Correction du devoir maison 2, sujet B

Exercice 1.

1. - F n'est pas vide car $(0,0,0) \in F$.
   - Soient (x_1, y_1, z_1) et (x_2, y_2, z_2) deux éléments de F. Soit $\lambda \in \mathbf{R}$. Montrons que $(x_1, y_1, z_1) + \lambda (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + \lambda x_2, y_1 + \lambda y_2, z_1 + \lambda z_2) \in F$. On a :

$$x_1 + \lambda x_2 - (y_1 + \lambda y_2) + 2(z_1 + \lambda z_2) = (x_1 - y_1 + 2z_1) + \lambda (x_2 - y_2 + 2z_2) = 0$$

.

On a montré que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$, c'est donc un espace vectoriel.

2. - Soient (x_1, y_1, z_1) et (x_2, y_2, z_2) deux éléments de $\mathbf{R}^3$. Soit $\lambda \in \mathbf{R}$. On a :

$$\begin{aligned}
u((x_1, y_1, z_1) + \lambda (x_2, y_2, z_2)) &= u(x_1 + \lambda x_2, y_1 + \lambda y_2, z_1 + \lambda z_2) \\
&= (x_1 + \lambda x_2 + y_1 + \lambda y_2 + z_1 + \lambda z_2, x_1 + \lambda x_2 + y_1 + \lambda y_2 + z_1 + \lambda z_2, \\
&\quad x_1 + \lambda x_2 + y_1 + \lambda y_2 + z_1 + \lambda z_2) \\
&= (x_1 + y_1 + z_1 + \lambda (x_2 + y_2 + z_2), x_1 + y_1 + z_1 + \lambda (x_2 + y_2 + z_2), \\
&\quad x_1 + y_1 + z_1 + \lambda (x_2 + y_2 + z_2)) \\
&= (x_1 + y_1 + z_1, x_1 + y_1 + z_1, x_1 + y_1 + z_1) \\
&\quad + \lambda (x_2 + y_2 + z_2, x_2 + y_2 + z_2, x_2 + y_2 + z_2) \\
&= u(x_1, y_1, z_1) + \lambda u(x_2, y_2, z_2).
\end{aligned}$$

   On a montré que u est linéaire.
   - Soit $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$. On a :

$$\begin{aligned}
(x, y, z) \in \operatorname{Ker}(u) &\iff u(x, y, z) = (0,0,0) \\
&\iff (x + y + z, x + y + z, x + y + z) = (0,0,0) \\
&\iff x + y + z = 0 \\
&\iff x = -y - z \\
&\iff (x, y, z) = (-y - z, y, z) = y(-1,1,0) + z(-1,0,1).
\end{aligned}$$

   Il s'ensuit que $\operatorname{Ker}(u) = \operatorname{Vect}((-1,1,0), (-1,0,1))$.
   La famille $((-1,1,0), (-1,0,1))$ est une base du noyau de u car génératrice et libre (constituée de deux vecteurs non colinéaires).
   - Le théorème du rang assure que $\operatorname{rg}(u) = \dim(\mathbf{R}^3) - \dim(\operatorname{Ker}(u)) = 3 - 2 = 1$.
   Or, $\operatorname{Im}(u) = \operatorname{Vect}(u(1,0,0), u(0,1,0), u(0,0,1)) = \operatorname{Vect}((1,1,1), (1,1,1), (1,1,1)) = \operatorname{Vect}(1,1,1)$.
3. - La linéarité de u est facile à vérifier.
   - Soit $P = aX^2 + bX + c \in \mathbf{R}_2[X]$. On a :

$$\begin{aligned}
P \in \operatorname{Ker}(u) &\iff u(P) = (0,0) \\
&\iff (c, 2b) = (0,0) \\
&\iff P = aX^2.
\end{aligned}$$

   On en déduit que $\operatorname{Ker}(u) = \operatorname{Vect}(X^2)$. On remarque que la famille (X^2) est une base du noyau de u car cette famille est constituée d'un unique vecteur non nul.

- Le théorème du rang assure que $\text{rg}\,(u) = \dim\left(\mathbf{R}_2\,[X]\right) - \dim\left(\text{Ker}\,(u)\right) = 3 - 1 = 2$.
  Or, $\text{Im}\,(u) \subset \mathbf{R}^2$ et ces deux espaces vectoriels ont la même dimension, donc $\text{Im}\,(u) = \mathbf{R}^2$.

4. - Il est facile de vérifier que la famille $\mathscr{C}$ est libre dans $\mathbf{R}^2$. Elle est libre, contient deux vecteurs dans $\mathbf{R}^2$ de dimension 2, elle forme une base de $\mathbf{R}^2$.
   - Par définition, on a : $\text{Pass}\,(\mathscr{B} \to \mathscr{C}) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$. On a $\text{Pass}\,(\mathscr{B} \to \mathscr{C})^{-1} = \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

5. (a) - Soit $P \in \mathbf{R}_2\,[X]$. Montrons que $g\,(P) \in \mathbf{R}_2\,[X]$. On pose $P = aX^2 + bX + c$. On a :

$$g\,(P) = (-a-b)\,X^2 + (-2a-b-c)\,X + (-b-c) \in \mathbf{R}_2\,[X]\,.$$

   - La linéarité de g ne pose pas de problème.

   On a montré que g est un endomorphisme de $\mathbf{R}_2\,[X]$.

   (b) De simples calculs donnent :

$$g\,(1) = -2X - 1, \quad g\,(X) = -X^2 - X - 1 \quad \text{et} \quad g\left(X^2\right) = -X^2 - 2X.$$

   La matrice de f dans la base canonique est $\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

   (c) Il est facile de voir que la matrice ci-dessus est inversible ainsi $\text{rg}\,(g) = 3$, ainsi g est bijective (on parle d'automorphisme de $\mathbf{R}_2\,[X]$).

6. On procède par analyse/synthèse. Soit $e \in E$.

   - *Analyse*. On suppose qu'il existe $f \in F$ et $g \in G$ telles que $e = f + g$. Comme g est constante, on écrit $g\,(t) = k$ pour tout $t \in [0,1]$. On en déduit que :

$$\int_0^1 e\,(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \left(f\,(t) + g\,(t)\right)\mathrm{d}t = \int_0^1 f\,(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^1 k\,\mathrm{d}t = k.$$

   On en déduit que pour tout $t \in [0,1]$, $f\,(t) = e\,(t) - k = e\,(t) - \displaystyle\int_0^1 e\,(x)\,\mathrm{d}x$.

   - *Synthèse*. On définit sur $[0,1]$ les fonctions f et g par :

$$\forall t \in [0,1]\,, \quad g\,(t) = e\,(t) - \int_0^1 e\,(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad g\,(t) = \int_0^1 e\,(x)\,\mathrm{d}x.$$

   Il est clair que $e = f + g$ et $f \in F$ et $g \in G$.

   On a montré que tout élément de E s'écrit comme la somme unique d'un élément de F et d'un élément de G. On a montré que $E = F \oplus G$.

Exercice 2.

1. - Déjà, F n'est pas vide car $(0,0,0) \in F$.
     Soient (x_1, y_1, z_1) et (x_2, y_2, z_2) deux éléments de F. Soit aussi $\lambda \in \mathbf{R}$. Montrons que $(x_1, y_1, z_1) + \lambda\,(x_2, y_2, z_2) = (x_1 + \lambda x_2, y_1 + \lambda y_2, z_1 + \lambda z_2) \in F$. On a $y_1 + \lambda y_2 = z_1 + \lambda z_2$ car $y_1 = z_1$ et $y_2 = z_2$.
     On a montré que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$.
   - On montre de même que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$.

2. (a) Soit $(x,y,z) \in \mathbf{R}^3$. On a :

$$\begin{aligned} (x,y,z) \in F \quad &\iff \quad y = z \\ &\iff \quad (x,y,z) = (x,y,y) \\ &\iff \quad (x,y,z) = x\,(1,0,0) + y\,(0,1,1)\,. \end{aligned}$$

   La famille $\left((1,0,0)\,,(0,1,1)\right)$ est une famille génératrice de F. C'est même une base de F si l'on remarque que cette famille est libre car formée de deux vecteurs non colinéaires.

(b) Soit $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$. On a :

$$\begin{aligned}(x,y,z) \in G &\iff \begin{cases} x &= y \\ z &= 2y \end{cases}\\ &\iff (x,y,z) = (y,y,2y)\\ &\iff (x,y,z) = y\,(1,1,2)\,.\end{aligned}$$

La famille $((1,1,2))$ est une famille génératrice de G, formée d'un seul vecteur non nul, c'est une base de G.

(c) Montrons que $F \cap G = \{0\}$ et $\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$.

- Soit $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$. On a :

$$\begin{aligned}(x,y,z) \in F \cap G &\iff \begin{cases} y &= z \\ x &= y \\ z &= 2y \end{cases}\\ &\iff \begin{cases} y &= z \\ x &= y \\ z &= 2z \end{cases}\\ &\iff \begin{cases} x &= 0 \\ y &= 0\,. \\ z &= 0 \end{cases}\end{aligned}$$

  Ona donc $F \cap G = \{0\}$.
- omme $\dim(F) = 2$ et $\dim(G) = 1$, $\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$.

On a prouvé que F et G sont des supplémentaires de E.

3. (a) Pour montrer que q est un projecteur de E, il suffit de montrer que $q^2 = q$. Soit $(x, y, z) \in E$, on a :

$$\begin{aligned}q \circ q\,(x,y,z) &= q\,(q\,(x,y,z))\\ &= q\,(x+y-z, y, y)\\ &= (x+y-z+y-y, y, y)\\ &= (x+y-z, y, y)\\ &= q\,(x,y,z)\,.\end{aligned}$$

(b) Soit $(x, y, z) \in E$. On a :

$$\begin{aligned}(x,y,z) \in \operatorname{Ker}(q) &\iff q\,(x,y,z) = (0,0,0)\\ &\iff \begin{cases} x+y-z &= 0 \\ y &= 0 \\ y &= 0 \end{cases}\\ &\iff \begin{cases} x &= z \\ y &= 0 \end{cases}\\ &\iff (x,y,z) = (x,0,x) = x\,(1,0,1)\,.\end{aligned}$$

On a prouvé que $\operatorname{Ker}(q) = \operatorname{Vect}((1,0,1))$.
La famille $(1,0,1)$ est une base de $\operatorname{Ker}(q)$ car constituée d'un seul vecteur non nul.

(c) Montrer que $\operatorname{Ker}(q)$ et G sont en somme directe revient à démontrer que $\operatorname{Ker}(q) \cap G = \{0\}$. Soit

$(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$. On a :

$$\begin{aligned}
(x,y,z) \in \operatorname{Ker}(q) \cap G &\iff \exists (\alpha,\beta) \in \mathbf{R}^2,\ (x,y,z) = \alpha(1,0,1) = \beta(1,1,2) \\
&\iff \begin{cases} \alpha &= \beta \\ \beta &= 0 \\ \alpha &= 2\beta \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} \alpha &= 0 \\ \beta &= 0 \end{cases} \\
&\iff (x,y,z) = (0,0,0).
\end{aligned}$$

On a montré que $\operatorname{Ker}(q) \cap G = \{0\}$.

(d) Par le théorème du rang :

$$\dim(\operatorname{Im}(q)) = \dim\left(\mathbf{R}^3\right) - \dim(\operatorname{Ker}(q)) = 3 - 1 = 2.$$

Les vecteurs $f_1 = (1,0,0)$ et $f_2 = (0,1,1)$ forment une base de F et vérifient $q(f_1) = f_1$ et $q(f_2) = f_2$, donc sont des éléments de $\operatorname{Im}(q)$, ce qui prouve que $F \subset \operatorname{Im}(q)$. Ces deux sous-espaces ayant même dimension, on en déduit que $F = \operatorname{Im}(q)$.

Exercice 3.

1. Soient $(M, N) \in \mathscr{M}_2(\mathbf{R})^2$. Soit $\lambda \in \mathbf{R}$. On a :

$$\begin{aligned}
u(\lambda M + N) &= A(\lambda M + N) - (\lambda M + N)A \\
&= \lambda AM + AN - \lambda MA - NA \\
&= \lambda(AM - MA) + AN - NA \\
&= \lambda u(M) + u(N).
\end{aligned}$$

On a montré que u est linéaire.

2. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbf{R})$. On a :

$$\begin{aligned}
M \in \operatorname{Ker}(u) &\iff u(M) = 0 \\
&\iff \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{pmatrix} -b-c & a+2b-d \\ a-2c-d & b+c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{cases} -b-c &= 0 \\ a+2b-d &= 0 \\ a-2c-d &= 0 \\ b+c &= 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} b+c &= 0 \\ a+2b-d &= 0 \end{cases} \quad \text{en faisant } L_3 \longleftarrow L_3 - L_2 \text{ et } L_4 \longleftarrow L_4 - L_1 \\
&\iff \begin{cases} c &= -b \\ a &= d-2b \end{cases} \\
&\iff M = \begin{pmatrix} d-2b & b \\ -b & d \end{pmatrix} = b\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

On en déduit $\operatorname{Ker}(u) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$. Notons que comme les deux vecteurs ne sont pas colinéaires, la famille $\left(\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$ est libre, donc forme une base du noyau de u.

3. D'après le théorème du rang, on a :

$$\mathrm{rg}\,(u) = \dim\left(\mathscr{M}_2\,(\mathbf{R})\right) - \dim\left(\mathrm{Ker}\,(u)\right) = 4 - 2 = 2.$$

Or,

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}\,(u) &= \mathrm{Vect}\left(u\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, u\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}, u\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}, u\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right)\\ &= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1&2\\0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1&0\\-2&-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&-1\\-1&0\end{pmatrix}\right). \end{aligned}$$

Or, $\begin{pmatrix}0&-1\\-1&0\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}-1&2\\0&1\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}1&-2\\0&-1\end{pmatrix}$ et comme $\mathrm{rg}\,(u) = 2$, on en déduit finalement que :

$$\mathrm{Im}\,(u) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1&0\\-2&-1\end{pmatrix}\right).$$

4. On remarque qu'une matrice $M \in \mathscr{M}_2\,(\mathbf{R})$ commute avec A si, et seulement si, $A \in \mathrm{Ker}\,(u)$. Il s'ensuit que l'ensemble des matrices qui commutent avec A est $\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}-2&1\\-1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\right)$.

Exercice 4.

1. Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^2$ tel que $\alpha\,(e_1 + e_2) + \beta\,(e_1 - e_2) = 0$.
Or, $\alpha\,(e_1 + e_2) + \beta\,(e_1 - e_2) = (\alpha + \beta)\,e_1 + (\alpha - \beta)\,e_2 = 0$. Comme (e_1, e_2) est une base de $\mathbf{R}^2$, on en déduit que $\begin{cases}\alpha + \beta &= 0\\ \alpha - \beta &= 0\end{cases}$, soit $\alpha = \beta = 0$.
La famille $\mathscr{C}$ est libre. Elle est libre, contient deux vecteurs dans $\mathbf{R}^2$ de dimension 2, elle forme donc une base de $\mathbf{R}^2$.

2. Par définition de A, on a :

$$u\,(e_1) = 2e_1 - e_2 \quad \text{et} \quad u\,(e_2) = -e_1 + 2e_2.$$

Il s'ensuit que

$$u\,(e_1 + e_2) = u\,(e_1) + u\,(e_2) = e_1 + e_2 \quad \text{et} \quad u\,(e_1 - e_2) = u\,(e_1) - u\,(e_2) = 3\,(e_1 - e_2)\,.$$

On en déduit que $A' = \begin{pmatrix}1&0\\0&3\end{pmatrix}$.

3. D'après le cours, on a :

$$A = \mathrm{Pass}\,(\mathscr{B} \to \mathscr{C})\,A'\mathrm{Pass}\,(\mathscr{B} \to \mathscr{C})^{-1}\,.$$

Or, $\mathrm{Pass}\,(\mathscr{B} \to \mathscr{C}) = \begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}$ et $\mathrm{Pass}\,(\mathscr{B} \to \mathscr{C})^{-1} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}$. Finalement, on récupère :

$$\begin{pmatrix}2&-1\\-1&2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&3\end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}.$$

4. Une récurrence immédiate montre que

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad A^n = \mathrm{Pass}\,(\mathscr{B} \to \mathscr{C})\,A'^n\mathrm{Pass}\,(\mathscr{B} \to \mathscr{C})^{-1}\,.$$

Or, $A'^n = \begin{pmatrix}1&0\\0&3^n\end{pmatrix}$ (car A' est diagonale), donc

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad A^n = \begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&3^n\end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}3^n+1&-3^n+1\\-3^n+1&3^n+1\end{pmatrix}.$$

Exercice 5.

1. On a : $P_1(1) = 1$, $P_1(3) = 0$, $P_1(5) = 0$, $P_2(1) = 0$, $P_2(3) = 1$, $P_2(5) = 0$, $P_3(1) = 0$, $P_3(3) = 0$ et $P_3(5) = 1$.
2. Soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbf{R}^3$ tel que
$$\alpha P_1(X) + \beta P_2(X) + \gamma P_3(0) = 0. \tag{1}$$
En évaluant (1) en 1, on a $\alpha = 0$, en évaluant (1) en 3, on a $\beta = 0$, puis en évaluant (1) en 5, on a $\gamma = 0$. La famille (P_1, P_2, P_3) est une famille libre de $\mathbf{R}_2[X]$. Elle est libre, contient 3 éléments dans un espace vectoriel de dimension 3, elle est donc une base de $\mathbf{K}_2[X]$.
3. La famille $\mathscr{C}$ étant une base de $\mathbf{R}_2[X]$, il existe trois réels uniques α, β et γ tels que :
$$X^2 + X + 1 = \alpha P_1(X) + \beta P_2(X) + \gamma P_3(X). \tag{2}$$
En évaluant successivement la ligne (2) en 1, 3 et 5, on obtient $\alpha = 3$, $\beta = 13$ et $\gamma = 31$.
La matrice des coordonnées de $X^2 + X + 1$ dans la base $\mathscr{C}$ est $\begin{pmatrix} 3 \\ 13 \\ 31 \end{pmatrix}$.
4. (a) De simples calculs donnent :
$$P_1(X) = \frac{1}{8}X^2 - X + \frac{15}{8}, \quad P_2(X) = -\frac{1}{4}X^2 + \frac{3}{2}X - \frac{5}{4} \quad \text{et} \quad P_3(X) = \frac{1}{8}X^2 - \frac{1}{2}X + \frac{3}{8}.$$
Il s'ensuit que $\operatorname{Pass}(\mathscr{B} \to \mathscr{C}) = \begin{pmatrix} \frac{15}{8} & -\frac{5}{4} & \frac{3}{8} \\ -1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{8} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$.

   (b) On note X la matrice des coordonnées de $X^2 + X + 1$ dans la base $\mathscr{B}$ et X' la matrice des coordonnées de $X^2 + X + 1$ dans la base $\mathscr{C}$. D'après le cours, on a $X = \operatorname{Pass}(\mathscr{B} \to \mathscr{C}) X'$, soit $X' = \operatorname{Pass}(\mathscr{B} \to \mathscr{C})^{-1} X = \operatorname{Pass}(\mathscr{C} \to \mathscr{B}) X$.
La même méthode que celle utilisée à la question 3 donne
$$1 = P_1(X) + P_2(X) + P_3(X), \quad X = P_1(X) + 3P_2(X) + 5P_3(X) \quad \text{et} \quad X^2 = P_1(X) + 9P_2(X) + 25P_3(X),$$
ainsi $\operatorname{Pass}(\mathscr{C} \to \mathscr{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 5 & 25 \end{pmatrix}$.
On en déduit que la matrice des coordonnées de $X^2 + X + 1$ dans la base $\mathscr{C}$ est
$$\operatorname{Pass}(\mathscr{C} \to \mathscr{B}) X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 5 & 25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 13 \\ 31 \end{pmatrix}.$$

Exercice 6.

1. On a : $A - 2\mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$. En notant C_1, C_2 et C_3 les colonnes de cette matrice, on remarque que l'on a : $C_3 = -C_1 - C_2$. De plus, C_1 et C_2 ne sont pas colinéaires, donc $\operatorname{rg}(A - 2\mathrm{I}_3) = 2$, donc son noyau est de dimension 1.
On remarque que $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker}(A - 2\mathrm{I}_3)$, donc $\operatorname{Ker}(u - \mathrm{id}_{\mathbf{R}^3}) = \operatorname{Vect}(1, 1, 1)$.
La famille $(1, 1, 1)$ est bien une base de $\operatorname{Ker}(u - \mathrm{id}_{\mathbf{R}^3})$ car constituée d'un unique vecteur non nul.
2. Un simple calcul donne $A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 4 & -4 \\ 4 & 4 & -4 \\ 4 & 4 & -4 \end{pmatrix}$. Cette matrice est de rang 1 car toutes les colonnes sont proportionnelles à une colonne non nulle, donc son noyau est de dimension 2.

On remarque que $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ sont dans le noyau de A^2 et ne sont pas colinéaires. On en déduit que $\operatorname{Ker}\left(u^2\right) = \operatorname{Vect}\left((1,-1,0),(1,0,-1)\right)$.
La famille obtenue est une base de $\operatorname{Ker}\left(u^2\right)$.

3. - Soit $X \in \operatorname{Ker}(u)$. On a $u(X) = 0$, donc $u(u(X)) = u(0)$, soit $u^2(X) = 0$. Autrement dit, $X \in \operatorname{Ker}\left(u^2\right)$, ce qui prouve l'inclusion demandée.
   - On remarque que le rang de A vaut 2 car la première et la deuxième colonne sont égales et la deuxième et la troisième colonne ne sont pas colinéaires. Il s'ensuit que le noyau de A est de dimension 1.
     On remarque que $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker}(A)$. On en déduit donc que $\operatorname{Ker}(u) = \operatorname{Vect}(1,-1,0)$. La famille obtenue est une base du noyau de u.
4. On remarque que $(1,0,-1) \in \operatorname{Ker}\left(u^2\right)$, mais comme $A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \neq 0$, on a $(1,0,-1) \notin \operatorname{Ker}(u)$.
5. Il est facile de montrer que la famille $\left(e_1, u\left(e_2\right), e_2\right)$ est une famille libre de $\mathbf{R}^3$.
   De plus, on a :
   $$u\left(e_1\right) = 2e_1, \quad u\left(u\left(e_1\right)\right) = u^2\left(e_1\right) = 0 \quad \text{et} \quad u\left(e_1\right) = u\left(e_1\right).$$
   Il s'ensuit que la matrice de u dans la base $\mathscr{B}$ est $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.