Chapitre 1 : Compléments d'algèbre linéaire

Table des matières

Dans tout le chapitre, $\mathbf{K}$ est le corps $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$. On fixe E un espace vectoriel sur le corps $\mathbf{K}$.

1 Rappels d'algèbre linéaire et généralités sur les familles de vecteurs d'un espace vectoriel

1.1 Généralités sur les sous-espaces vectoriels

La définition d'un espace vectoriel a été vue en TSI 1, nous n'allons pas revenir dessus surtout qu'elle est longue. Rappelons néanmoins quelques exemples d'espaces vectoriels qu'il **faut** connaître.

Exemple 1.
1. $(\mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K}), +, \cdot)$ l'ensemble des matrices de taille $n \times p$;
2. $(\mathbf{K}[X], +, \cdot)$ et $(\mathbf{K}_n[X], +, \cdot)$ l'ensemble des polynômes (resp. de degré au plus n) à coefficients dans $\mathbf{K}$;
3. $\left(\mathscr{C}^k(I, \mathbf{R}), +, \cdot\right)$ $(k \in \mathbf{N} \cup \{\infty\})$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^k$ sur I ;
4. $\left(\mathbf{K}^{\mathbf{N}}, +, \cdot\right)$ l'ensemble des suites à coefficients dans $\mathbf{K}$.

On peut alors définir la notion de sous-espaces vectoriels.

Définition 1. *Sous-espace vectoriel.*
Soit E un espace vectoriel et soit $F \subset E$. On dit que F est un ***sous-espace vectoriel*** *de E si :*
1. *$0 \in F$;*
2. *pour tout $(x, y) \in E^2$, $(x, y \in F) \Longrightarrow (x + y \in F)$;*
3. *pour tout $x \in E$ et pour tout $\lambda \in \mathbf{K}$, $(x \in F) \Longrightarrow (\lambda x \in F)$;*

La proposition suivante permet de simplifier (un peu) la définition précédente. Elle sera d'une utilisation systématique.

Proposition 1. *Soit E un espace vectoriel et soit F une partie de E. F est un sous-espace vectoriel de E si, et seulement si :*
1. *$0 \in F$;*
2. *pour tout $(x, y) \in E^2$, pour tout $\lambda \in \mathbf{K}$, $(x, y \in F) \Longrightarrow (x + \lambda y \in F)$.*

La prochaine proposition est très utile en pratique et est d'un usage systématique : pour montrer qu'une partie est un sous-espace vectoriel, on montre qu'elle est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel connu.

Proposition 2. *Soit E un espace vectoriel et soit F un sous-espace vectoriel de E. Alors, F est un espace vectoriel* ***pour les mêmes lois*** *que celles de E.*

Exemple 2.
1. Soit $E = \mathbf{K}^3$ et soit $F = \left\{(x, y, z) \in \mathbf{K}^3,\ x + y + z = 0\right\}$. Montrons que F est un espace vectoriel. D'après ce qui précède, il suffit de montrer que c'est un sous-espace vectoriel de E.
Il est clair que $0 \in F$. Soit $((x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)) \in F^2$ et soit $\lambda \in \mathbf{K}$, montrons que $(x_1, y_1, z_1) + \lambda(x_2, y_2, z_2) = (x_1 + \lambda x_2, y_1 + \lambda y_2, z_1 + \lambda z_2) \in F$ On a :
$$x_1 + \lambda x_2 + y_1 + \lambda y_2 + z_1 + \lambda z_2 = (x_1 + y_1 + z_1) + \lambda(x_2 + y_2 + z_2) = 0 + \lambda \times 0 = 0.$$
2. Soit $E = \mathbf{K}[X]$ et soit $F = \{P \in E,\ P(2) = 0\}$. Montrons que F est un espace vectoriel. D'après ce qui précède, il suffit de montrer que c'est un sous-espace vectoriel de E.
Il est clair que $0 \in F$. Soit $(P, Q) \in F^2$ et soit $\lambda \in \mathbf{K}$, montrons que $P + \lambda Q \in F$. On a :
$$(P + \lambda Q)(0) = P(0) + \lambda Q(0) = 0 + \lambda \times 0 = 0.$$

1.2 Famille libre/famille liée

L'année dernière, vous avez vu la notion de famille libre pour les familles **finies** de vecteurs. On généralise la définition à des familles quelconques.

Définition 2. *Famille libre, liée.*
Soit $(x_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de E.

1. *On dit que la famille $(x_i)_{i\in I}$ est* ***libre*** *si, pour tout $J \subset I$* ***fini****, la famille $(x_i)_{i\in J}$ est libre. Autrement dit,*
$$\forall J \subset I \text{ fini}, \ \forall (\lambda_i)_{i\in J} \in \mathbf{K}^J, \quad \left(\sum_{i\in J} \lambda_i x_i = 0\right) \Longrightarrow \forall i \in J, \ \lambda_i = 0. \tag{1}$$
2. *La famille $(x_i)_{i\in I}$ est* ***liée*** *si elle n'est pas libre. Si l'on considère la négation de (1), $(x_i)_{i\in I}$ est liée si :*
$$\exists J \subset I \text{ fini}, \ \exists (\lambda_i)_{i\in J}, \ \sum_{i\in J} \lambda_i x_i = 0 \quad \text{et} \quad \exists i_0 \in J, \ \lambda_{i_0} \neq 0. \tag{2}$$

La proposition suivante permet de caractériser facilement les familles liées.

Proposition 3. *Une famille $(x_i)_{i\in I}$ est liée si, et seulement si, l'un des vecteurs est combinaison linéaire (nécessairement finie) des autres.*

Démonstration. On rédige la preuve en deux temps.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Par définition, il existe $J \subset I$ fini, il existe $(\lambda_i)_{i\in J}$, il existe $i_0 \in J$ tels que
$$\sum_{i\in J} \lambda_i x_i = 0 \quad \text{et} \quad \lambda_{i_0} \neq 0.$$
On peut alors écrire $x_{i_0} = -\dfrac{1}{\lambda_{i_0}} \displaystyle\sum_{\substack{i\in J\\ i\neq i_0}} \lambda_i x_i$: x_{i_0} est donc combinaison linéaire d'éléments de $(x_i)_{i\in I}$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Si l'un des vecteurs (par exemple x) est combinaison linéaire des autres, alors il existe $J \subset I$ fini et $(\lambda_i)_{i\in J}$ tel que $x = \displaystyle\sum_{i\in J} \lambda_i x_i$. Autrement dit, on a $x - \displaystyle\sum_{i\in J} \lambda_i x_i = 0$. Comme $1 \neq 0$, en utilisant (2), on en déduit que la famille $(x_i)_{i\in I}$ est liée.

$\square$

Exemple 3. Les familles suivantes sont libres :

1. la famille $\left(X^{2k}\right)_{k\in\mathbf{N}}$ dans $\mathbf{K}[X]$;
2. la famille $(x \longmapsto |x-a|)_{a\in\mathbf{R}}$ dans l'espace vectoriel $\mathscr{C}^0(\mathbf{R}, \mathbf{R})$;
3. la famille $\left(x \longmapsto \mathrm{e}^{\lambda x}\right)_{\lambda\in\mathbf{R}}$ dans l'ensemble des applications de $\mathbf{R}$ vers $\mathbf{R}$.

Les familles suivantes sont liées :

1. la famille $(X+a)_{a\in\mathbf{R}}$ est liée ;
2. toute famille infinie dans un espace vectoriel de dimension finie.

La proposition suivante donne une condition **suffisante** agréable pour justifier qu'une famille de polynômes est libre.

Proposition 4. *Toute famille de polynômes non nuls de $\mathbf{K}[X]$, échelonnée en degré, est libre.*

Remarque 1. On rappelle qu'une famille de polynôme est dite échelonnée en degré si les polynômes de cette famille sont de degré deux à deux distincts.

Démonstration. Soit $(P_i)_{i\in I}$ une famille de polynômes échelonnée en degré. Soit $J \subset I$ fini. Montrons que $(P_i)_{i\in J}$ est libre. Soit $(\lambda_i)_{i\in J} \in \mathbf{K}^J$ tel que $\displaystyle\sum_{i\in J} \lambda_i P_i = 0$.

Supposons qu'il existe $j \in J$ tel que $\lambda_j \neq 0$. Soit $A = \{i \in J, \lambda_i \neq 0\} \neq \varnothing$ et soit $k \in A$ tel que $\deg(P_k)$ soit maximal. Il s'ensuit que $P_k = -\dfrac{1}{\lambda_k} \displaystyle\sum_{\substack{i\in J\\ i\neq k}} \lambda_i P_i$.

Par définition $\deg\left(-\dfrac{1}{\lambda_k} \displaystyle\sum_{\substack{i\in J\\ i\neq k}} \lambda_i P_i\right) < \deg(P_k)$ car P_k n'est pas nul, ce qui est exclu.

$\square$

1.3 Famille génératrice

Définition 3. *Famille génératrice.*

Une famille $\mathscr{F}$ de vecteurs de E est dite ***génératrice*** *si tout élément de E s'écrit comme une combinaison linéaire d'éléments de $\mathscr{F}$.*

Exemple 4. Les familles suivantes sont génératrices :

1. la famille $(X^n)_{n\in\mathbf{N}}$ est génératrice de $\mathbf{K}[X]$;
2. la famille $(x)_{x\in E}$ est génératrice de E.

1.4 Bases

Définition 4. *Base*

Une famille $\mathscr{B}$ d'éléments de E est une ***base*** *de E si elle est libre et génératrice.*

La proposition suivante permet de caractériser les bases d'un espace vectoriel.

Proposition 5. *Une famille d'éléments $\mathscr{B} = (e_i)_{i\in I}$ de E est une base si, et seulement si, tout élément de E s'écrit comme une combinaison linéaire unique d'éléments de $\mathscr{B}$.*

Démonstration. On prouve la proposition en deux temps.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Soit $x \in E$. Comme $\mathscr{B}$ est une base de E, c'est donc une famille génératrice. Ainsi, x s'écrit comme une combinaison linéaire d'éléments de E.

Montrons l'unicité. Supposons que

$$x = \sum_{i\in J_1} \lambda_i e_i = \sum_{i\in J_2} \mu_i e_i$$

où J_1 et J_2 sont deux ensembles finis et $(\lambda_i)_{i\in J_1} \in \mathbf{K}^{J_1}$ et $(\mu_j)_{j\in J_2} \in \mathbf{K}^{J_2}$. Quitte à retirer les éléments nuls, on peut supposer que pour tout $i \in J_1$, $\lambda_i \neq 0$ et pour tout $j \in J_2$, $\mu_j \neq 0$. On pose $J_3 = J_1 \cup J_2$ et on définit la famille $(\alpha_i)_{i\in J_3} \in \mathbf{K}^{J_3}$ par :

$$\forall i \in J_3, \quad \alpha_i = \begin{cases} \lambda_i - \mu_i & \text{si } i \in J_1 \cap J_2 \\ \lambda_i & \text{si } J_1 \backslash (J_1 \cap J_2) \\ -\mu_i & \text{si } J_2 \backslash (J_1 \cap J_2) \end{cases}$$

de sorte que

$$0 = \sum_{i\in J_3} \alpha_i e_i.$$

Comme $\mathscr{B}$ est une base, c'est une famille libre, on a

$$\forall i \in J_3, \quad \alpha_i = 0.$$

Or, pour tout $i \in J_1$, $\lambda_i \neq 0$ et pour tout $j \in J_2$, $\mu_j \neq 0$, ainsi $J_1 \backslash (J_1 \cap J_2) = J_2 \backslash (J_1 \cap J_2) = \varnothing$, donc $J_1 = J_2$.

On récupère aussi, pour tout $i \in J_1 = J_2$, $\lambda_i = \mu_i$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ La famille est clairement génératrice, il suffit de montrer qu'elle est libre.

Soit $J \subset I$ fini et $(\lambda_i)_{i\in J} \in \mathbf{K}^J$ tel que $\sum_{i\in J} \lambda_i e_i = 0$. Or,

$$0 = \sum_{i\in J} \lambda_i e_i = \sum_{i\in J} 0.$$

Par unicité de l'écriture, on en déduit que pour tout $i \in J$, $\lambda_i = 0$.

□

Exemple 5. La famille $(X^n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une base de $\mathbf{K}[X]$ appelée **base canonique** de $\mathbf{K}[X]$.

La proposition suivante permet de généraliser la base donnée par la base canonique.

Proposition 6. *Exemples de bases de* $\mathbf{K}[X]$.
Soit $(P_k)_{k\in\mathbf{N}}$ *une famille de* $\mathbf{K}[X]$ *telle que* $\deg(P_k) = k$ *pour tout* $k \in \mathbf{N}$.
Alors, $(P_k)_{k\in\mathbf{N}}$ *est une base de* $\mathbf{K}[X]$.

Démonstration. On montre que la famille est libre et génératrice.

Libre. D'après la proposition 4, $(P_k)_{k\in\mathbf{N}}$ est libre.

Génératrice. Soit $P \in \mathbf{K}[X]$ et soit $n \in \mathbf{N}$ tel que $P \in \mathbf{K}_n[X]$.
La famille $(P_0, \ldots, P_n)$ est une famille libre de $\mathbf{K}_n[X]$ contenant $n+1$ éléments. Comme $\dim(\mathbf{K}_n[X]) = n+1$, c'est une base de $\mathbf{K}_n[X]$.
En particulier, c'est une famille génératrice de $\mathbf{K}_n[X]$, donc P s'écrit comme une combinaison linéaire de $(P_0, \ldots, P_n)$, donc de la famille $(P_k)_{k\in\mathbf{N}}$.

□

1.5 Rappels sur les applications linéaires

On rappelle qu'un espace vectoriel de dimension finie admet des bases finies et celles-ci ont toutes le même nombre d'éléments.

Définition 5. *Application linéaire.*
Soient E *et* F *deux* $\mathbf{K}$*-espaces vectoriels. Soit* $u : E \longrightarrow F$ *une application. On dit que* u *est* ***linéaire*** *si :*

$$\forall (x,y) \in E^2,\ \forall (\lambda,\mu) \in \mathbf{K}^2, \quad u(\lambda x + \mu y) = \lambda u(x) + \mu u(y).$$

Remarque 2. Pour montrer qu'une application u est linéaire, il suffit de montrer que :

$$\forall (x,y) \in E^2,\ \forall \lambda \in \mathbf{K}, \quad u(\lambda x + y) = \lambda u(x) + u(y).$$

Exemple 6.

1. Soit $u : \mathbf{K}^3 \longrightarrow \mathbf{K}^2$ définie par : pour tout $(x,y,z) \in \mathbf{K}^3$, $u(x,y,z) = (x+y, y-z)$. u est linéaire.
   En effet, soit $((x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2)) \in \left(\mathbf{K}^3\right)^2$ et soit $\lambda \in \mathbf{K}$. On a :
   $$\begin{aligned} u((x_1,y_1,z_1) + \lambda(x_2,y_2,z_2)) &= u(x_1+\lambda x_2, y_1+\lambda y_2, z_1+\lambda z_2) \\ &= (x_1+\lambda x_2 + y_1 + \lambda y_2, y_1+\lambda y_2 - (z_1+\lambda z_2)) \\ &= (x_1+y_1+\lambda(x_2+y_2), y_1 - z_1 + \lambda(y_2-z_2)) \\ &= (x_1+y_1, y_1-z_1) + \lambda(x_2+y_2y_2-z_2) \\ &= u(x_1,y_1,z_1) + \lambda u(x_2,y_2,z_2). \end{aligned}$$
   On a montré que u est linéaire.
2. Soit $u : \mathbf{K}[X] \longrightarrow \mathbf{K}$ définie par : pour tout $P \in \mathbf{K}[X]$, $u(P) = P'(0)$. u est linéaire.
   Soit $(P,Q) \in \mathbf{K}[X]^2$ et soit $\lambda \in \mathbf{K}$. On a :
   $$\begin{aligned} u(P+\lambda Q) = (P+\lambda Q)'(0) & \\ &= \left(P' + \lambda Q'\right)(0) \quad \text{par linéarité de la dérivation} \\ &= P'(0) + \lambda Q'(0) \\ &= u(P) + \lambda u(Q). \end{aligned}$$
   On a montré que u est linéaire.
3. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ et soit $u : \mathscr{M}_n(\mathbf{K}) \longrightarrow \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ définie par : pour tout $M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$, $u(M) = AM - MA$. u est linéaire.
   En effet, soit $(M,N) \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})^2$ et soit $\lambda \in \mathbf{K}$. On a :
   $$\begin{aligned} u(M+\lambda N) &= A(M+\lambda N) - (M+\lambda N)A \\ &= AM + \lambda AN - MA - \lambda NA \\ &= AM - MA + \lambda(AN - NA) \\ &= u(M) + \lambda u(N). \end{aligned}$$

Définition 6. *Noyau d'une application linéaire.*
Soient E et F deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels et soit $u : E \longrightarrow F$ une application linéaire. On définit son ***noyau*** *noté* $\operatorname{Ker}(u)$ *par :*

$$\operatorname{Ker}(u) = \{x \in E,\ u(x) = 0\}.$$

Exemple 7.

1. Soit $u : \mathbf{K}^3 \longrightarrow \mathbf{K}^2$ définie par : pour tout $(x, y, z) \in \mathbf{K}^3$, $u(x, y, z) = (x - y, y - z)$. On admet que u est linéaire et on se propose de déterminer son noyau.
Soit $(x, y, z) \in \mathbf{K}^3$. On a :

$$\begin{aligned}(x, y, z) \in \operatorname{Ker}(u) &\iff u(x, y, z) = (0, 0)\\ &\iff (x - y, y - z) = (0, 0)\\ &\iff \begin{cases} x - y &= 0\\ y - z &= 0\end{cases}\\ &\iff x = y = z\\ &\iff (x, y, z) = (x, x, x) = x(1, 1, 1).\end{aligned}$$

On en déduit que $\operatorname{Ker}(u) = \operatorname{Vect}(1, 1, 1)$.
On notera que l'on a donné une base de $\operatorname{Ker}(u)$ car la famille trouvée est par définition génératrice et elle est libre car contient un seule élément non nul.

2. Soit $u : \mathbf{K}_2[X] \longrightarrow \mathbf{K}$ définie par : pour tout $P \in \mathbf{K}_2[X]$, $u(P) = P(1)$. On admet que u est linéaire et on se propose de déterminer son noyau.
Soit $P = aX^2 + bX + c \in \mathbf{K}_2[X]$. On a :

$$\begin{aligned}P \in \operatorname{Ker}(u) &\iff u(P) = 0\\ &\iff P(1) = a + b + c = 0\\ &\iff a = -b - c\\ &\iff P = aX^2 + bX + c = (-b - c)X^2 + bX + c = b\left(-X^2 + X\right) + c\left(-X^2 + 1\right).\end{aligned}$$

On en déduit que $\operatorname{Ker}(u) = \operatorname{Vect}\left(-X^2 + X, -X^2 + 1\right)$.
On notera que l'on a donné une base de $\operatorname{Ker}(u)$ car la famille trouvée est par définition génératrice et elle est libre car contient deux vecteurs non colinéaires.

Définition 7. *Image d'une application linéaire.*
Soient E et F deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels et soit $u : E \longrightarrow F$ une application linéaire. On définit son ***image*** *noté* $\operatorname{Im}(u)$ *par :*

$$\operatorname{Im}(u) = \{y \in F,\ \exists x \in \mathbb{E},\ y = u(x)\} = \{u(x),\ x \in E\}.$$

On rappelle la proposition suivante vue en TSI 1.

Proposition 7. *L'image d'une application linéaire $u : E \longrightarrow F$ est un sous-espace vectoriel de F.*

Démonstration. Voir cours de TSI 1.

□

Déterminer une image n'est pas forcément simple. On rappelle les deux propositions suivantes vues en TSI 1.

Proposition 8. *Soit E un espace vectoriel de dimension finie et soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Soit $u : E \longrightarrow F$ une application linéaire. On a :*

$$\operatorname{Im}(u) = \operatorname{Vect}(u(e_1), \ldots, u(e_n)).$$

Démonstration. Voir cours de TSI 1.

□

Théorème 1. *Théorème du rang.*
Soient E et F deux espaces vectoriels. On suppose que u est de dimension finie. Soit $u \in \mathscr{L}(E, F)$. Alors, $\operatorname{Im}(u)$ *est de dimension finie et*

$$\dim(E) = \dim(\operatorname{Ker}(u)) + \dim(\operatorname{Im}(u)).$$

Démonstration. Admis. $\square$

Exemple 8. On reprend les applications linéaires de l'exemple 7.

1. On a $\dim(\operatorname{Ker}(u)) = 1$. Le théorème du rang assure que $\dim(\operatorname{Im}(u)) = 3 - 1 = 2$. Or,
$$\operatorname{Im}(u) = \operatorname{Vect}(u(1,0,0), u(0,1,0), u(0,0,1)) = \operatorname{Vect}((1,0),(-1,1),(0,-1)).$$
Comme $(-1,1) = -1 \times (1,0) + (-1) \times (0,-1)$, on en déduit que
$$\operatorname{Im}(u) = \operatorname{Vect}((1,0),(0,-1)) = \operatorname{Vect}((1,0),(0,1)) = \mathbf{K}^2.$$
2. On a $\dim(\operatorname{Ker}(u)) = 2$. Le théorème du rang assure que $\dim(\operatorname{Im}(u)) = 3 - 2 = 1$. Or,
$$\operatorname{Im}(u) = \operatorname{Vect}\left(u(1), u(X), u\left(X^2\right)\right) = \operatorname{Vect}(1,1,1) = \operatorname{Vect}(1) = \mathbf{K}.$$

1.6 Matrice d'une application linéaire

Définition 8. *Matrice d'une application linéaire.*

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimensions finies. On se donne $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ une base de E et $\mathscr{C} = (f_1, \ldots, f_n)$ une base de F. On appelle la ***matrice*** *de u dans les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$, notée $\operatorname{mat}_{\mathscr{B}\to\mathscr{C}}(u)$ la matrice des coordonnées des vecteurs $u(e_1), \ldots, u(e_n)$ dans la base $\mathscr{C}$.*

Exemple 9.
1. Soit $u : \mathbf{K}^3 \longrightarrow \mathbf{K}^3$ définie par $u(x,y,z) = (2x+y, -x+y-z, y-z)$. On admet que u est linéaire.
La matrice de u dans la base canonique $\mathscr{B}$ de $\mathbf{K}^3$ est : $\operatorname{mat}_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ car $u(1,0,0) = (2,-1,0) = 2 \times (1,0,0) + (-1) \times (0,1,0) + 0 \times (0,0,1)$, $u(0,1,0) = (1,1,1) = 1 \times (1,0,0) + 1 \times (0,1,0) + 1 \times (0,0,1)$ et $u(0,0,1) = (0,-1,-1) = 0 \times (1,0,0) + (-1) \times (0,1,0) + (-1) \times (0,0,1)$.
2. Soit $u : \mathbf{K}_2[X] \longrightarrow \mathbf{K}^2$ définie par : $u(P) = (P(1), P(2))$. On admet que u est linéaire.
On note $\mathscr{B} = \left(1, X, X^2\right)$ et $\mathscr{C} = ((1,0),(0,1))$ les bases canoniques respectives de $\mathbf{K}_2[X]$ et $\mathbf{K}^2$. Comme $u(1) = (1,1) = 1 \times (1,0) + 1 \times (0,1)$, $u(X) = (1,2) = 1 \times (1,0) + 2 \times (0,1)$ et $u\left(X^2\right) = (1,4) = 1 \times (1,0) + 4 \times (0,1)$, on a $\operatorname{mat}_{\mathscr{B}\to\mathscr{C}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

La proposition, vue en TSI 1, permet de comprendre l'utilité de la notion de matrice d'une application linéaire.

Proposition 9. *Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie. Soit $u \in \mathscr{L}(E,F)$. On munit E et F de deux bases notées $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$.*

Soit $x \in E$ et soit X la matrice des coordonnées de x dans la base $\mathscr{B}$. On pose $y = u(x)$ et on note Y la matrice de ses coordonnées dans la base $\mathscr{C}$. Soit $A = \operatorname{mat}_{\mathscr{B}\to\mathscr{C}}(u)$. Alors, on a : $Y = AX$.

Démonstration. Voir cours de TSI 1. $\square$

Exemple 10. On admet que la famille $\mathscr{B} = ((1,1,0),(1,0,1),(0,1,1))$ est une base de $\mathbf{K}^3$. Soit $u \in \mathscr{L}\left(\mathbf{K}^3\right)$ dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$. Calculer $u(2,2,2)$.

On remarque que $(2,2,2) = 1 \times (1,1,0) + 1 \times (1,0,1) + 1 \times (0,1,1)$, ainsi la matrice des coordonnées de $(2,2,2)$ est $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Il s'ensuit que la matrice des coordonnées de $u(x)$ dans la base $\mathscr{B}$ est $AX = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$.

On en déduit que :
$$u(x) = 1 \times (1,1,0) + 6 \times (1,0,1) + 4 \times (0,1,1) = (7,5,10).$$

La proposition suivante fait le lien entre le produit matriciel et la composition des applications linéaires.

Proposition 10. *Lien entre la multiplication de matrices et la composition d'applications linéaires*
Soient E, F et G trois espaces vectoriels de dimension finie. On note $\mathscr{B}$, $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$ des bases respectives de E, F et G. Soient $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $g \in \mathscr{L}(F,G)$. On a :

$$\mathrm{mat}_{\mathscr{B}\to\mathscr{D}}(g\circ f) = \mathrm{mat}_{\mathscr{C}\to\mathscr{D}}(g) \times \mathrm{mat}_{\mathscr{B}\to\mathscr{C}}(f).$$

Démonstration. La preuve découle immédiatement de la proposition 9. □

Corollaire 1. *Matrice d'un automorphisme.*
On suppose que E est de dimension finie. Soit $f \in \mathrm{GL}(E)$. Soit $\mathscr{B}$ une base de E. Alors $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(f)$ est inversible et $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(f) = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}}\left(f^{-1}\right)$.

Démonstration. Il suffit d'utiliser la proposition 10 avec $E = F = G$, $\mathscr{B} = \mathscr{C} = \mathscr{D}$, $g = f^{-1}$ et remarquer que la matrice de id_E est la matrice identité. □

Exemple 11. On se propose de montrer que $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible et calculer son inverse.

Soit $u; \mathbf{K}_3[X] \longrightarrow \mathbf{K}_3[X]$ définie par $u(P) = P(X+1)$. Il est clair que $u \in \mathscr{L}(\mathbf{K}_3[X])$.
On remarque que M est la matrice de u dans la base canonique de $\mathbf{K}_3[X]$ car :

$$u(1) = 1,\ u(X) = X+1,\ u\left(X^2\right) = (X+1)^2 = X^2+2X+1 \text{ et } u\left(X^3\right) = (X+1)^3 = X^3+3X^2+3X+1.$$

De plus, si l'on introduit $v : \mathbf{K}_3[X] \longrightarrow \mathbf{K}_3[X]$ par : $v(P) = P(X-1)$, alors pour tout $P \in \mathbf{K}_3[X]$, on a :

$$(u\circ v)(P) = u(v(P)) = u(P(X-1)) = P(X-1+1) = P.$$

On en déduit que u est un automorphisme de $\mathbf{K}_3[X]$ et $u^{-1} = v$. Or, comme

$$v(1) = 1,\ v(X) = X-1,\ v\left(X^2\right) = (X-1)^2 = X^2-2X+1 \text{ et } v\left(X^3\right) = (X-1)^3 = X^3-3X^2+3X-1,$$

la matrice de v dans la base canonique de $\mathbf{K}_3[X]$ est $M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1.7 Rappels sur les formules de changement de bases

Dans cette sous-partie, E est de dimension finie $n \in \mathbf{N}^*$. On se donne deux bases de E, $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathscr{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$. Si $x \in E$, on note $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{\mathscr{B}}$ la matrice des coordonnées de x dans la base $\mathscr{B}$ et $\begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}_{\mathscr{B}'}$ la matrice des coordonnées de x dans la base $\mathscr{B}'$.

Définition 9. *Matrice de passage.*
*La **matrice de passage** de la base $\mathscr{B}$ vers la base $\mathscr{B}'$ est la matrice, notée $\mathrm{Pass}(\mathscr{B}\to\mathscr{B}')$, est la matrice des coordonnées vecteurs de la base $\mathscr{B}'$ exprimées dans la base $\mathscr{B}$.*

Remarque 3. Autrement si, c'est la matrice de l'application linéaire $\mathrm{id}_E : (E, \mathscr{B}') \longrightarrow (E, \mathscr{B})$, soit $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(\mathrm{id}_E)$.

Exemple 12. On munit $\mathbf{K}_2[X]$ des bases $\mathscr{B} = \left(1, X, X^2\right)$ et $\mathscr{B}' = \left(2, 1+2X, 1-X+X^2\right)$. Alors

$$\mathrm{Pass}(\mathscr{B}\to\mathscr{B}') = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Proposition 11. *Inversibité des matrices de passage.*
$\mathrm{Pass}(\mathscr{B}\to\mathscr{B}')$ *est inversible et* $\mathrm{Pass}(\mathscr{B}\to\mathscr{B}')^{-1} = \mathrm{Pass}(\mathscr{B}'\to\mathscr{B})$.

Démonstration. D'après la remarque 3, on a

$$\mathrm{Pass}\left(\mathscr{B}\to\mathscr{B}'\right)=\mathrm{mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}\left(\mathrm{id}_E\right)\quad\text{et}\quad\mathrm{Pass}\left(\mathscr{B}'\to\mathscr{B}\right)=\mathrm{mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}\left(\mathrm{id}_E\right).$$

Ainsi

$$\mathrm{Pass}\left(\mathscr{B}\to\mathscr{B}'\right)\mathrm{Pass}\left(\mathscr{B}'\to\mathscr{B}\right)=\mathrm{mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}\left(\mathrm{id}_E\right)\mathrm{mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}\left(\mathrm{id}_E\right)=\mathrm{mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}}\left(\mathrm{id}_E\circ\mathrm{id}_E\right)=\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}\left(\mathrm{id}_E\right)=\mathrm{I}_n.$$

□

Proposition 12. *Formule de changement de bases pour les vecteurs.*

Soit $x\in E$ dont on note X la matrice des coordonnées dans la base $\mathscr{B}$ et X' la matrice des coordonnées dans la base $\mathscr{B}'$. On a

$$X=\mathrm{Pass}\left(\mathscr{B}\to\mathscr{B}'\right)X'.$$

Démonstration. Soit $\mathrm{id}_E:(E,\mathscr{B}')\longrightarrow(E,\mathscr{B})$. On a $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}\left(\mathrm{id}_E\right)=\mathrm{Pass}\left(\mathscr{B}\to\mathscr{B}'\right)$.

Par le théorème de représentation matricielle des applications linéaires, on a :

$$\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}\left(x\right)=\mathrm{Pass}\left(\mathscr{B}\to\mathscr{B}'\right)\mathrm{mat}_{\mathscr{B}'}\left(x\right).$$

□

Exemple 13. Soit $E=\mathbf{K}_2\left[X\right]$ muni de la base canonique $\mathscr{B}=\left(1,X,X^2\right)$.

1. Justifier que la famille $\mathscr{B}'=\left(1,X-1,(X-1)^2\right)$ est une base de E.
2. Donner les coordonnées de $Q=2X^2-3X-1$ dans la base $\mathscr{B}'$.

Solution.

1. La famille $\mathscr{B}'$ est une famille d'éléments de E, est échelonnée en degrés, donc est libre. Elle est de cardinal 3 dans E de dimension 3, on en déduit que $\mathscr{B}'$ est une base de E.
2. On note X (resp. X') la matrice des coordonnées de Q dans la base $\mathscr{B}$ (resp. $\mathscr{B}'$). D'après la proposition 12, on a
$$X'=\mathrm{Pass}\left(\mathscr{B}'\to\mathscr{B}\right)X.$$
Il est clair que $X=\begin{pmatrix}-1\\-3\\2\end{pmatrix}$. De plus, comme
$$X^2=(X-1)^2+2\left(X-1\right)+1,\ X=\left(X-1\right)+1,$$
on a $\mathrm{Pass}\left(\mathscr{B}'\to\mathscr{B}\right)=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}$.
La matrice des coordonnées de Q dans la base $\mathscr{B}'$ est alors $\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\-3\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\1\\2\end{pmatrix}$.

Proposition 13. *Formule de changement de bases pour les applications linéaires.*

Soit $u\in\mathscr{L}\left(E\right)$. On note $A=\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}\left(u\right)$ et $A'=\mathrm{mat}_{\mathscr{B}'}\left(u\right)$. On a :

$$A=\mathrm{Pass}\left(\mathscr{B}\to\mathscr{B}'\right)A'\,\mathrm{Pass}\left(\mathscr{B}\to\mathscr{B}'\right)^{-1}.$$

Démonstration. Il suffit de remarquer la composition suivante

$$(E,\mathscr{B})\xrightarrow{u}(E,\mathscr{B})=\left(\left(E,\mathscr{B}'\right)\xrightarrow{\mathrm{id}_E}\left(E,\mathscr{B}\right)\right)\circ\left(\left(E,\mathscr{B}'\right)\xrightarrow{u}\left(E,\mathscr{B}'\right)\right)\circ\left(\left(E,\mathscr{B}\right)\xrightarrow{\mathrm{id}_E}\left(E,\mathscr{B}'\right)\right).$$

Le théorème de représentation matricielle des applications linéaires donne alors

$$\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}\left(u\right)=\mathrm{mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}\left(\mathrm{id}_E\right)\times\mathrm{mat}_{\mathscr{B}'}\left(u\right)\times\mathrm{mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}\left(\mathrm{id}_E\right),$$

soit, en utilisant la proposition 11 $\mathrm{Pass}\left(\mathscr{B}\to\mathscr{B}'\right)A'\,\mathrm{Pass}\left(\mathscr{B}\to\mathscr{B}'\right)^{-1}$.

□

Remarque 4. Pour retenir le résultat de la proposition 13, il suffit de se souvenir que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd}
(E,\mathscr{B}) \arrow[r, "u"] \arrow[d, "\mathrm{id}_E"] & (E,\mathscr{B}) \arrow[d, "\mathrm{id}_E"] \\
(E,\mathscr{B}') \arrow[r, "u"] & (E,\mathscr{B}')
\end{tikzcd}$$

Exemple 14. Soit $u \in \mathscr{L}\left(\mathbf{K}^2\right)$ dont la matrice dans la base canonique $\mathscr{B} = (e_1, e_2)$ de $\mathbf{K}^2$ est $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Soit $\mathscr{B}' = (e_1 - e_2, e_1 + e_2)$.

1. Justifier que $\mathscr{B}'$ est une base de $\mathbf{K}^2$.
2. Donner la matrice de u dans cette base.
3. Écrire la relation de passage.

Solution. 1. Par des arguments de cardinalité et de dimension, il suffit de montrer que $\mathscr{B}'$ est libre. Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbf{K}^2$ tel que $\alpha\,(e_1 - e_2) + \beta\,(e_1 + e_2) = 0$.

On a donc $(\alpha + \beta)\, e_1 + (-\alpha + \beta)\, e_2 = 0$. Comme la famille (e_1, e_2) est libre, on a $\begin{cases} \alpha + \beta & = 0 \\ -\alpha + \beta & = 0 \end{cases}$, soit $\alpha = \beta = 0$.

2. L'énoncé donne
$$u\,(e_1) = u\,(e_2) = e_1 + e_2,$$
ainsi
$$u\,(e_1 - e_2) = 0 \quad \text{et} \quad u\,(e_1 + e_2) = 2\,(e_1 + e_2)\,.$$
Ainsi, $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}'}\,(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

3. On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. D'après la proposition 13, on a
$$A = \mathrm{Pass}\left(\mathscr{B} \to \mathscr{B}'\right) A' \,\mathrm{Pass}\left(\mathscr{B} \to \mathscr{B}'\right)^{-1}.$$
Or, $\mathrm{Pass}\,(\mathscr{B} \to \mathscr{B}') = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{Pass}\,(\mathscr{B} \to \mathscr{B}')^{-1} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, donc
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2 Sous-espaces vectoriels

2.1 Somme de sous-espaces vectoriels

Dans cette sous-partie, p est un entier naturel non nul et $F_1, \dots, F_p$ sont des sous-espaces vectoriels de E.

Définition 10. *Somme de sous-espaces vectoriels.*

*La **somme** des sous-espaces vectoriels $F_1, \dots, F_p$ de E, noté $F_1 + \dots + F_p$ est le sous-espace vectoriel de E défini par*
$$F_1 + \dots + F_p = \left\{ x \in E,\ \exists\,(f_1, \dots, f_p) \in F_1 \times \dots \times F_p,\ x = \sum_{i=1}^{p} f_i \right\}.$$

Remarque 5. On peut aussi définir $F_1 + \dots + F_p$ par
$$F_1 + \dots + F_p = \left\{ f_1 + \dots + f_p,\ (f_1, \dots, f_p) \in F_1 \times \dots \times F_p \right\}.$$

Définition 11. *Somme directe de sous-espaces vectoriels.*
On dit que la somme des sous-espaces vectoriels $F = F_1 + \cdots + F_p$ est ***directe*** *si tout élément de E se décompose de manière unique selon $(F_1, \ldots, F_p)$, i.e.*

$$\forall x \in F,\ \exists!\,(f_1, \ldots, f_p) \in F_1 \times \cdots \times F_p,\ x = \sum_{i=1}^{p} f_i.$$

La proposition suivante est plus simple à manipuler que la définition.

Proposition 14. *Caractérisation des sommes directes.*
La somme $F_1 + \cdots + F_p$ est directe si, et seulement si, on a

$$\forall\,(f_1, \ldots, f_p) \in F_1 \times \cdots \times F_p, \quad \left(\sum_{i=1}^{p} f_i = 0\right) \Longrightarrow (f_1 = \cdots = f_p = 0)\,.$$

Démonstration. La preuve est en deux temps.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Soit $(f_1, \ldots, f_p) \in F_1 \times \cdots \times F_p$ tel que $\sum_{i=1}^{p} f_i = 0$. Comme

$$\sum_{i=1}^{p} f_i = \sum_{i=1}^{p} 0 = 0$$

et pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, $0 \in F_i$. Par unicité de la décomposition, on en déduit que pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, $f_i = 0$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Soit $x \in F_1 + \cdots + F_p$. Par définition, il existe $(f_1, \ldots, f_p) \in F_1 \times \cdots \times F_p$ tel que $x = \sum_{i=1}^{p} f_i$. Pour conclure, il reste à prouver l'unicité. Supposons qu'il existe un autre p-uplet $(g_1, \ldots, g_p) \in F_1 \times \cdots \times F_p$ tel que

$$x = \sum_{i=1}^{p} f_i = \sum_{i=1}^{p} g_i.$$

En particulier, $\sum_{i=1}^{p} (g_i - f_i) = 0$. Par hypothèse, on a : pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, $f_i = g_i$, ce qui conclut l'unicité.

$\square$

Exemple 15. On se place dans $E = \mathbf{K}_3[X]$, on note

$$F = \{P \in E,\ P(X) = P(-X)\}\,, G = \{P \in E,\ P(0) = P(1) = P(2) = 0\} \text{ et}$$

$$H = \{P \in E,\ P(1) = P(2) = P(3) = 0\}\,.$$

Montrer que $E = F \oplus G \oplus H$.

Solution. (i) On commence par donner des bases de F, G et H.

(a) *Base de F.* Soit $P \in E$. Il existe $(a, b, c, d) \in \mathbf{K}^4$ tel que $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$. On a

$$\begin{aligned} P \in F \quad &\Longleftrightarrow \quad -aX^3 + bX^2 - cX + d = aX^3 + bX^2 + cX + d \\ &\Longleftrightarrow \quad a = c = 0. \end{aligned}$$

Ainsi, $F = \operatorname{Vect}\left(1, X^2\right)$.

(b) *Base de G.*
Soit $P \in E$. P appartient à G si, et seulement si, 0, 1 et 2 sont des racines de P. Il existe donc $Q \in \mathbf{K}[X]$ tel que $P = X(X-1)(X-2)Q$. Comme $\deg(P) \leq 3$, on a $\deg(Q) \leq 0$, donc Q est un polynôme constant.
Ainsi, $G = \operatorname{Vect}(X(X-1)(X-2))$.

(c) *Base de H.*
On procède de la même façon qu'au point (b) pour montrer que $H = \mathrm{Vect}\left(\left(X-1\right)\left(X-2\right)\left(X-3\right)\right)$.

(ii) Pour montrer que $E = F \oplus G \oplus H$, on procède par analyse/synthèse.

Analyse. Soit $P \in E$. On suppose qu'il existe $(P_1, P_2, P_3) \in F \times G \times H$ tel que

$$P = P_1 + P_2 + P_3.$$

D'après les descriptions de F, G et H données ci-dessus, il existe $(a, b, c, d) \in \mathbf{K}^4$ tel que

$$P = a + bX^2 + cX\left(X-1\right)\left(X-2\right) + d\left(X-1\right)\left(X-2\right)\left(X-3\right). \tag{3}$$

En évaluant (3) en 1 et en 2, on obtient le système

$$\begin{cases} a+b & = P\left(1\right) \\ a+4b & = P\left(2\right) \end{cases} \iff \begin{cases} a & = \frac{4}{3}P\left(1\right) - \frac{1}{3}P\left(2\right) \\ b & = \frac{1}{3}P\left(2\right) - \frac{1}{3}P\left(1\right) \end{cases}.$$

En évaluant (3) en 3 et en remplaçant les valeurs de a et b par celles obtenus ci-dessus, on a

$$c = \frac{1}{6}\left(P\left(3\right) - \left(\frac{4}{3}P\left(1\right) - \frac{1}{3}P\left(2\right)\right) - 9 \times \left(\frac{1}{3}P\left(2\right) - \frac{1}{3}P\left(1\right)\right)\right) = \frac{1}{6}\left(\frac{5}{3}P\left(1\right) - \frac{8}{3}P\left(2\right) + P\left(3\right)\right).$$

Finalement, en évaluant (3) en 0, on a

$$d = \frac{1}{6}\left(-P\left(0\right) + \frac{4}{3}P\left(1\right) - \frac{1}{3}P\left(2\right)\right).$$

Synthèse. La synthèse est claire. Les polynômes P_1, P_2, P_3 ainsi définis appartiennent respectivement à F, G et H et vérifient $P_1 + P_2 + P_3 = P$.

Proposition 15. *Base adaptée à une somme directe.*
On suppose que E est de dimension finie et que l'on a $E = F_1 \oplus \cdots \oplus F_p$. Pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, on note $\mathscr{B}_i$ une base de F_i.
*La famille $\mathscr{B} = \mathscr{B}_1 \cup \cdots \cup \mathscr{B}_p$ est une base de E adaptée à la somme directe. Cette base est parfois appelée la base **concaténée** des bases $\mathscr{B}_1, \ldots, \mathscr{B}_p$.*

Démonstration. On va montrer que $\mathscr{B}$ est libre et génératrice. Pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, on écrit $\mathscr{B}_i = \left(e_1^i, \ldots, e_{r_i}^i\right)$.

Libre. Soit $\left(\lambda_1^1, \ldots, \lambda_{r_1}^1, \ldots\ldots, \lambda_1^p, \ldots, \lambda_{r_p}^p\right)$ tel que

$$\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{r_i} \lambda_j^i e_{e_j^i} = 0.$$

D'après la proposition 14, on a

$$\forall i \in [\![1, p]\!], \quad \sum_{j=1}^{r_i} \lambda_j^i e_{e_j^i} = 0.$$

Or, la famille $\left(e_1^i, \ldots, e_{r_i}^i\right)$ est une base de $\mathscr{B}_i$, donc pour tout $j \in [\![1, r_i]\!]$, $\lambda_j^i = 0$.
$\mathscr{B}$ est donc libre.

Génératrice. Soit $x \in E$. Par définition, il existe $(x_1, \ldots, x_p) \in F_1 \times \cdots \times F_p$ tel que $x = \sum_{i=1}^{p} x_i$.
Or, pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, $\left(e_1^i, \ldots, e_{r_i}^i\right)$ est une base de $\mathscr{B}_i$, donc il existe $\left(\alpha_1^i, \ldots, \alpha_{r_i}^i\right) \in \mathbf{K}^{r_i}$ tel que $x_i = \sum_{j=1}^{r_i} \alpha_j^i e_i^j$, ce qui donne finalement

$$x = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{r_i} \alpha_j^i e_i^j.$$

□

2.2 Hyperplans d'un espace vectoriel

Dans cette sous-partie, E est un espace vectoriel de **dimension finie** $n \in \mathbf{N}^*$.

Définition 12. *Hyperplan de E.*
On appelle ***hyperplan*** *de E tout sous-espace vectoriel de dimension $n-1$.*

Exemple 16. On retiendra que :

1. les droites vectorielles sont les hyperplans de $\mathbf{R}^2$;
2. les plans vectoriels sont les hyperplans de $\mathbf{R}^3$.

La proposition suivante est fondamentale.

Proposition 16. *Caractérisation des hyperplans.*
Soit F un sous-espace vectoriel de E. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) *F est un hyperplan de E ;*
(ii) *F admet une droite vectorielle pour supplémentaire ;*
(iii) *F est le noyau d'une forme linéaire non nulle sur E.*

Remarque 6. On rappelle qu'une forme linéaire est une application linéaire de E vers $\mathbf{K}$.

Démonstration. On prouve (i) $\Longrightarrow$ (ii) $\Longrightarrow$ (iii) $\Longrightarrow$ (i).

$\boxed{\text{(i)} \Longrightarrow \text{(ii)}}$ Soit $x \notin F$ et soit $D = \mathrm{Vect}\,(x)$. Montrons que l'on a $F \oplus D = E$.
Déjà, il est claie que $\dim(F) + \dim(D) = \dim(E)$.
Soit $(f, d) \in F \times D$ tel que $f + d = 0$. Comme $d \in D$, il existe $\lambda \in \mathbf{K}$ tel que $f + \lambda x = 0$. Si $\lambda \neq 0$, on aurait $x = -\dfrac{1}{\lambda} f \in F$, ce qui est exclu. Ainsi $\lambda = 0$ et $f = 0$.
On en déduit que $F \oplus D = E$.

$\boxed{\text{(ii)} \Longrightarrow \text{(iii)}}$ Soit D une droite vectoriel supplémentaire à F. Soit $e_n \in D$ non nul de sorte que $D = \mathrm{Vect}\,(e_n)$. Soit $(e_1, \ldots, e_{n-1})$ une base de F de sorte que $(e_1, \ldots, e_{n-1}, e_n)$ soit une base de E.
On définit l'application linéaire φ par :

$$\forall x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i, \quad \varphi(x) = \lambda_n.$$

Il est facile de constater que φ est une forme linéaire non nulle (par exemple $\varphi(e_n) = 0$).
Soit $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \in \mathrm{Ker}\,(\varphi)$. On a $\varphi(x) = \lambda_n = 0$. Ainsi, $x \in F$.
Réciproquement, il est clair que si $x \in F$, alors $x \in \mathrm{Ker}\,(\varphi)$.
On a montré que $F = \mathrm{Ker}\,(\varphi)$.

$\boxed{\text{(iii)} \Longrightarrow \text{(i)}}$ Comme $\varphi \neq 0$, on a $\mathrm{Im}\,(\varphi) = 1$. par le théorème du rang, on en déduit que $\dim(\mathrm{Ker}\,(\varphi)) = \dim(F) = n - 1$.

□

Exemple 17. Les hyperplans de $\mathbf{K}^n$ ont une équation de la forme $a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = 0$ où $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbf{K}^n$ et est non nul.

Exemple 18. Soit $F = \{P \in \mathbf{K}_2[X],\ P(1) + P'(0) = 0\}$.
Montrer que F est un hyperplan de $\mathbf{K}_2[X]$ et en donner une équation.

Solution. Soit $P \in \mathbf{K}_2[X]$: il existe $(a, b, c) \in \mathbf{K}^3$ tel que $P = aX^2 + bX + c$. Ainsi

$$\begin{aligned} P \in F \quad &\Longleftrightarrow \quad a + b + c + b = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad a + 2b + c = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad a = -2b - c \\ &\Longleftrightarrow \quad P = (-2b - c)\,X^2 + bX + c \\ &\Longleftrightarrow \quad P = b\left(-2X^2 + X\right) + c\left(-X^2 + 1\right) \end{aligned}$$

On en déduit que $F = \text{Vect}\left(-2X^2 + X, -X^2 + 1\right)$, donc F est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{K}_2[X]$.

Les vecteurs $-2X^2 + X$ et $-X^2 + 1$ ne sont pas colinéaires, on en déduit que la famille $\left(-2X^2 + X, -X^2 + 1\right)$ est une base de F.

Comme $\dim(F) = 2$ et $\dim(\mathbf{K}_2[X]) = 3$, F est un hyperplan de $\mathbf{K}_2[X]$.

2.3 Sous-espaces stables

Définition 13. *Sous-espace vectoriel stable.*

*Un sous-espace vectoriel F de E est **stable** par $u \in \mathscr{L}(E)$ si, $u(F) \subset F$, i.e.*

$$\forall x \in F, \quad u(x) \in F.$$

Exemple 19. Quelques exemples importants à retenir.

1. Les sous-espaces $\{0\}$ et E sont stables pour tout $u \in \mathscr{L}(E)$.
2. Une homothétie (i.e. une application linéaire de la forme λid_E, $\lambda \in \mathbf{K}$) laisse stable tous les sous-espaces vectoriels de E (et ce sont les seules).
3. Une rotation vectorielle du plan vectoriel d'angle $\pi/2$ laisse stable $\{0\}$, l'axe de la rotation et $\mathbf{R}^2$.
4. Soit $u : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ l'endomorphisme défini par :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbf{R}^3, \quad u(x, y, z) = (7x + 4y + 4z, 4x - 8y + z, -4x - y + 8z).$$

Les sous-espaces vectoriels

$$D = \text{Vect}((1, -4, 0)) \quad \text{et} \quad H = \text{Vect}((0, 0, 1), (4, 1, 0))$$

sont stables par u. En effet, on a :

$$u(D) = \text{Vect}(u(1, -4, 0)) = \text{Vect}((-9, 36, 0)) \subset D$$

et

$$u(H) = \text{Vect}(u(0, 0, 1), u(4, 1, 0)) = \text{Vect}((4, 1, 8), (32, 8, -17)) \subset H.$$

Remarque 7. Si F est stable par $u \in \mathscr{L}(E)$, $u_{|F}$ est un endomorphisme de F.

Proposition 17. *On suppose que E est de dimension finie et soient $F_1, \ldots, F_p$ des sous-espaces vectoriels de E tels que $E = F_1 \oplus \cdots \oplus F_p$.*

Si $\mathscr{B} = \mathscr{B}_1 \cup \cdots \cup \mathscr{B}_p$ ($\mathscr{B}_i$ est une base de F_i) est une base adaptée à la somme directe et si les espaces $F_1, \ldots, F_p$ sont laissés stables par $u \in \mathscr{L}(E)$, alors on a

$$\text{mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & A_p \end{pmatrix} \quad \textit{où } A_i = \text{mat}_{\mathscr{B}_i}\left(u_{|F_i}\right).$$

Démonstration. Pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, on note $\mathscr{B}_i = \left(e_1^i, \ldots, e_{r_i}^i\right)$. On remarque que pour tout $i \in [\![1, p]\!]$ et pour tout $j \in [\![1, r_i]\!]$, on a

$$u\left(e_j^i\right) = u_{|E_i}\left(e_j^i\right) = \underset{\in F_1}{0} + \cdots + \underset{\in F_{i-1}}{0} + \sum_{j=1}^{r_i} \alpha_j^i e_j^i + \underset{\in F_{i+1}}{0} + \cdots + \underset{\in F_p}{0}$$

où $\left(\alpha_1^i, \ldots, \alpha_{r_i}^i\right) \in \mathbf{K}^{r_i}$ est tel que $u_{|E_i}\left(e_j^i\right) = \sum_{j=1}^{r_i} \alpha_j^i e_j^i$.

$\square$

Exemple 20. On reprend l'exemple précédent. On considère la base

$$\mathscr{B} = ((-9, 36, 0), (4, 1, 8), (32, 8, -17))$$

qui est adaptée à la somme directe $\mathbf{R}^3 = D \oplus H$. La matrice de u dans cette base est alors

$$\operatorname{mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} -9 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & -17 \\ 0 & 1 & 8 \end{pmatrix}.$$

Exemple 21. Soit $u \in \mathscr{L}(\mathbf{K}^3)$ telle que la matrice de u dans la base canonique (e_1, e_2, e_3) de $\mathbf{K}^3$ est $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Donner une base de $\operatorname{Im}(u)$ et une de $\operatorname{Ker}(u)$.
2. Montrer que $\operatorname{Ker}(u) \oplus \operatorname{Im}(u) = \mathbf{K}^3$. En déduire une base $\mathscr{B}'$ adapatée à cette somme directe.
3. Donner la matrice de u dans la base $\mathscr{B}'$.

Solution.

1. On commence par remarquer que la matrice A est de rang 1 (toutes les colonnes sont proportionnelles à la première), donc $\operatorname{Im}(A) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$, ainsi $\operatorname{Im}(u) = \operatorname{Vect}(e_1 + e_2 + e_3)$. Comme $e_1 + e_2 + e_3 \neq 0$, la famille $(e_1 + e_2 + e_3)$ forme une base de $\operatorname{Ker}(u)$.
   On remarque facilement que $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ appartiennent au noyau de A (qui est de dimension 2 par le théorème du rang) et non colinéaires, ainsi $\operatorname{Ker}(A) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$, soit $\operatorname{Ker}(u) = \operatorname{Vect}(e_1 - e_2, e_1 - e_3)$. Ainsi, $(e_1 - e_2, e_1 - e_3)$ est une base de $\operatorname{Ker}(u)$.
2. Soit $y \in \operatorname{Ker}(u) \cap \operatorname{Im}(u)$, il existe $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbf{K}^3$ tel que

   $$y = \alpha(e_1 - e_2) + \beta(e_1 - e_3) = (\alpha + \beta) e_1 - \alpha e_2 - \beta e_3 = \gamma(e_1 + e_2 + e_3) = \gamma e_1 + \gamma e_2 + \gamma e_3.$$

   Comme la famille (e_1, e_2, e_3) est libre, on en déduit le système

   $$\begin{cases} \alpha + \beta & = \gamma \\ -\alpha & = \gamma \\ -\beta & = \gamma \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha & = 0 \\ \beta & = 0 \\ \gamma & = 0 \end{cases}.$$

   Comme $\dim(\operatorname{Ker}(u)) + \dim(\operatorname{Im}(u)) = 3$ (théorème du rang), on en déduit que $\operatorname{Ker}(u) \oplus \operatorname{Im}(u) = \mathbf{K}^3$. La base $\mathscr{B}'$ constituée de la concaténation d'une base de $\operatorname{Ker}(u)$ et d'une de $\operatorname{Im}(u)$ est alors une base de $\mathbf{K}^3$. D'après la question 1, il suffit de prendre $\mathscr{B}' = (e_1 - e_2, e_1 - e_3, e_1 + e_2 + e_3)$.
3. Un calcul facile donne

   $$u(e_1 + e_2 + e_3) = e_1 + e_2 + e_3 + 2(e_1 + e_2 + e_3) + 3(e_1 + e_2 + e_3) = 6(e_1 + e_2 + e_3).$$

   On en déduit que

   $$\operatorname{mat}_{\mathscr{B}'}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Proposition 18. *Soit* $u \in \mathscr{L}(E)$. $\operatorname{Ker}(u)$ *et* $\operatorname{Im}(u)$ *sont stables par* u.

Démonstration.

(i) Soit $x \in \operatorname{Ker}(u)$. Comme $f(x) = 0 \in \operatorname{Ker}(x)$, $\operatorname{Ker}(u)$ est stable par u.

(ii) Soit $y \in \operatorname{Im}(u)$, il existe $x \in E$ tel que $y = u(x)$. Ainsi, $u(y) = u(u(x)) \in \operatorname{Im}(u)$. $\operatorname{Im}(u)$ est stable par u.

□

3 Matrices

3.1 Trace d'une matrice carrée

Définition 14. *Trace d'une matrice carrée.*
Soit $A = (a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ *une matrice carrée d'ordre* n*. On définit la trace de* A*, notée* $\mathrm{Tr}\,(A)$ *par*

$$\mathrm{Tr}\,(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{k,k}.$$

Exemple 22. $\mathrm{Tr}\left(\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\right) = 5$ et $\mathrm{Tr}\,(\mathrm{I}_n) = n$ $(n \in \mathbf{N}^*)$.

Proposition 19. *Quelques propriétés.*
La trace vérifie les propriétés suivantes.

(i) *L'application* $\mathrm{Tr} : \mathscr{M}_n(\mathbf{K}) \longrightarrow \mathbf{K}$ *est une forme linéaire.*

(ii) *Pour tout* $(A,B) \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})^2$*, on a* $\mathrm{Tr}\,(AB) = \mathrm{Tr}\,(BA)$*.*

Démonstration. (i) Soit $(A,B) \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ et $\lambda \in \mathbf{K}$. On a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}\,(A+\lambda B) &= \mathrm{Tr}\,((a_{i,j}+\lambda b_{i,j}))\\
&= \sum_{k=1}^{n}\left(a_{k,k}+\lambda b_{k,k}\right) \quad \text{par définition de Tr}\\
&= \sum_{k=1}^{n} a_{k,k} + \lambda \sum_{k=1}^{n} b_{k,k} \quad \text{par linéarité de la somme}\\
&= \mathrm{Tr}\,(A) + \lambda \mathrm{Tr}\,(B).
\end{aligned}$$

(ii) Par définition du produit matriciel, on a $AB = \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}b_{k,j}\right)_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}\,(AB) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}b_{k,i}\\
&= \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} b_{k,i}a_{i,k}\\
&= \mathrm{Tr}\,(BA).
\end{aligned}$$

□

Définition 15. *Matrice semblable.*
Deux matrices $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ *sont* ***semblables*** *s'il existe* $P \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ *inversible telle que* $A = PBP^{-1}$*.*

Corollaire 2. *Deux matrices semblables ont la même trace.*

Démonstration. Si A et B sont semblables, il existe P inversible telle que $A = PBP^{-1}$. D'après la proposition 19, on peut écrire

$$\mathrm{Tr}\,(A) = \mathrm{Tr}\left(PBP^{-1}\right) = \mathrm{Tr}\left(BP^{-1}P\right) = \mathrm{Tr}\,(B).$$

□

⚠La réciproque est fausse. Pourquoi ?

3.2 Trace d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie

Dans cette sous-partie, E est un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbf{N}^*$.

Définition 16. *Trace d'un endomorphisme.*

D'après le corollaire 2, la trace d'une matrice d'un endormorphisme de dépend pas de la base choisie dans laquelle on l'écrit.

On note $\mathrm{Tr}\,(u)$ *cette quantité commune.*

Exemple 23. Soit $u : \mathbf{K}_2\,[X] \longrightarrow \mathbf{K}_2\,[X]$ l'endomorphisme défini par

$$\forall P \in \mathbf{K}_2\,[X]\,, \quad u\,(P) = XP'.$$

Dans la base $\mathscr{B} = \left(1, X, X^2\right)$ la matrice de u est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Ainsi, $\mathrm{Tr}\,(u) = 3$.

3.3 Transposée d'une matrice

Définition 17. *Transposée d'une matrice.*

Soit n, m deux entiers naturels non nuls. Soit $A = (a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,m]\!]} \in \mathscr{M}_{n,m}(\mathbf{K})$. On définit la matrice la transposée de A, notée A^T, par

$$A^T = (a_{j,i})_{(j,i)\in[\![1,m]\!]\times[\![1,n]\!]} \in \mathscr{M}_{m,n}(\mathbf{K})\,.$$

Exemple 24. La transposée de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ est $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 7 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$. La transposée de la matrice $\begin{pmatrix} 3 & -5 & 8 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}$ est $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -5 & 4 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}$.

Remarque 8. L'opération de transposition « échange les lignes et les colonnes ».

Proposition 20. *Propriétés de la transposition. On a les propriétés suivantes.*

(i) *La transposition est une opération involutive , i.e.*

$$\forall A \in \mathscr{M}_{n,m}(\mathbf{K})\,, \quad \left(A^T\right)^T = A.$$

(ii) *La transposition est linéaire, i.e.*

$$\forall\,(A, B) \in \mathscr{M}_{n,m}(\mathbf{K})\,,\ \forall \lambda \in \mathbf{K}, \quad (A + \lambda B)^T = A^T + \lambda B^T.$$

(iii) *La transposition est compatible avec la trace, i.e.*

$$\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})\,, \quad \mathrm{Tr}\left(A^T\right) = \mathrm{Tr}\,(A)\,.$$

(iv) *Pour tout $A \in \mathscr{M}_{n,m}(\mathbf{K})$, pour tout $B \in \mathscr{M}_{m,p}(\mathbf{K})$, on a $(AB)^T = B^T A^T$.*

(v) *La transposition commute avec l'inverse, pour tout $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$, A^T est inversible et $\left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T$.*

Démonstration. (i) C'est clair par définition de la transposition.

(ii) Soit $A, B \in \mathscr{M}_{n,m}(\mathbf{K})$ et soit $\lambda \in \mathbf{K}$. On a

$$\begin{aligned}
(A + \lambda B)^T &= (a_{i,j} + \lambda b_{i,j})^T_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,m]\!]} \\
&= (a_{j,i} + \lambda b_{j,i})_{(j,i)\in[\![1,m]\!]\times[\![1,n]\!]} && \text{par définition de la transposition} \\
&= (a_{j,i})_{(j,i)\in[\![1,m]\!]\times[\![1,n]\!]} + \lambda\,(b_{j,i})_{(j,i)\in[\![1,m]\!]\times[\![1,n]\!]} && \text{par définition de l'addition matricielle} \\
&= A^T + \lambda B^T.
\end{aligned}$$

(iii) Déjà, on remarque que si A est carrée, alors A^T l'est aussi et est de même taille. De plus, d'une part

$$\mathrm{Tr}\,(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i},$$

d'autre part

$$\mathrm{Tr}\left(A^T\right) = \sum_{j=1}^{n} a_{j,j},$$

d'où $\mathrm{Tr}\,(A) = \mathrm{Tr}\left(A^T\right)$.

(iv) On remarque que $AB \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})$, donc $(AB)^T \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbf{K})$. Soit $(i,j) \in [\![1,p]\!] \times [\![1,n]\!]$. Par définition de la transposition et du produit matriciel, d'une part, on a

$$\left((AB)^T\right)_{i,j} = (AB)_{j,i} = \sum_{k=1}^{m} a_{j,k} b_{k,i}.$$

D'autre part, on a

$$\left(B^T A^T\right)_{i,j} = \sum_{k=1}^{m} b_{k,i} a_{j,k}.$$

On en déduit donc que $(AB)^T = B^T A^T$.

(v) On commence par remarquer que $\mathrm{I}_n^T = \mathrm{I}_n$. De plus, d'après le point (iv), on a

$$A^T \left(A^{-1}\right)^T = \left(A^{-1}A\right)^T = \mathrm{I}_n^T = \mathrm{I}_n.$$

Par unicité de l'inverse, on en déduit que $\left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T$.

□

Définition 18. *Matrices symétriques et antisymétriques.*
Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$. On dit que :

(i) *M est **symétrique** si $M = M^T$.*

(ii) *M est **antisymétrique** si $M^T = -M$.*

Exemple 25. La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ est symétrique et la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ est antisymétrique.

On note $\mathscr{S}_n(\mathbf{K})$ (resp. $\mathscr{A}_n(\mathbf{K})$) l'ensemble des matrices symétriques (resp. antisymétriques) d'ordre n. Il est facile de remarquer que $\mathscr{S}_n(\mathbf{K})$ et $\mathscr{A}_n(\mathbf{K})$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$.

Proposition 21. *Une somme directe remarquable.*
On a $\mathscr{S}_n(\mathbf{K}) \oplus \mathscr{A}_n(\mathbf{K}) = \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$.

Démonstration. On procède par analyse/synthèse.

Analyse. Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$. On suppose qu'il existe $(S,A) \in \mathscr{S}_n(\mathbf{K}) \times \mathscr{A}_n(\mathbf{K})$ tel que $M = S + A$. En transposant cette relation et en utilisant la proposition 20, on obtient $M^T = (S+A)^T = S^T + A^T = S - A$. On en en déduit que

$$S = \frac{1}{2}\left(M + M^T\right) \quad \text{et} \quad A = \frac{1}{2}\left(M - M^T\right).$$

Synthèse. La synthèse est facile à faire (mais indispensable). Il est clair que les matrices S et A définies lors de l'analyse vérifient $S + A = M$ et sont respectivement symétrique et antisymétrique.

□

4 Compléments

Ces compléments sont des notions qui, sans être au programme, peuvent être utiles pour les concours.

4.1 Polynômes d'interpolation de Lagrange

Définition 19. *Polynômes d'interpolation de Lagrange.*

*Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Soit $(x_0, \dots, x_n) \in \mathbf{K}^{n+1}$ $(n+1)$ réels deux à deux distincts. On définit les **polynômes d'interpolation de Lagrange**, notés $L_0, \dots, L_n$, en les points $x_0, \dots, x_n$ par :*

$$\forall i \in [\![0, n]\!], \quad L_i = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{n} \frac{X - x_i}{x_k - x_i}.$$

Il est facile de vérifier que :

$$\forall (i, j) \in [\![0, n]\!]^2, \quad L_i(x_j) = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

En effet,

$$L_i(x_i) = \prod_{\substack{k=0 \\ i \neq k}}^{n} \frac{x_k - x_i}{x_k - x_i} = 1$$

et, si $i \neq j$, il existe $j \in [\![0, n]\!] \setminus \{i\}$, donc $L_i(x_j) = 0$.

Cette remarque nous permet d'établir la proposition suivante.

Proposition 22. *Avec les notations précédentes, si $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbf{K}^{n+1}$, le polynôme $P = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i L_i$ est l'unique polynôme de $\mathbf{K}_n[X]$ vérifiant*

$$\forall j \in [\![0, n]\!], \quad P(x_j) = \lambda_j.$$

Démonstration. On prouve séparemment la « convenance » de l'unicité.

Convenance. Déjà $P \in \mathbf{K}_n[X]$ car pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, L_i est degré n.

Soit $j \in [\![0, n]\!]$. On a

$$P(x_j) = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i L_i(x_j) = \lambda_j \times 1 = \lambda_j$$

car pour tout $j \in [\![0, n]\!] \setminus \{i\}$, $L_i(x_j) = 0$.

Unicité. Supposons qu'il existe $Q \in \mathbf{K}_n[X]$ tel que

$$\forall j \in [\![0, n]\!], \quad Q(x_j) = \lambda_j.$$

Il est clair que $P - Q \in \mathbf{K}_n[X]$ et

$$\forall j \in [\![0, n]\!], \quad (P - Q)(x_j) = 0.$$

Ainsi, $P - Q$ a au moins $n + 1$ racines et est de degré au plus n, c'est donc le polynôme nul, ainsi $P = Q$.

□

Proposition 23. *Toujours la même notation que ci-dessus, la famille $(L_0, \dots, L_n)$ et une base de $\mathbf{K}_n[X]$ et*

$$\forall P \in \mathbf{K}_n[X], \quad P = \sum_{i=0}^{n} P(x_i) L_i.$$

Démonstration. Soit $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbf{K}^{n+1}$ tel que

$$\sum_{i=0}^{n} \lambda_i L_i = 0.$$

En évaluant cette relation en x_j $(j \in [\![0, n]\!])$, on a $\lambda_j = 0$.

La famille est donc libre.

La famille $(L_0, \ldots, L_n)$ est libre, contient $n+1$ éléments dans $\mathbf{K}_n[X]$ de dimension $n+1$, c'est donc une base de $\mathbf{K}_n[X]$.

Soit $P \in \mathbf{K}_n[X]$. Comme $(L_0, \ldots, L_n)$ est une base de $\mathbf{K}_n[X]$, il existe $(\lambda_0, \ldots, \lambda_n) \in \mathbf{K}^{n+1}$ tel que

$$P = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i L_i.$$

En évaluant cette relation en x_j ($j \in [\![1, n]\!]$), on a $P(x_j) = \lambda_j$.

$\square$

4.2 Endomorphismes nilpotents

Définition 20. *Endomorphisme nilpotent.*

*Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. On dit que u est **nilpotent** s'il existe $p \in \mathbf{N}^*$ tel que $u^p = 0$.*

Remarque 9. On définit de manière analogue la notion de matrice nilpotente.

Exemple 26. Par exemple, l'endomorphisme nul est nilpotent. Moins trivial, l'endomorphisme

$$\mathrm{d} : \begin{cases} \mathbf{K}_n[X] & \longrightarrow \mathbf{K}_n[X] \\ P & \longmapsto P' \end{cases}$$

est nilpotent.

La matrice $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est nilpotente.

Proposition 24. *Indice de nilpotence.*

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ non nul. Il existe un plus entier $p \in \mathbf{N}^*$ tel que $u^p = 0$, i.e. $u^p = 0$ et pour tout $k \in [\![0, p-1]\!]$, $u^k \neq 0$.

*p s'appelle l'**indice de nilpotence** de u.*

Démonstration. Soit $A = \{m \in \mathbf{N}^*,\ u^m = 0\}$. $A \subset \mathbf{N}^*$ et est non vide, donc A admet un plus petit élément p qui vérifie donc $u^p = 0$ et, par définition, pour tout $k \in [\![0, p-1]\!]$, $u^k \neq 0$.

$\square$

Proposition 25. *Un endomorphisme nilpotent n'est pas bijectif.*

Démonstration. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. Si u est nul, alors u n'est pas bijectif.

On suppose que u non nul. Soit $p \in \mathbf{N}^*$ l'indice de nilpotence de u. Supposons u bijectif. On a alors $0 = u^{-1} \circ u^p = u^{p-1}$, ce qui contredit la définition de l'indice de nilpotence.

$\square$

Proposition 26. *Une famille libre remarquable !*

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ nilpotent et non nul, d'indice de nilpotence $p \in \mathbf{N}^*$.

Soit $x \in E$ tel que $u^{p-1}(x) \neq 0$. La famille $\left(x, u(x), \ldots, u^{p-1}(x)\right)$ est une famille libre de E.

Démonstration. On commence par remarquer cette pour tout $m \geq p$, $u^m(x) = u^{m-p+1}\left(u^{p-1}(x)\right) = u(0) = 0$.

Soit $(\lambda_0, \ldots, \lambda_{p-1}) \in \mathbf{K}^p$ tel que $\displaystyle\sum_{i=0}^{p-1} \lambda_i u^i(x) = 0$.

Supposons qu'il existe $j \in [\![0, p-1]\!]$ tel que $\lambda_j \neq 0$. Soit $j_0 = \min\{k \in [\![0, p-1]\!],\ \lambda_k \neq 0\}$, ainsi

$$0 = \lambda_{j_0} u^{j_0}(x) + \cdots + \lambda_{p-1} u^{p-1}(x).$$

En composant cette relation par u^{p-1-j_0}, on a

$$0 = \lambda_{j_0} u^{p-1}(x).$$

Cette relation est impossible car $\lambda_{j_0} \neq 0$ et $u^{p-1}(x)$. On en déduit que la famille $\left(x, u(x), \ldots, u^{p-1}(x)\right)$ est libre.

$\square$

Corollaire 3. *Indice de nilpotence en dimension finie.*

On suppose que E est de dimension finie.

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ non nul et nilpotent. Alors, l'indice de nilpotence de u est inférieur ou égal à $\dim(E)$.

Démonstration. Soit $p \in \mathbf{N}^*$ l'indice de nilpotence de u. Soit $x \in E$ tel que $u^{p-1}(x) \neq 0$. D'après la proposition 26, la famille $\left(x, \dots, u^{p-1}(x)\right)$ est libre.

Il s'ensuit que son cardinal est inférieur ou égal à la dimension de E, i.e. $p \leq n$.

□

4.3 Introduction à la dualité

Définition 21. *Dual d'un espace vectoriel.*

On appelle le ***dual*** *du $\mathbf{K}$-espace vectoriel, noté $E^\star$, l'ensemble $\mathscr{L}(E, \mathbf{K})$.*

Remarque 10. Lorsque E est de dimension finie, $E^\star$ est aussi de dimension finie et on a $\dim(E^\star) = \dim(E)$.

Proposition 27. *Base duale.*

On suppose que E est de dimension finie $n \in \mathbf{N}^*$.

Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Soit la famille $(e_1^\star, \dots, e_n^\star)$ de $E^\star$ où pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $e_i^\star$ est l'endomorphisme de E défini par :

$$\forall j \in [\![1, n]\!], \quad e_i^\star(e_j) = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & si\, i = j \\ 0 & sinon \end{cases}.$$

La famille $(e_1^\star, \dots, e_n^\star)$ est une base de $E^\star$ appelée ***base duale*** *de $(e_1, \dots, e_n)$.*

Remarque 11. Notons que l'endomorphisme $e_i^\star$ est bien défini car il est défini sur une base de E.

Démonstration. Comme $\dim(E^\star) = n$, il suffit de montrer que la famille $(e_1, \dots, e_n)$ est libre.

Soit $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbf{K}^n$ tel que

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i^\star = 0.$$

Soit $j \in [\![1, n]\!]$. En évaluant la relation précédente en e_j, on récupère $\lambda_j = 0$.

La famille est donc libre, puis c'est une base de $E^\star$.

□

Proposition 28. *Calcul d'intégrale sans primitiver !*

Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et soient $x_0, \dots, x_n$ $n+1$ réels deux à deux distincts. Il existe $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbf{K}^{n+1}$ tel que

$$\forall P \in \mathbf{K}_n[X], \quad \int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n} a_k P(x_k).$$

Démonstration. Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on pose $\varphi_k : P \in \mathbf{K}_n[X] \longmapsto P(x_k)$.

Il est clair que φ_k est linéaire pour tout $k \in [\![0, n]\!]$.

Soit $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbf{K}^{n+1}$ tel que

$$\lambda_0 \varphi_0 + \cdots + \lambda_n \varphi_n = 0.$$

Soient $L_0, \dots, L_n$ les polynômes d'interpolation de Lagrange en les points $x_0, \dots, x_n$ définis à la sous-partie 4.1. On évalue la relation précédente en L_j ($j \in [\![0, n]\!]$).

Comme $L_j(x_i) = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$, on a $\lambda_j = 0$. La famille $(\varphi_0, \dots, \varphi_n)$ est donc libre. Elle contient $n+1$ éléments dans $\mathbf{K}_n[X]^\star$ de dimension $n+1$, c'est donc une base de $\mathbf{K}_n[X]^\star$.

Pour conclure, il suffit de remarquer que l'application $\psi : P \in \mathbf{K}_n[X] \longmapsto \int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t \in \mathbf{K}_n[X]^\star$, ainsi il existe $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbf{K}^{n+1}$ unique tel que $\psi = a_0\varphi_0 + \cdots + a_n\varphi_n$, soit

$$\forall P \in \mathbf{K}_n[X], \quad \int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n} a_k P(x_k).$$

□

Proposition 29. *Dualité dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$.*
Soit $u \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})^\star$. Il existe une unique matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ telle que :

$$\forall m \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K}), \quad u(M) = \mathrm{Tr}(AM).$$

Démonstration. Soit l'application φ définie par

$$\varphi : \begin{cases} \mathscr{M}_n(\mathbf{K}) & \longrightarrow \mathscr{M}_n(\mathbf{K})^\star \\ A & \longmapsto (M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K}) \longmapsto \mathrm{Tr}(AM)) \end{cases}.$$

Soit $(A, B) \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})^2$ et $\lambda \in \mathbf{K}$. Pour tout $M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$, on a

$$\varphi(A + \lambda B)(M) = \mathrm{Tr}((A + \lambda B)M) = \mathrm{Tr}(AM + \lambda BM) = \mathrm{Tr}(AM) + \lambda \mathrm{Tr}(BM) = \varphi(A)(M) + \lambda\varphi(B)(M).$$

Ainsi, $\varphi(A + \lambda B) = \varphi(A) + \lambda\varphi(B)$.

Comme $\dim(\mathscr{M}_n(\mathbf{K})) = \dim(\mathscr{M}_n(\mathbf{K})^\star)\ (= n^2)$, pour montrer que φ est un isomorphisme, il suffit de montrer que φ est injective.

Soit $A = (a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]} \in \mathrm{Ker}(A)$. Ainsi, pour tout $M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$, $\varphi(A)(M) = \mathrm{Tr}(AM)$.

En prenant $M = \overline{A}^T$ (la transpoée de la matrice contenant les éléments conjugués de A), on a

$$0 = \varphi(A)\left(\overline{A}\right) = \mathrm{Tr}\left(A\overline{A}^T\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}\overline{a_{i,k}} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}\left|a_{i,k}\right|^2.$$

Or, $\left|a_{i,k}\right|^2 \geq 0$ pour tout $(i, k) \in [\![1, n]\!]^2$, donc $a_{i,k} = 0$, et $A = 0$. Ainsi $\mathrm{Ker}(A) \subset \{0\}$. L'inclusion réciproque est claire, on a $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{0\}$ et φ est un isomorphisme entre $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ et $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})^\star$.

Si $u \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})^\star$, il existe donc $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ unique tel que $u = \varphi(A)$,

$$\forall M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K}), \quad u(M) = \varphi(A)(M) = \mathrm{Tr}(AM).$$

□