ où $B(a_n, r_n)$ est la boule ouverte de centre $a_n \in \mathbb{R}^d$ et de rayon $r_n > 0$ vérifiant $B(a_n, r_n) \subset B(a_{n+1}, r_{n+1})$.

Nous allons établir le résultat suivant :

**Théorème 1.** *Soit $(B(a_n, r_n))_{n\geq 0}$ une suite croissante de boules ouvertes de $\mathbb{R}^d$. On suppose que $r_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

*Alors, $\bigcup_{n=0}^{+\infty} B(a_n, r_n)$ est soit un boule ouverte, soit un demi-espace, soit $\mathbb{R}^d$.*

## 1.2 Premiers résultats

Dans cette sous-partie, nous allons traiter un cas particulier du théorème 1. On conserve les notations introduites ci-dessus.

**Proposition 1.** *La suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.*

*Démonstration.* On remarque que

$$r_n = \frac{1}{2} \sup_{(x,y)\in B(a_n,r_n)^2} \|x - y\| .$$

Comme $B(a_n, r_n) \subset B(a_{n+1}, r_{n+1})$, on peut donc écrire

$$r_n = \frac{1}{2} \sup_{(x,y)\in B(a_n,r_n)^2} \|x - y\| \leq \frac{1}{2} \sup_{(x,y)\in B(a_{n+1},r_{n+1})^2} \|x - y\| = r_{n+1}.$$

□

Nous pouvons maintenant prouver le théorème 1 lorsque la suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée, donc converge vers une limite notée $r$.

*erik.thomas@ens-rennes.fr

*Démonstration.* — On commence par montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Comme $B(a_0, r_0) \subset B(a_n, r_n)$, on a $\|a_0 - a_n\| \leq r_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Pour conclure, il suffit d'écrire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \|a_n\| \leq \|a_n - a_0\| + \|a_0\| \leq r_n + \|a_0\| \leq r + \|a_0\| .$$

— La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, on peut en extraire une sous-suite, notée $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, qui converge vers $a \in \mathbb{R}^d$. Montrons que $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} B(a_{n_k}, r_{n_k}) = B(a, r)$.

Soit $x \in \bigcup_{k\in\mathbb{N}} B(a_{n_k}, r_{n_k})$ : il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que $x \in B\left(a_{n_{k_0}}, r_{n_{k_0}}\right)$, soit $\left\|x - a_{n_{k_0}}\right\| < r_{n_{k_0}}$. Par croissance, pour tout $k \geq k_0$, on a $\|x - a_{n_k}\| < r_{n_k}$. En faisant tendre $k$ vers $+\infty$, on a $\|x - a\| \leq r$, donc $x \in B_f(a, r)$ (boule fermée de centre $a$ et de rayon $r$).

Soit $x \in B(a, r)$. Soit $r'$ tel que $\|x - a\| < r' < r$. Soit $\varepsilon > 0$ tel que $r' + \varepsilon < r$. Comme la suite $(r_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers $r$ en étant croissante, il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geq k_0$, $r' + \varepsilon < r_{n_{k_0}} \leq r_{n_k} \leq r$

Comme la suite $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers $a$, il existe $k_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geq k_1$ $\|a - a_{n_k}\| < \varepsilon$. On a alors :

$$\forall k \geq \max\{k_0, k_1\}, \quad \|x - a_{n_k}\| \leq \|x - a\| + \|a - a_{n_k}\| < r' + \varepsilon < r_{n_k}.$$

Il s'ensuit que $x \in B(a_{n_k}, r_{n_k})$, soit $x \in \bigcup_{k=0}^{+\infty} B(a_{n_k}, r_{n_k})$. On a montré que $B(a, r) \subset \bigcup_{k=0}^{+\infty} B(a_{n_k}, r_{n_k}) \subset B_f(a, r)$.

Comme $\bigcup_{k=0}^{+\infty} B(a_{n_k}, r_{n_k})$ est ouvert, on a $\bigcup_{k=0}^{+\infty} B(a_{n_k}, r_{n_k}) = B(a, r)$.

— On conclut en remarquant que

$$\bigcup_{n=0}^{+\infty} B(a_n, r_n) = \bigcup_{k=0}^{+\infty} B(a_{n_k}, r_{n_k}) = B(a, r) .$$

$\square$

*Remarque* 1. On remarquera que la preuve ci-dessus n'utilise pas le fait que la norme $\|\cdot\|$ est la norme usuelle sur $\mathbb{R}^d$. Ainsi, lorsque la suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée, $\bigcup_{n=0}^{+\infty} B(a_n, r_n)$ est une boule ouverte de $\mathbb{R}^d$ pour n'importe quelle norme sur $\mathbb{R}^d$.

**Dans toute la suite de cet article, on suppose que la suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas majorée, donc elle diverge vers $+\infty$.**

# 2 Preuve du théorème 1

On commence par traiter le cas $d = 2$ qui nous servira pour le cas général.

## 2.1 En dimension $d = 2$

La preuve se base sur le résultat classique suivant.

**Lemme 2.1.** *Soit $C$ un convexe fermé de $\mathbb{R}^d$ différent de $\mathbb{R}^d$ et $x_0 \in \partial C$ (on rappelle que $\partial C := \operatorname{adh}(C) \setminus \operatorname{int}(C)$).*
*Alors, $C$ admet au moins un hyperplan d'appui passant par $x_0$, c'est-à-dire que $C$ est contenu dans l'un des deux demi-espaces limités par $H$.*

La preuve de ce résultat classique est renvoyé à [1].
Nous aurons besoin du résultat suivant dont la preuve est laissée au lecteur.

**Lemme 2.2.** *Soit $O \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert convexe dense. Alors, $O = \mathbb{R}^d$.*

Nous prouvons le théorème 1 lorsque $d = 2$.

*Démonstration.* On commence par remarquer que $C$ est convexe.

Si $C = \mathbb{R}^2$, c'est terminé. On suppose donc $C \neq \mathbb{R}^2$. Par le lemme 2.2, $\operatorname{adh}(C) \neq \mathbb{R}^2$, ainsi le lemme 2.1 assure que $\operatorname{adh}(C)$ a un hyperplan d'appui, donc une droite notée $D_1$, en un point $O$.

Soit $D_2$ la droite orthogonale à $D_1$ passant par $O$. On forme ainsi un repère orthonormée $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ et les coordonnées s'entendent dans ce repère.

Quitte à considérer le convexe $-C$ dont $D_1$ est encore une droite d'appui en $O$, on peut supposer que $C \subset \{y > 0\}$.

Soit $M(a,b) \in \{y > 0\}$.

Comme $O$ est un point adhérent à $C$, il existe un entier $N_1$ tel que pour tout $n \geq N_1$, $B(a_n, r_n) \cap B(O, b/2) \neq \varnothing$.

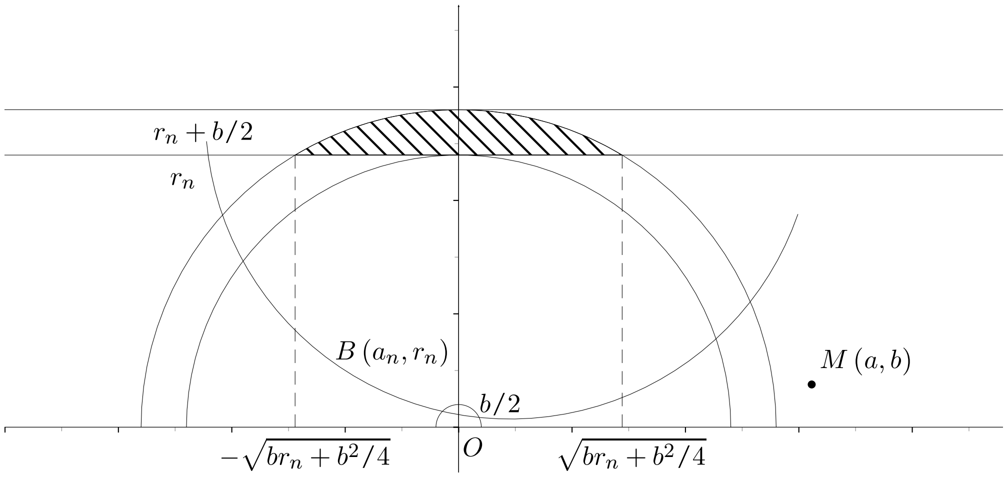


Figure 1 – Schéma récapitulant la situation.

On note $(x_n, y_n)$ les coordonnées de $a_n$. On remarque alors que pour tout $n \geq N_1$, on a $r_n \leq y_n < r_n + b/2$ car $B(a_n, r_n) \cap B(O, b/2) \neq \varnothing$.

Remarquons que l'on a aussi $|x_n| \leq \sqrt{br_n + b^2/4}$. En effet, si l'on avait $|x_n| > \sqrt{br_n + b^2/4}$, on aurait

$$x_n^2 + y_n^2 > br_n + b^2/4 + r_n^2 = (r_n + b/2)^2,$$

ce qui est impossible car $B(a_n, r_n) \cap B(O, b/2) \neq \varnothing$.

On pose $c_n := x_n - r_n$ et $d_n := x_n + r_n$ de sorte que $B(a_n, r_n) \subset ]c_n, d_n[ \times \mathbb{R}$. Comme $|x_n| \leq \sqrt{br_n + b^2/4}$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = -\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} d_n = +\infty$.

Soit $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_2$, $c_n < a$ et $d_n > a$. Soit aussi $N_3$ tel que pour tout $n \geq N_3$, $r_n \geq b$.

Pour tout $x \in [c_n, d_n]$, on pose $f_n(x) := y_n - \sqrt{r_n^2 - (x - x_n)^2}$. On remarque que $M \in B(a_n, r_n)$ pour une certaine valeur de $n \geq \max\{N_1, N_2, N_3\}$ dès que $f_n(a) \leq b$. La condition $B(a_n, r_n) \cap B(O, b/2) \neq \varnothing$ se réécrit en $0 \leq f_n(0) \leq b/2$. Un simple calcul donne $f_n'(x) = \dfrac{x - x_n}{\sqrt{r_n^2 - (x - x_n)^2}}$.

Supposons $a \geq 0$, le cas où $a \leq 0$ se traite de manière analogue. Pour tout $x \in [0, a]$, on a $(x - x_n)^2 \leq \left(a + \sqrt{br_n + b^2/4}\right)^2$, donc $\sqrt{r_n^2 - (x - x_n)^2} \geq \sqrt{r_n^2 - \left(a + \sqrt{br_n + b^2/4}\right)^2}$. Il s'ensuit que

$$\forall x \in [0, a], \quad \left|f_n'(x)\right| \leq \frac{a + |x_n|}{\sqrt{r_n^2 - \left(a + \sqrt{br_n + b^2/4}\right)^2}}.$$

Comme $|x_n| \leq \sqrt{br_n + b^2/4}$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a + |x_n|}{\sqrt{r_n^2 - \left(a + \sqrt{br_n + b^2/4}\right)^2}} = 0$. En particulier, il existe un entier $N_4$ tel que pour tout $n \geq N_4$, $\dfrac{a + |x_n|}{\sqrt{r_n^2 - \left(a + \sqrt{br_n + b^2/4}\right)^2}} \leq b/3a$. L'inégalité des accroissements finis assure

que
$$|f_n(a) - f_n(0)| \leq b/3a \times a = b/3.$$
Il s'ensuit que
$$f_n(a) = |f_n(a)| \leq |f_n(a) - f_n(0)| + |f_n(0)| \leq b/3 + b/2 < b.$$
Il s'ensuit que $M \in B(a_n, r_n)$ pour tout $n \geq \max\{N_1, N_2, N_3, N_4\}$, donc $C = \{y > 0\}$.

□

## 2.2 En dimension $d \geq 3$

On se place en dimension $d \geq 3$. Nous allons voir que la preuve se base sur ce qui vient d'être fait en dimension 2.

*Démonstration.* On commence par remarquer que $C$ est convexe.

Si $C = \mathbb{R}^d$, c'est terminé. On suppose $C \neq \mathbb{R}^d$. On remarque que $\operatorname{adh}(C) \neq \mathbb{R}^d$ (lemme 2.1), ainsi $\operatorname{adh}(C)$ a un hyperplan d'appui affine $H$ en un point $O$ (lemme 2.2). Soit $x_1$ un vecteur de norme 1 tel que $H = x_1^{\perp}$.

Quitte à considérer le convexe $-C$, on peut supposer que $C \subset \{x_1 > 0\}$. Soit $M \in \{x_1 > 0\}$.

On place en $O$ un repère affine orthonormée $(O\,; \vec{x_1}, \vec{x_2}, \ldots, \vec{x_d})$ de sorte que les coordonnées de $M$ dans ce repère soit $(m_1, m_2, 0, \ldots, 0)$.

Comme $O$ est un point adhérent à $C$, il existe un entier $N_1$ tel que pour tout $n \geq N_1$, $B(a_n, r_n) \cap B(0, m_1/2) \neq \varnothing$.

On note $\left(a_n^{(1)}, \ldots, a_n^{(d)}\right)$ les coordonnées de $a_n$. On remarque que pour tout $n \geq N_1$, $r_n \leq a_n^{(1)} \leq r_n + m_1/2$ car $B(a_n, r_n) \cap B(O, m_1/2) \neq \varnothing$.

On remarque alors que
$$n \geq N_1, \quad \left(a_n^{(3)}\right)^2 + \cdots + \left(a_n^{(d)}\right)^2 \leq m_1 r_n + m_1^2/4. \tag{1}$$
En effet, sinon on aurait :
$$\left(a_n^{(1)}\right)^2 + \left(a_n^{(2)}\right)^2 + \left(a_n^{(3)}\right)^2 + \cdots + \left(a_n^{(d)}\right)^2 > r_n^2 + m_1 r_n + m_1^2/4 = (r_n + m_1/2)^2,$$
ce qui contredit le fait que $B(a_n, r_n) \cap B(O, m_1/2) \neq \varnothing$ pour $n \geq N_1$.

On coupe les boules $B(a_n, r_n)$ par le plan $P$ d'équation $x_3 = \cdots = x_d = 0$. L'équation de $C_n := B(a_n, r_n) \cap P$ est alors donnée par :
$$\left(x - a_n^{(1)}\right)^2 + \left(x_2 - a_n^{(2)}\right)^2 = r_n^2 - \left(\left(a_n^{(3)}\right)^2 + \cdots + \left(a_n^{(d)}\right)^2\right).$$
En utilisant (1), notons que pour tout $n \geq N_1$, $r_n^2 - \left(\left(a_n^{(3)}\right)^2 + \cdots + \left(a_n^{(d)}\right)^2\right) \geq 0$. On pose $q_n^2 := r_n^2 - \left(\left(a_n^{(3)}\right)^2 + \cdots + \left(a_n^{(d)}\right)^2\right)$ avec $q_n \geq 0$. Toujours en utilisant (1), on a $\lim\limits_{n \to +\infty} q_n = +\infty$.

La suite $(C_n)_{n \geq N_1}$ est donc une suite de cercles du plan $P$ dont la dont la suite des rayons n'est pas bornée. En utilisant le théorème 1 en dimension 2, $\bigcup\limits_{n \geq N_1} C_n$ est soit le plan $P$, soit un demi-plan. Or, $\bigcup\limits_{n \geq N_1} C_n \subset \{x_1 > 0\}$, donc $\bigcup\limits_{n \geq N_1} C_n$ est un demi-plan. Comme c'est un demi plan inclus dans le demi-plan $\{x_1 > 0\} \cap P$, on en déduit que c'est le demi-plan d'équation $\{x_1 > a\} \cap P$ avec $a \geq 0$.

Comme $B(a_n, r_n) \cap B(0, m_1/2) \neq \varnothing$, on en déduit que $a \leq m_1/2$, donc $M \in \bigcup\limits_{n \geq N_1} C_n \subset \bigcup\limits_{n \geq 0} B(a_n, r_n)$.

□

## 3 Et pour d'autres normes ?

Le théorème 1 n'est pas vraie pour d'autres normes. Par exemple, il tombe en défaut pour la norme infini définie par $\|x\|_\infty := \max\{|x_1|, \ldots, |x_d|\}$. Plus précisément, on a la :

**Proposition 2.** *Toujours avec les mêmes notations,*

$$\bigcup_{n=0}^{+\infty} B(a_n, r_n) = \prod_{i=1}^{d} ]a_i, b_i[$$

*où les intervalles* $]a_i, b_i[$ *sont des droites ou des demi-droites.*

*Démonstration.* Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on écrit $a_n = \left(a_1^{(n)}, \ldots, a_d^{(n)}\right)$ de sorte que $B(a_n, r_n) = \prod_{i=1}^{d} \left]a_i^{(n)} - r_n, a_i^{(n)} + r_n\right[$.

Comme la suite $(B(a_n, r_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, les suites $\left(a_i^{(n)} - r_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ (resp. $\left(a_i^{(n)} + r_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$) sont décroissantes (resp. croissantes) : elles admettent des limites (finies ou infinies) que l'on note respectivement $a_i$ et $b_i$.

Or, $\lim_{n\to+\infty} \left(\left(a_i^{(n)} + r_n\right) - \left(a_i^{(n)} - r_n\right)\right) = b_i - a_i = \lim_{n\to+\infty} 2r_n = +\infty$, ainsi les limites $a_i$ et $b_i$ ne sont pas simultanément finies, donc $]a_i, b_i[$ est une droite ou une demi-droite.

□

*Remarque* 2. On se convaincre facilement que le résultat du théorème 1 est faux pour la norme 1.

Une question paraît alors naturelle : quelle est la situation pour les autres normes $p$ ? On conjecture que le résultat du théorème 1 reste vraie pour n'importe quelle norme $p$ avec $p \in ]1, \infty[$. Notre preuve ne semble pas s'adapter car nous utilisons de manière fondamentale l'invariance par rotation des boules pour la norme 2.

## Références

[1] R. Tyrell Rockafellar, *Convex Analysis*, Princeton University Press, 1997.