Correction du devoir maison 1

Exercice 1.

1. Il est clair que f est une application de $\mathbf{R}^3$ vers $\mathbf{R}^3$. Il reste à montrer la linéarité. Soient (x_1, y_1, z_1) et (x_2, y_2, z_2) deux éléments de $\mathbf{R}^3$. Soit aussi $\lambda \in \mathbf{R}$. On a

$$\begin{aligned}
f\left((x_1,y_1,z_1)+\lambda(x_2,y_2,z_2)\right) &= f\left(x_1+\lambda x_2, y_1+\lambda y_2, z_1+\lambda z_2\right)\\
&= \left(2\left(x_1+\lambda x_2\right)-\left(y_1+\lambda y_2\right)-\left(z_1+\lambda z_2\right), -2\left(x_1+\lambda x_2\right)+\left(y_1+\lambda y_2\right)\right.\\
&\quad \left.-2\left(z_1+\lambda z_2\right), -\left(x_1+\lambda x_2\right)-\left(y_1+\lambda y_2\right)+2\left(z_1+\lambda z_2\right)\right)\\
&= \left(2x_1-y_1-z_1, -2x_1+y_1-2z_1, -x_1-y_1+2z_1\right)\\
&\quad +\lambda\left(2x_2-y_2-z_2, -2x_2+y_2-2z_2, -x_2-y_2+2z_2\right)\\
&= f\left(x_1,y_1,z_1\right)+\lambda f\left(x_2,y_2,z_2\right).
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{On a montré que } f \text{ est un endomorphisme de } \mathbf{R}^3.}$

2. On a

$$f(1,0,0)=(2,-2,-1), \quad f(0,1,0)=(-1,1,-1) \quad \text{et} \quad f(0,0,1)=(-1,-2,2).$$

On en déduit que

$$\boxed{A=\operatorname{mat}_{\mathscr{B}}(f)=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-2&1&-2\\-1&-1&2\end{pmatrix}.}$$

3. On a $A^2=\begin{pmatrix}7&-2&-2\\-4&5&-4\\-2&-2&7\end{pmatrix}$.

Il est alors facile de vérifier que l'on a $A^2-2A-3\mathrm{I}_3=0$, donc $\boxed{f^2-2f-3\mathrm{id}_{\mathbf{R}^3}=0.}$

4. On a

$$A-3\mathrm{I}_3=\begin{pmatrix}-1&-1&-1\\-2&-2&-2\\-1&-1&-1\end{pmatrix}.$$

Comme toutes les colonnes sont égales à une même colonne non nulle, la matrice est de rang 1, donc par le théorème du rang, son noyau est de dimension 2.

Pour obtenir une base de $\operatorname{Ker}(A-3\mathrm{I}_3)$, il suffit d'obtenir des relations linéaires entre les colonnes de cette matrice. En notant C_1, C_2 et C_3 les colonnes de $A-3\mathrm{I}_3$, on a $C_1-C_2=0$ et $C_1-C_3=0$. On en déduit que les vecteurs $\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ appartiennent au noyau de $A-3\mathrm{I}_3$. Ces deux vecteurs n'étant pas colinéaires, on en déduit que $\operatorname{Ker}(A-3\mathrm{I}_3)=\operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right)$.

$\boxed{\text{Finalement, } G=\operatorname{Ker}\left(f-3\mathrm{id}_{\mathbf{R}^3}\right)=\operatorname{Vect}\left(e_1-e_2,e_1-e_3\right) \text{ et est de dimension 2.}}$

5. On a

$$A+\mathrm{I}_3=\begin{pmatrix}3&-1&-1\\-2&2&-2\\-1&-1&3\end{pmatrix}.$$

On note C_1, C_2 et C_3 les colonnes de $A + \mathrm{I}_3$. On remarque que les deux premières colonnes ne sont pas colinéaires et $C_1 + 2C_2 + C_3 = 0$, ainsi la matrice est de rang 2. Par le théorème du rang, son noyau est de dimension 1. De plus, $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un élément non nul du noyau, donc $\mathrm{Ker}\,(A + \mathrm{I}_3) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$\boxed{\text{Finalement, } H = \mathrm{Ker}\,(f + \mathrm{id}_{\mathbf{R}^3}) = \mathrm{Vect}\,(e_1 + 2e_2 + e_3) \text{ et est de dimension 1.}}$

6. Soit $X \in \mathbf{R}^3 \in G \cap H$.
   Comme $X \in G$, on a $(f - 3\mathrm{id}_{\mathbf{R}^3})(X) = 0$, soit $f(X) - 3X = 0$, ce qui donne $f(X) = 3X$.
   De même, comme $X \in H$, on a $(f + \mathrm{id}_{\mathbf{R}^3})(X) = 0$, soit $f(X) + X = 0$, ce qui donne $f(X) = -X$.
   On en déduit que $f(X) = 3X = -X$, soit $X = 0$.
   On a montré que $\{0\} \subset G \cap H$. L'inclusion réciproque étant claire, on a $G \cap H = \{0\}$.
   En utilisant les questions 4 et 5, on a $\dim(G) + \dim(H) = 3 = \dim\left(\mathbf{R}^3\right)$.

   $\boxed{\text{On en déduit que } G \text{ et } H \text{ sont supplémentaires dans } \mathbf{R}^3.}$

7. Pour obtenir une base adaptée à la somme directe, il suffit de concaténer une base de G et une base de H. Ainsi, en utilisant les questions 4 et 5, il suffit de prendre $\boxed{\mathscr{C} = (e_1 - e_2, e_1 - e_3, e_1 + 2e_2 + e_3).}$

8. Comme $e_1 - e_2$ et $e_1 - e_3$ appartiennent à $\mathrm{Ker}\,(f - 3\mathrm{id}_{\mathbf{R}^3})$, on a

   $$f(e_1 - e_2) = 3(e_1 - e_2) \quad \text{et} \quad f(e_1 - e_3) = 3(e_1 - e_3).$$

   De même, comme $e_1 + 2e_2 + e_3 \in \mathrm{Ker}\,(f + \mathrm{id}_{\mathbf{R}^3})$, on a

   $$f(e_1 + 2e_2 + e_3) = -(e_1 + 2e_2 + e_3).$$

   On en déduit donc

   $$\boxed{D = \mathrm{mat}_{\mathscr{C}}(f) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.}$$

9. On peut écrire $\boxed{A = PDP^{-1}}$ avec $P = \mathrm{Pass}\,(\mathscr{B} \to \mathscr{C}) = \mathrm{mat}_{\mathscr{C},\mathscr{B}}(\mathrm{id}_{\mathbf{R}^3}) = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.}$

10. $\boxed{f \text{ est diagonalisable car sa matrice dans une base de } \mathbf{R}^3 \text{ est diagonale.}}$
    On pouvait déjà l'affirmer à la question 5 car on reconnaît en G et H des sous-espaces propres associés aux valeurs propres 3 et -1 et $\dim(G) + \dim(H) = 3 = \dim\left(\mathbf{R}^3\right)$. En particulier, f n'a pas d'autre valeur propre.

    $\boxed{\text{La somme de la dimension des sous-espaces propres est égale à la dimension de } \mathbf{R}^3, f \text{ est diagonalisable.}}$

11. On remarque que pour tout $n \in \mathbf{N}$,

    $$D^n = \begin{pmatrix} 3^n & 0 & 0 \\ 0 & 3^n & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix} = \frac{3^n + 3 \times (-1)^n}{4}\mathrm{I}_3 + \frac{3^n + (-1)^{n+1}}{4}D.$$

    Ainsi, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

    $$\begin{aligned} \mathrm{mat}_{\mathscr{C}}(f^n) &= \mathrm{mat}_{\mathscr{C}}\left(\frac{3^n + 3 \times (-1)^n}{4}\mathrm{id}_{\mathbf{R}^3}\right) + \mathrm{mat}_{\mathscr{C}}\left(\frac{3^n + (-1)^{n+1}}{4}f\right) \\ &= \mathrm{mat}_{\mathscr{C}}\left(\frac{3^n + 3 \times (-1)^n}{4}\mathrm{id}_{\mathbf{R}^3} + \frac{3^n + (-1)^{n+1}}{4}f\right). \end{aligned}$$

    Il s'ensuit que

    $$\boxed{\forall n \in \mathbf{N}, \quad f^n = \frac{3^n + 3 \times (-1)^n}{4}\mathrm{id}_{\mathbf{R}^3} + \frac{3^n + (-1)^{n+1}}{4}f.}$$

Exercice 2.

1. Montrons que la famille (f_1, f_2, f_3) est libre. Soient $a, b, c \in \mathbf{R}$ tels que $af_1 + bf_2 + cf_3 = 0$. Cela signifie que pour tout $x \in \mathbf{R}$, on a :

$$af_1(x) + bf_2(x) + cf_3(x) = a\mathrm{e}^{-x} + bx\mathrm{e}^{-x} + cx^2\mathrm{e}^{-x} = 0.$$

En prenant $x = 0$, on obtient $a = 0$. Il nous reste :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad bx\mathrm{e}^{-x} + cx^2\mathrm{e}^{-x} = 0.$$

Cela signifie que pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$bx + cx^2 = 0.$$

Ainsi le polynôme $bX + cX^2$ est nul, donc $b = c = 0$.

$\boxed{\text{La famille } (f_1, f_2, f_3) \text{ étant libre donc } \dim \mathrm{Vect}(f_1, f_2, f_3) = 3.}$

2. (a) Il faut bien commencer par montrer que si $f \in E$, alors $u(f) \in E$. Il suffit de montrer cela sur les éléments d'une base de E. Or, il est facile de voir que

$$u(f_1) = -f_1 \in E, \quad u(f_2) = -f_2 + f_1 \in E \quad \text{et} \quad u(f_3) = -f_3 + 2f_2 \in E.$$

Il nous reste à montrer que u est linéaire. Soient $f, g \in E$ et $\lambda \in \mathbf{R}$. On a

$$u(f + \lambda g) = (f + \lambda g)' = f' + \lambda g' = u(f) + \lambda u(g).$$

$\boxed{\text{On a montré que } u \text{ est un endomorphisme de } E.}$

(b) On a vu à la question précédente que $u(f_1) = -f_1$, $u(f_2) = -f_2 + f_1$ et $u(f_3) = -f_3 + 2f_2$. Donc

$$\boxed{\mathrm{mat}_{(f_1,f_2,f_3)}(u) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.}$$

(c) Si $f = a_0 f_1 + b_0 f_2 + c_0 f_3$, alors $\begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix}$ est la matrice des coordonnées de f dans la base (f_1, f_2, f_3).

La matrice des coordonnées de $u(f)$ dans la base (f_1, f_2, f_3) est

$$A \times \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_0 + b_0 \\ -b_0 + 2c_0 \\ -c_0 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{\text{On en déduit que } a_1 = -a_0 + b_0, b_1 = -b_0 + 2c_0 \text{ et } c_1 = -c_0.}$

(d) De part la définition de u, on a $u^n(f) = f^{(n)}$. La matrice des coordonnées de $u^n(f)$ est dans la base (f_1, f_2, f_3) sont $\boxed{A^n \times \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix}.}$

3. (a) On remarque que $\boxed{B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B^k = 0 \text{ pour tout } k \geq 3.}$

(b) On a $A = -\mathrm{I}_3 + B$. Ainsi en appliquant la formule du binôme de Newton (possible par $-I_3$ et B

commutent), on a :

$$\begin{aligned} A^n &= (-I_3 + C)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} B^k \\ &= (-1)^n \binom{n}{0} B^0 + (-1)^{n-1} \binom{n}{1} B + (-1)^{n-2} \binom{n}{2} B^2 \\ &= (-1)^n \mathrm{I}_3 + (-1)^{n-1} nB + (-1)^{n-2} \frac{n(n-1)}{2} B^2 \\ &= \boxed{\begin{pmatrix} (-1)^n & (-1)^{n-1} n & (-1)^{n-2} n(n-1) \\ 0 & (-1)^n & 2(-1)^{n-1} n \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix}.} \end{aligned}$$

4. On remarque que $g = 3f_1 - 2f_2 + 8f_3$.
On a $g' = u(g) = -5f_1 + 18f_2 - 8f_3$. Pour $n \geq 2$, la matrice des coordonnées de g dans la base (f_1, f_2, f_3) est $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix}$. La matrice des coordonnées de $u^n(g)$ dans la base (f_1, f_2, f_3) est $A^n \times \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix}$. Un simple calcul donne
$$A^n \times \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)^n (3 + 2n + 8n(n-1)) \\ (-1)^n (-2 - 16n) \\ 8(-1)^n \end{pmatrix}.$$
Et, pour $n \geq 2$,
$$\boxed{u^n(g) = ((-1)^n (3 + 2n + 8n(n-1))) f_1 + ((-1)^n (-2 - 16n)) f_2 + 8(-1)^n f_3.}$$

(a) On remarque que $v = \mathrm{id}_E + u$. Il s'ensuit que v est un endomorphisme de E comme somme de deux endomorphismes de E. De plus,
$$\boxed{\mathrm{mat}_{(f_1,f_2,f_3)}(v) = A + I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B.}$$

(b) On traite séparemment l'image et le noyau.

Image. Il est facile de voir que $\mathrm{rg}(B) = 2$ car la première colonne est nulle et les deux dernières colonnes forment une famille libre. De plus, $\mathrm{Im}(B) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$. L'erreur serait de conclure et dire que $\mathrm{Im}(v) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$. Il ne faut pas confondre vecteurs (qui sont ici des fonctions) et coordonnées. Les fonctions ayant respectivement $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ pour coordonnées sont f_1 et $2f_2$. Ainsi $\boxed{\mathrm{Im}(v) = \mathrm{Vect}(f_1, f_2).}$

Noyau. Pour trouver le noyau de v, cherchons les vecteurs $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tels que $B \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Cela donne le système
$$\begin{cases} y &= 0 \\ 2z &= 0 \end{cases}.$$

Soit $y = z = 0$. Ainsi $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Le vecteur ayant pour coordonnées $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ est f_1, il s'ensuit que $\boxed{\mathrm{Ker}\,(v) = \mathrm{Vect}\,(f_1).}$