# Correction du devoir maison 2, sujet A

**Exercice 1.**

1. On a : $P_1(1) = 1$, $P_1(3) = 0$, $P_1(5) = 0$, $P_2(1) = 0$, $P_2(3) = 1$, $P_2(5) = 0$, $P_3(1) = 0$, $P_3(3) = 0$ et $P_3(5) = 1$.
2. Soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbf{R}^3$ tel que
$$\alpha P_1(X) + \beta P_2(X) + \gamma P_3(0) = 0. \tag{1}$$
En évaluant (1) en 1, on a $\alpha = 0$, en évaluant (1) en 3, on a $\beta = 0$, puis en évaluant (1) en 5, on a $\gamma = 0$. La famille $(P_1, P_2, P_3)$ est une famille libre de $\mathbf{R}_2[X]$. Elle est libre, contient 3 éléments dans un espace vectoriel de dimension 3, elle est donc une base de $\mathbf{K}_2[X]$.
3. La famille $\mathscr{C}$ étant une base de $\mathbf{R}_2[X]$, il existe trois réels uniques $\alpha$, $\beta$ et $\gamma$ tels que :
$$X^2 + X + 1 = \alpha P_1(X) + \beta P_2(X) + \gamma P_3(X). \tag{2}$$
En évaluant successivement la ligne (2) en 1, 3 et 5, on obtient $\alpha = 3$, $\beta = 13$ et $\gamma = 31$.
La matrice des coordonnées de $X^2 + X + 1$ dans la base $\mathscr{C}$ est $\begin{pmatrix} 3 \\ 13 \\ 31 \end{pmatrix}$.
4. (a) De simples calculs donnent :
$$P_1(X) = \frac{1}{8}X^2 - X + \frac{15}{8}, \quad P_2(X) = -\frac{1}{4}X^2 + \frac{3}{2}X - \frac{5}{4} \quad \text{et} \quad P_3(X) = \frac{1}{8}X^2 - \frac{1}{2}X + \frac{3}{8}.$$
Il s'ensuit que $\mathrm{Pass}(\mathscr{B} \to \mathscr{C}) = \begin{pmatrix} \frac{15}{8} & -\frac{5}{4} & \frac{3}{8} \\ -1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{8} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$.

   (b) On note $X$ la matrice des coordonnées de $X^2 + X + 1$ dans la base $\mathscr{B}$ et $X'$ la matrice des coordonnées de $X^2 + X + 1$ dans la base $\mathscr{C}$. D'après le cours, on a $X = \mathrm{Pass}(\mathscr{B} \to \mathscr{C})\, X'$, soit $X' = \mathrm{Pass}(\mathscr{B} \to \mathscr{C})^{-1} X = \mathrm{Pass}(\mathscr{C} \to \mathscr{B})\, X$.
La même méthode que celle utilisée à la question 3 donne
$$1 = P_1(X) + P_2(X) + P_3(X), \quad X = P_1(X) + 3P_2(X) + 5P_3(X) \quad \text{et} \quad X^2 = P_1(X) + 9P_2(X) + 25P_3(X),$$
ainsi $\mathrm{Pass}(\mathscr{C} \to \mathscr{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 5 & 25 \end{pmatrix}$.
On en déduit que la matrice des coordonnées de $X^2 + X + 1$ dans la base $\mathscr{C}$ est
$$\mathrm{Pass}(\mathscr{C} \to \mathscr{B})\, X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 5 & 25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 13 \\ 31 \end{pmatrix}.$$

## Problème

### Partie 1 : Étude d'exemples

1. (a) 
   - La matrice des coordonnées de $u(a)$ dans la base canonique de $\mathbf{R}^2$ est $\begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ -1 \end{pmatrix}$.
   Il s'ensuit que $u(a) = (-10, -1)$.
   - La famille $((2,3), (-10,-1))$ est une famille libre de $\mathbf{R}^2$ car elle contient deux vecteurs non colinéaires.
   Elle est libre dans $\mathbf{R}^2$, contient deux vecteurs dans $\mathbf{R}^2$ de dimension 2, elle est une base de $\mathbf{R}^2$.

   (b) 
   - La matrice des coordonnées de $u^2(a)$ dans la base canonique de $\mathbf{R}^2$ est $A^2 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -34 \\ -9 \end{pmatrix}$, il s'ensuit que $u^2(a) = (-34, -9)$.
   - On remarque que
   $$u^2(a) = (-34, -9) = -2(2,3) + 3(-10,-1) = -2a + 3u(a).$$
   On pose $x = -2$ et $y = 3$.

   (c) D'après les questions 1 (a) et 1 (b), on a $A' = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

   (d) D'après le cours, on a :
   $$A = \mathrm{Pass}(\mathscr{B} \to \mathscr{B}')\, A' \mathrm{Pass}(\mathscr{B} \to \mathscr{B}')^{-1}.$$
   Or, $\mathrm{Pass}(\mathscr{B} \to \mathscr{B}') = \begin{pmatrix} 2 & -10 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{Pass}(\mathscr{B} \to \mathscr{B}')^{-1} = \frac{1}{28}\begin{pmatrix} -1 & 10 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$. On en déduit donc :
   $$\begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -10 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\frac{1}{28}\begin{pmatrix} -1 & 10 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

   (e) La famille $(b, u(b))$ n'est pas libre, donc n'est pas une base, dès que $u(b)$ est un multiple de $b$, autrement dit s'il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que $u(b) = \lambda b$, soit $(u - \lambda \mathrm{id}_{\mathbf{R}^2})(b) = 0$ ou bien $b \in \mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{id}_{\mathbf{R}^2})$.
   Or, la matrice $A - \lambda \mathrm{I}_2 = \begin{pmatrix} 4-\lambda & -6 \\ 1 & -1-\lambda \end{pmatrix}$ n'est pas inversible lorsque son déterminant qui vaut $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$. Il suffit de prendre $\lambda = 1$.
   On remarque que $A - \mathrm{I}_2 = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, ainsi son noyau est $\mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, donc $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{id}_{\mathbf{R}^2}) = \mathrm{Vect}(2,1)$.
   Il suffit de prendre $b = (2,1)$.

2. (a) Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. On a :
   $$\begin{aligned} X \in \mathrm{Ker}(B) &\iff BX = 0 \\ &\iff \begin{cases} 2x & = 0 \\ 4y - 6z & = \\ y - z & = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x & = 0 \\ y & = 0 \\ z & = 0 \end{cases}. \end{aligned}$$
   Il s'ensuit que $\mathrm{Ker}(B) = \{0\}$, donc $B$ est inversible, puis $v$ est un automorphisme.

(b) On a : $B-2\mathrm{I}_3=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&2&-6\\0&1&-3\end{pmatrix}$. La matrice est de rang 1 car contient une colonne nulle et les deux dernières colonnes non nulles sont non colinéaire, ainsi son noyau est de dimension 2.

On remarque alors que $\operatorname{Ker}(B-2\mathrm{I}_3)=\operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix}\right)$.

On en déduit que $\operatorname{Ker}(v-2\mathrm{id}_{\mathbf{R}^3})=\operatorname{Ker}(e_1=(1,0,0),e_2=(0,3,1))$.

(c) On a : $B-\mathrm{I}_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&3&-6\\0&1&-2\end{pmatrix}$. La matrice est de rang 2 car contient deux colonnes non colinéaires et la troisième est un multiple de la seconde. Ainsi, le noyau est de dimension 1.

On remarque que $\operatorname{Ker}(B-\mathrm{I}_3)=\operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}\right)$.

On en déduit que $\operatorname{Ker}(v-\mathrm{id}_{\mathbf{R}^3})=\operatorname{Ker}(e_3=(0,2,1))$.

(d) Il est facile de remarquer que la famille $(e_1,e_2,e_3)$ est libre. Cette famille est libre, contient trois vecteurs dans $\mathbf{R}^3$ de dimension 3, elle est donc une base de $\mathbf{R}^3$.

Comme $v(e_1)=2e_1$, $v(e_2)=2e_2$ et $v(e_3)=e_3$, il s'ensuit que la matrice de $v$ dans la base $(e_1,e_2,e_3)$ est $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

(e) $\operatorname{Ker}(v-2\mathrm{id}_{\mathbf{R}^3})$ et $\operatorname{Ker}(v-\mathrm{id}_{\mathbf{R}^3})$ sont des sous-espaces propres associés aux valeurs propres 2 et 1, donc $3=2+1=\dim(\operatorname{Ker}(v-2\mathrm{id}_{\mathbf{R}^3}))+\dim(\operatorname{Ker}(v-\mathrm{id}_{\mathbf{R}^3}))\leq 3=\dim\left(\mathbf{R}^3\right)$.

On en déduit que $\dim(\operatorname{Ker}(v-2\mathrm{id}_{\mathbf{R}^3}))+\dim(\operatorname{Ker}(v-\mathrm{id}_{\mathbf{R}^3}))=3$, donc $v$ est diagonalisable.

(f) Il est facile de vérifier que l'on a $B^2-3B+2\mathrm{I}_3=0$, donc $v^2-3v+2\mathrm{id}_{\mathbf{R}^3}=0$.

(g) Supposons que $v$ soit cyclique. Il existe un vecteur $a\in\mathbf{R}^3$ tel que la famille $\left(a,v(a),v^2(a)\right)$ soit une base de $\mathbf{R}^3$.

Comme la famille $(e_1,e_2,e_3)$ est une base de $\mathbf{R}^3$, il existe $(x,y,z)\in\mathbf{R}^3$ tel que $a=xe_1+ye_2+ze_3$. Ainsi, $v(a)=2xe_2+2ye_2+ze_3$ et $v^2(a)=4xe_1+4ye_2+ze_3$.

La famille $\left(a,v(a),v^2(a)\right)$ n'est pas libre car la matrices des coordonnées de ces vecteurs dans la base $(e_1,e_2,e_3)$ est $\begin{pmatrix}x&2x&4x\\y&2y&4y\\z&2z&4z\end{pmatrix}$. Or, on remarque que les deux premières lignes de cette matrice sont colinéaires.

Un tel vecteur $a$ n'existe pas, donc $v$ n'est pas cyclique.

3. (a) On a $d\left(X^{n-1}\right)=(n-1)X^{n-2}$.

On va montrer par récurrence que pour tout $k\in[\![1,n-1]\!]$, $d^k\left(X^{n-1}\right)=\dfrac{(n-1)!}{(n-k-1)!}X^{n-k-1}$.

On pose $\mathscr{P}_k$ : « $d^k\left(X^{n-1}\right)=\dfrac{(n-1)!}{(n-k-1)!}X^{n-k-1}$ ».

La proposition $\mathscr{P}_1$ est vraie.

Supposons $\mathscr{P}_k$ vraie pour un entier $k\in[\![1,n-2]\!]$. On a :

$$\begin{aligned}d^{k+1}\left(X^{n-1}\right)&=d\left(d^k\left(X^{n-1}\right)\right)\\&=d\left(\frac{(n-1)!}{(n-k-1)!}X^{n-k-1}\right)\quad\text{hypothèse de récurrence}\\&=\frac{(n-1)!}{(n-k-1)!}(n-k-1)X^{n-k-2}\\&=\frac{(n-1)!}{(n-k-2)!}X^{n-k-2}.\end{aligned}$$

On a montré que $\mathscr{P}_{k+1}$, ce qui termine la récurrence.

(b) On remarque que pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $\deg\left(d^k\left(X^{n-1}\right)\right) = n-1-k$.
La famille $\left(X^{n-1}, d\left(X^{n-1}\right), \ldots, d^{n-1}\left(X^{n-1}\right)\right)$ est une famille de $\mathbf{R}_{n-1}[X]$ échelonné en degré et ne contenant pas le polynôme nul : elle est donc libre.
Cette famille est libre, contient $n$ éléments dans $\mathbf{R}_{n-1}[X]$ de dimension $n$, c'est donc une base de $\mathbf{R}_{n-1}[X]$.

**Partie 2 : Étude d'un endomorphisme de $\mathbf{R}_{n-1}[X]$**

1. La famille est une famille libre de $\mathbf{R}_{n-1}[X]$ car échelonnée en degrés et ne contenant pas le polynôme nul.
   C'est donc une base de $\mathbf{R}_{n-1}[X]$ car elle est libre et contient $n$ vecteurs dans $\mathbf{R}_{n-1}[X]$ de dimension $n$.
2. (a) Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$. D'après la formule du binôme de Newton, on a :
   $$\Delta\left(X^k\right) = (X+1)^k - X^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} X^i - X^k = \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} X^i.$$
   Le coefficient devant $X^{k-1}$ est $\binom{k}{k-1} = k \neq 0$, donc $\Delta\left(X^k\right)$ est de degré $k-1$.

   (b) On note $d = \deg(P) \geq 1$. On écrit $P = \sum_{i=0}^{d} a_i X_i$ avec $a_d \neq 0$. Par linéarité de $\Delta$, on a : $\Delta(P) = \sum_{i=0}^{d} a_i \Delta\left(X^i\right) = \sum_{i=1}^{d} a_i \Delta\left(X^i\right)$ car $\Delta(1) = 0$.
   D'après la question 2 (a), tous les polynômes $\Delta\left(X^i\right)$ pour $i \in [\![1, d-1]\!]$ sont de degré au plus $d-2$, donc $\deg\left(\sum_{i=1}^{d-2} a_i \Delta\left(X^i\right)\right) \leq d-2$. Comme $a_d \neq 0$, le polynôme $a_d \Delta\left(X^d\right)$ est de degré $d-1$, donc $\deg(\Delta(P)) = d-1$.

   (c) D'après la question 2 (b), la famille $\left(X^{n-1}, \Delta\left(X^{n-1}\right), \Delta^2\left(X^{n-1}\right), \ldots, \Delta^{n-1}\left(X^{n-1}\right)\right)$ est une famille échelonnée en degré de $\mathbf{R}_{n-1}[X]$.
   De plus, elle contient $n$ vecteurs dans $\mathbf{R}_{n-1}[X]$ de dimension $n$, elle est donc une base de $\mathbf{R}_{n-1}[X]$.
3. (a)
   - Il est clair que les polynômes constants sont dans le noyau de $\Delta$.
   - Soit $P \in \mathbf{R}_{n-1}[X]$ non constant, ainsi $\deg(P) \geq 1$. D'après la question 2 (b), $\deg(\Delta(P)) = \deg(P) - 1 \geq 0$, donc $\Delta(P) \neq 0$.

   On a montré que $\operatorname{Ker}(\Delta) = \mathbf{R}_0[X]$.

   (b) Soit $P \in \mathbf{R}_{n-1}[X]$.
   - Si $P = 0$, alors $\Delta(P) = 0 \in \mathbf{R}_{n-2}[X]$.
   - Si $P \neq 0$, d'après la question 2 (b), alors $\deg(\Delta(P)) = \deg(P) - 1 \leq n-2$, donc $\Delta(P) \in \mathbf{R}_{n-2}[X]$.

   On a montré que $\operatorname{Im}(\Delta) \subset \mathbf{R}_{n-2}[X]$.

   (c) D'après la question 3 (a), on a $\dim(\operatorname{Ker}(\Delta)) = 1$. Le théorème du rang assure que :
   $$\dim\left(\mathbf{R}_{n-1}[X]\right) = \dim(\operatorname{Ker}(\Delta)) + \operatorname{rg}(u) \iff \operatorname{rg}(u) = n-1.$$
   Comme $\operatorname{Im}(\Delta) \subset \mathbf{R}_{n-2}[X]$ et $\dim(\operatorname{Im}(\Delta)) = \dim\left(\mathbf{R}_{n-2}[X]\right) (= n-1)$, on en déduit que $\operatorname{Im}(\Delta) = \mathbf{R}_{n-2}[X]$.
4. (a) Pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, $\deg(P_i) = i$. D'après la question 1 de la partie 2, la famille $(P_0, \ldots, P_{n-1})$ est une base de $\mathbf{R}_{n-1}[X]$.

(b) Comme $(P_0, P_1, P_2, P_3)$ est une base de $\mathbf{R}_3[X]$, il existe quatre réels uniques $a$, $b$, $c$ et $d$ tels que :

$$X^3 - 5X^2 + X - 3 = aP_0(X) + bP_1(X) + cP_2(X) + dP_3(X) = a + bX + \frac{c}{2}X(X-1) + \frac{d}{6}X(X-1)(X-2). \tag{3}$$

En évaluant la ligne (3) en 0, 1, 2 et 3, on a :

$$\begin{cases} a & = -3 \\ a+b & = -6 \\ a+2b+c & = -13 \\ a+3b+3c+d & = -18 \end{cases} \iff \begin{cases} a & = -3 \\ b & = -3 \\ c & = -4 \\ d & = 5 \end{cases}.$$

(c)
- On a :

$$\begin{aligned} \Delta(P_j) &= P_j(X+1) - P_j(X) \\ &= \frac{1}{j!}\prod_{k=0}^{j-1}(X+1-k) - \frac{1}{j!}\prod_{k=0}^{j-1}(X-k) \\ &= \frac{1}{j!}\prod_{\ell=-1}^{j-2}(X-\ell) - \frac{1}{j!}\prod_{k=0}^{j-1}(X-k) \quad \text{on pose } \ell = k-1 \text{ dans le premier produit} \\ &= \frac{1}{j!}\left((X-(-1)) - (X-j-1)\right)\prod_{i=0}^{j-2}(X-i) \\ &= \frac{1}{(j-1)!}\prod_{i=0}^{j-2}(X-i) \\ &= P_{j-1}. \end{aligned}$$

- On en déduit que :

$$\Delta^i(P_j) = \begin{cases} P_{j-i} & \text{si } i \leq j \\ 0 & \text{si } i > j \end{cases}.$$

(d) D'après la question 4 (c), la famille $\left(P_{n-1}, \Delta(P_{n-1}), \ldots, \Delta^{n-1}(P_{n-1})\right)$ est égale à $(P_{n-1}, P_{n-2}, \ldots, P_0)$. La question 4 (a) assure que cette famille est une base de $\mathbf{R}_{n-1}[X]$, donc $\Delta$ est cyclique.