Correction du devoir maison 3

Exercice 1.

1. On écrit :
$$W_{n+2} = \int_0^{\pi/2} \cos^{n+1}(t) \times \cos(t)\,\mathrm{d}t.$$
On fait une intégration par parties en posant $u : t \longmapsto \cos^{n+1}(t)$ et $v : t \longmapsto \sin(t)$. Les fonctions u et v sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et $u' : t \longmapsto -(n+1)\cos^n(t)\sin(t)$. On a donc :
$$\begin{aligned} W_{n+2} &= \left[\cos^{n+1}(t) \times \sin(t)\right]_0^{\pi/2} + (n+1)\int_0^{\pi/2} \cos^n(t) \times \sin^2(t)\,\mathrm{d}t \\ &= (n+1)\int_0^{\pi/2} \cos^n(t) \times \sin^2(t)\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$
Or, pour tout $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\sin^2(t) = 1 - \cos^2(t)$, donc par linéarité de l'intégrale :
$$\begin{aligned} W_{n+2} &= (n+1)\int_0^{\pi/2} \cos^n(t)\,\mathrm{d}t - (n+1)\int_0^{\pi/2} \cos^{n+2}(t)\,\mathrm{d}t \\ &= (n+1)\,W_n - (n+1)\,W_{n+2}. \end{aligned}$$
Cela permet de conclure que :
$$(n+2)\,W_{n+2} = (n+1)\,W_n.$$

2. On procède par récurrence, on pose si $n \in \mathbf{N}$, $\mathscr{P}_n$: « $W_{2n} = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \times \frac{\pi}{2}$ ».
Un simple calcul donne $W_0 = \frac{\pi}{2}$, ainsi $\mathscr{P}_0$ est vraie.
On suppose $\mathscr{P}_n$ vraie, montrons que $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie. Par la question précédente, on a :
$$W_{2n+2} = \frac{2n+1}{2n+2} W_{2n}.$$
L'hypothèse de récurrence donne :
$$\begin{aligned} W_{2n+2} &= \frac{2n+1}{2n+2}\frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \times \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{(2n+1)!}{(2n+2)\,(2^n n!)^2} \times \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{(2n+2)\,(2n+1)!}{(2n+2)^2\,(2^n n!)^2} \times \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{(2n+2)!}{2^2\,(n+1)^2\,(2^n n!)^2} \times \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{(2n+2)!}{(2^{n+1}\,(n+1)!)^2} \times \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$
Ainsi $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie, ce qui termine la récurrence.

3. On pose $w_n = (n+1)\, W_n W_{n+1}$. On a $w_{n+1} = (n+2)\, W_{n+1} W_{n+2}$. La relation de récurrence établie à la question 1 donne $(n+2)\, W_{n+2} = (n+1)\, W_n$, ainsi $w_{n+1} = (n+1)\, W_{n+1} W_n = w_n$. Cela signifie que la suite $(w_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est constante. Un simple calcul donne $w_n = w_0 = \dfrac{\pi}{2}$.
4. La question précédente donne $(2n+1)\, W_{2n} W_{2n+1} = \dfrac{\pi}{2}$, soit :
$$W_{2n+1} = \frac{\pi}{2\,(2n+1)\, W_{2n}}.$$
Or, W_{2n} est donné par la question précédente, on laisse le lecteur terminer les calculs.
5. Il est clair que les expressions de W_{2n} et W_{2n+1} trouvées ci-dessus sont bien strictement positives.
6. On a :
$$\begin{aligned} W_{n+1} - W_n &= \int_0^{\pi/2} \cos(t)^{n+1}\, \mathrm{d}t - \int_0^{\pi/2} \cos(t)^n\, \mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\pi/2} \cos(t)^n\, (\cos(t) - 1)\, \mathrm{d}t \\ &\leq 0 \end{aligned}$$
car on intègre une fonction négative et les bornes sont rangées dans l'ordre croissant. Ainsi, $(W_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est décroissante.
7. La suite $(W_n)_{n\in\mathbf{N}}$ étant décroissante, on a $W_{n+2} \leq W_{n+1} \leq W_n$. Or, $W_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} W_n$, donc $\dfrac{n+1}{n+2} W_n \leq W_{n+1} \leq W_n$ puis par division par $W_n > 0$, $\dfrac{n+1}{n+2} \leq \dfrac{W_{n+1}}{W_n} \leq 1$. Le théorème d'encadrement assure que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{W_{n+1}}{W_n} = 1$.
8. En élevant au carré, on a :
$$\frac{2n}{\pi} W_n^2 = (n+1)\, W_n W_{n+1} \frac{2}{\pi} \frac{W_n}{W_{n+1}} \frac{n}{n+1}.$$
Or, $(n+1)\, W_n W_{n+1} \dfrac{2}{\pi} = 1$ (question 3), $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} = 1$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{W_n}{W_{n+1}} = 1$ (question 6). Ainsi, on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{2n}{\pi} W_n^2 = 1$, soit par positivité de W_n, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt{\frac{2n}{\pi}} W_n = 1$ce qui signifie que $\displaystyle W_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

Exercice 2.

1. Soit $f : t \longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-at} - \mathrm{e}^{-bt}}{t}$. f est continue sur $]0, +\infty[$.

   On prouve la convergence des intégrales $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-at} - \mathrm{e}^{-bt}}{t} \mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-at} - \mathrm{e}^{-bt}}{t} \mathrm{d}t$.
   - On a : $\mathrm{e}^{-at} \underset{t\to 0}{=} 1 - at + o(t)$ et $\mathrm{e}^{-bt} \underset{t\to 0}{=} 1 - bt + o(t)$, d'où $\mathrm{e}^{-at} - \mathrm{e}^{-bt} = (b-a)\, t + o(t)$ et $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{\mathrm{e}^{-at} - \mathrm{e}^{-bt}}{t} = b - a$.

     Ainsi, la fonction f est prolongeable par continuité en 0 si l'on pose $f(0) = b - a$. Il s'ensuit que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-at} - \mathrm{e}^{-bt}}{t} \mathrm{d}t$ converge.
   - Par croissance comparée, on a : $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} t^2 \frac{\mathrm{e}^{-at} - \mathrm{e}^{-bt}}{t} = 0$.

     Ainsi, il existe un réel $A \geq 1$ tel que pour tout $t \geq A$, $\left| t^2 \dfrac{\mathrm{e}^{-at} - \mathrm{e}^{-bt}}{t} \right| \leq 1$, soit $\left| \dfrac{\mathrm{e}^{-at} - \mathrm{e}^{-bt}}{t} \right| \leq \dfrac{1}{t^2}$.

     Comme l'intégrale $\displaystyle\int_A^{+\infty} \frac{1}{t^2} \mathrm{d}t$ converge (intégrale de Riemann avec $\alpha = 2 > 1$), par comparaison par inégalité des intégrales des fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-at} - \mathrm{e}^{-bt}}{t} \mathrm{d}t$ converge absolument, donc converge.

Il s'ensuit que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-at}-\mathrm{e}^{-bt}}{t}\mathrm{d}t$ converge.

2. On a :

$$\int_x^y \frac{\mathrm{e}^{-at}-\mathrm{e}^{-bt}}{t}\mathrm{d}t = \int_x^y \frac{\mathrm{e}^{-at}}{t}\mathrm{d}t - \int_x^y \frac{\mathrm{e}^{-bt}}{t}\mathrm{d}t.$$

Les changement de variables $x = at$ et $y = bt$ dans la première et la seconde intégrale donnent :

$$\int_x^y \frac{\mathrm{e}^{-at}-\mathrm{e}^{-bt}}{t}\mathrm{d}t = \int_{ax}^{bx} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\mathrm{d}t - \int_{ay}^{by} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\mathrm{d}t.$$

3. Comme $t \longmapsto \mathrm{e}^{-t}$ est décroissante, pour tout $t \in [az, bz]$, on a : $\mathrm{e}^{-bz} \leq \mathrm{e}^{-t} \leq \mathrm{e}^{-at}$. Ainsi, $\dfrac{\mathrm{e}^{-bz}}{t} \leq \dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{t} \leq \dfrac{\mathrm{e}^{-az}}{t}$. Par croissance de l'intégrale, on a :

$$\int_{az}^{bz} \frac{\mathrm{e}^{-bz}}{t}\mathrm{d}t \leq \int_{az}^{bz} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\mathrm{d}t \leq \int_{az}^{bz} \frac{\mathrm{e}^{-az}}{t}\mathrm{d}t.$$

Or, $\displaystyle\int_{az}^{bz} \frac{\mathrm{e}^{-bz}}{t}\mathrm{d}t = \mathrm{e}^{-bz}\left(\ln(b) - \ln(a)\right)$ et $\displaystyle\int_{az}^{bz} \frac{\mathrm{e}^{-bz}}{t}\mathrm{d}t = \mathrm{e}^{-az}\left(\ln(b) - \ln(a)\right)$, ce qui donne l'inégalité voulue.

4.
   - D'après la question 3, pour tout $x \in]0, 1]$, on a :

   $$\int_x^1 \frac{\mathrm{e}^{-at}-\mathrm{e}^{-bt}}{t}\mathrm{d}t = \int_{ax}^{bx} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\mathrm{d}t - \int_a^b \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\mathrm{d}t.$$

   Or, d'après la question précédente, on a :

   $$\mathrm{e}^{-bx}\left(\ln(b) - \ln(a)\right) \leq \int_{ax}^{bx} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\mathrm{d}t \leq \mathrm{e}^{-ax}\left(\ln(b) - \ln(a)\right).$$

   Comme $\lim\limits_{x\to 0} \mathrm{e}^{-bx}\left(\ln(b) - \ln(a)\right) = \lim\limits_{x\to 0} \mathrm{e}^{-ax}\left(\ln(b) - \ln(a)\right) = \ln(b) - \ln(a)$, on en déduit que :

   $$\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-at}-\mathrm{e}^{-bt}}{t}\mathrm{d}t = \ln(b) - \ln(a) - \int_a^b \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\mathrm{d}t.$$

   - D'après la question 3, pour tout $y > 1$, on a :

   $$\int_1^y \frac{\mathrm{e}^{-at}-\mathrm{e}^{-bt}}{t}\mathrm{d}t = \int_a^b \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\mathrm{d}t - \int_{ay}^{by} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\mathrm{d}t.$$

   Or, d'après la question précédente, on a :

   $$\mathrm{e}^{-by}\left(\ln(b) - \ln(a)\right) \leq \int_{ay}^{by} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\mathrm{d}t \leq \mathrm{e}^{-ay}\left(\ln(b) - \ln(a)\right).$$

   Comme $\lim\limits_{y\to +\infty} \mathrm{e}^{-by}\left(\ln(b) - \ln(a)\right) = \lim\limits_{y\to +\infty} \mathrm{e}^{-ay}\left(\ln(b) - \ln(a)\right) = 0$, on en déduit que :

   $$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-at}-\mathrm{e}^{-bt}}{t}\mathrm{d}t = \int_a^b \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\mathrm{d}t.$$

   Il s'ensuit que

   $$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-at}-\mathrm{e}^{-bt}}{t}\mathrm{d}t = \ln(b) - \ln(a).$$

Exercice 3.

1. $t \in \mathbf{R}_+ \longmapsto \mathrm{e}^{-t^2}$ est continue. De plus, par croissance comparée, $\lim\limits_{t \to +\infty} t^2\mathrm{e}^{-t^2} = 0$. Ainsi, il existe $A > 0$ tel que
$$\forall t \geq A, \quad t^2\mathrm{e}^{-t^2} \leq 1 \iff \mathrm{e}^{-t^2} \leq \frac{1}{t^2}.$$
Or, l'intégrale $\displaystyle\int_A^{+\infty} \frac{1}{t^2}$ converge (intégrale de Riemann avec $\alpha = 2 > 1$), par comparaison par inégalité des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_A^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$ converge, puis par somme, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$ converge aussi.

2. Les intégrales $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-x\left(1+t^2\right)}}{1+t^2}\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$ existent car ce sont les intégrales de fonctions continues sur un segment.

3. (a) La fonction exp est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbf{R}$, la formule de Taylor avec reste intégral donne
$$\mathrm{e}^x = 1 + x + \int_0^x \mathrm{e}^t\,(x-t)\,\mathrm{d}t.$$
(b) L'inégalité de la question précédente donne :
$$|\mathrm{e}^x - 1 - x| \leq \mathrm{e}^2 \left| \int_0^x |x-t|\,\mathrm{d}t \right|.$$
En discutant suivant que $x \geq 0$ ou $x \leq 0$, on montre que $\displaystyle\left| \int_0^x |x-t|\,\mathrm{d}t \right| = \frac{x^2}{2}$. Ainsi,
$$\forall x \in [-2,2]\,, \quad |\mathrm{e}^x - 1 - x| \leq \frac{\mathrm{e}^2}{2}x^2.$$
(c) Pour tout $t \in [0,1]$ et pour tout $h \in [-1,1]$, on a $-\left(1+t^2\right)h \in [-2,2]$, l'inégalité établie à la question précédente donne :
$$\left|\mathrm{e}^{-\left(1+t^2\right)h} - 1 + \left(1+t^2\right)h\right| \leq \frac{\mathrm{e}^2}{2}\left(1+t^2\right)^2 h^2 \leq 2\mathrm{e}^2h^2.$$
(d) En multipliant l'inégalité établie à la question précédente par $\dfrac{\mathrm{e}^{-x\left(1+t^2\right)}}{1+t^2} \geq 0$ ($x \in \mathbf{R}$), on obtient
$$\left| \frac{\mathrm{e}^{-(x+h)\left(1+t^2\right)}}{1+t^2} - \frac{\mathrm{e}^{-x\left(1+t^2\right)}}{1+t^2} + h\mathrm{e}^{-x\left(1+t^2\right)} \right| \leq 2\mathrm{e}^2\frac{\mathrm{e}^{-x\left(1+t^2\right)}}{1+t^2}h^2.$$
En intégrant cette inégalité entre 0 et 1 en utilisant l'inégalité triangulaire, on a
$$\left| \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-(x+h)\left(1+t^2\right)}}{1+t^2}\mathrm{d}t - \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-x\left(1+t^2\right)}}{1+t^2}\mathrm{d}t + h\int_0^1 \mathrm{e}^{-x\left(1+t^2\right)}\mathrm{d}t \right| \leq 2\mathrm{e}^2h^2 \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-x\left(1+t^2\right)}}{1+t^2}\mathrm{d}t.$$
(e) En divisant par $|h| \geq 0$ (que l'on suppose non nul) l'inégalité obtenue à la question précédente, on peut écrire :
$$\left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \int_0^1 \mathrm{e}^{-x\left(1+t^2\right)}\mathrm{d}t \right| \leq 2\mathrm{e}^2\,|h| \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-x\left(1+t^2\right)}}{1+t^2}\mathrm{d}t.$$
En faisant tendre h vers 0, on en déduit que
$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = -\int_0^1 \mathrm{e}^{-x\left(1+t^2\right)}\mathrm{d}t.$$
Ainsi, f est dérivable sur $\mathbf{R}$ et
$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad f'(x) = -\int_0^1 \mathrm{e}^{-x\left(1+t^2\right)}\mathrm{d}t.$$

4. h est dérivable sur $\mathbf{R}$ et

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad h'(x) = -2x \int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2\left(1+t^2\right)} \mathrm{d}t + 2\mathrm{e}^{-x^2} \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2} \mathrm{d}t = -2x\mathrm{e}^{-x^2} \int_0^1 \mathrm{e}^{-(xt)^2} \mathrm{d}t + 2\mathrm{e}^{-x^2} \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2} \mathrm{d}t.$$

Le changement de variable $u = tx$ dans la première intégrale donne

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad h'(x) = -2\mathrm{e}^{-x^2} \int_0^x \mathrm{e}^{-u^2} \mathrm{d}u + 2\mathrm{e}^{-x^2} \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2} \mathrm{d}t = 0.$$

Comme $\mathbf{R}$ est un intervalle, on en déduit que h est constante. Or,

$$h(0) = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} \mathrm{d}t = [\operatorname{Arctan}(t)]_0^1 = \frac{\pi}{4},$$

d'où pour tout $x \in \mathbf{R}$, $h(x) = \dfrac{\pi}{4}$.

5.
   - Enfin,

   $$\forall x \geq 0, \quad 0 \leq f(x) \leq \mathrm{e}^{-x}$$

   car pour tout $t \in [0,1]$, $\dfrac{\mathrm{e}^{-x\left(1+t^2\right)}}{1+t^2} \leq \mathrm{e}^{-x}$.
   - Par encadrement, on en déduit que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

6. En utilisant le fait que h est constante, $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \dfrac{\pi}{4}$. Or, pour tout $x \geq 0$, $\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2} \mathrm{d}t \geq 0$, ainsi

$$\lim_{x \to +\infty} \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2} \mathrm{d}t = \sqrt{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Exercice 4.

1. Soit $x \in \mathbf{R}$. On a

$$x \in \mathscr{D}_f \iff x > 0.$$

Ainsi, $\mathscr{D}_f = \mathbf{R}_+^*$.
Les théorèmes généraux assurent que f est dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$ et

$$\forall x > 0, \quad f'(x) = \frac{1}{4x} > 0.$$

On en déduit que f est strictement croissante sur $\mathbf{R}_+^*$.
Par croissance de f sur $\left[1, \mathrm{e}^2\right]$, on a

$$\forall x \in \left[1, \mathrm{e}^2\right], \quad f(1) \leq f(x) \leq f\left(\mathrm{e}^2\right),$$

soit

$$\forall x \in \left[1, \mathrm{e}^2\right], \quad 3 \leq 4 \leq f(x) \leq \frac{9}{2} \leq \mathrm{e}^2.$$

On a montré que l'intervalle $\left[1, \mathrm{e}^2\right]$ est stable par f.

2. Pour étudier le signe de $f(x) - x$, on introduit la fonction $g : x \in \left[1, \mathrm{e}^2\right] \longmapsto 4 + \dfrac{1}{4} \ln(x) - x$.
g est dérivable sur $\left[1, \mathrm{e}^2\right]$ et

$$\forall x \in \left[1, \mathrm{e}^2\right], \quad g'(x) = \frac{1}{4x} - 1 = \frac{1-4x}{4x}.$$

On en déduit que

x	1 \qquad e^2
$g'(x)$	$-$
$g(x)$	$3 \searrow \dfrac{9}{2}-\mathrm{e}^2$

g est continue sur $\left[1, \mathrm{e}^2\right]$, strictement décroissante sur cet intervalle. D'après le théorème de la bijection, g est une bijection de $\left[1, \mathrm{e}^2\right]$ sur $\left[\dfrac{9}{2}-\mathrm{e}^2, 3\right]$.

Or, $0 \in \left[\dfrac{9}{2}-\mathrm{e}^2, 3\right]$, donc l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution sur $\left[1, \mathrm{e}^2\right]$: f admet un unique point fixe sur $\left[1, \mathrm{e}^2\right]$ que l'on note L.

3. On procède par récurrence et pour tout $n \in \mathbf{N}$, on introduit la proposition $\mathscr{P}_n$: « $u_n \in \left[1, \mathrm{e}^2\right]$ ».
Par hypothèse, $u_0 = 4$, donc $\mathscr{P}_0$ est vraie.
On suppose $\mathscr{P}_n$ vraie, i.e. $u_n \in \left[1, \mathrm{e}^2\right]$. D'après la question 1, $\left[1, \mathrm{e}^2\right]$ est stable par f.
Par hypothèse de récurrence, $u_n \in \left[1, \mathrm{e}^4\right]$, donc $u_{n+1} = f(u_n) \in \left[1, \mathrm{e}^4\right]$.
On a montré que $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie. Par le principe de raisonnement par récurrence, on a montré que
$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_n \in \left[1, \mathrm{e}^2\right].$$
4. Une récurrence montre que l'on a
$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad 4 \leq u_n \leq L.$$
D'après la question 2, on a
$$\forall x \in [4, L], \quad f(x) \geq x.$$
Soit $n \in \mathbf{N}$. En prenant $x = u_n \in [4, \ell]$, on obtient
$$f(u_n) \geq u_n.$$
On en déduit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est croissante.
5. La suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est croissante, majorée par e^2 : elle converge.
6. On a établi à la question 1 :
$$\forall x \in \left[1, \mathrm{e}^2\right], \quad f'(x) = \frac{1}{4x}.$$
Or, en utilinsant la décroissante de la fonction inverse sur $\left[1, \mathrm{e}^2\right]$, on récupère
$$\forall x \in \mathbf{R}_+^*, \quad \left(x \in \left[1, \mathrm{e}^2\right]\right) \Longrightarrow \left(\frac{1}{\mathrm{e}^2} \leq f'(x) \leq \frac{1}{4}\right).$$
En composant cette dernière inégalité par la fonction valeur absolue, croissante sur $\mathbf{R}_+$, on en déduit que
$$\forall x \in \mathbf{R}_+^*, \quad \left(x \in \left[1, \mathrm{e}^2\right]\right) \Longrightarrow \left(0 \leq \left|f'(x)\right| \leq \frac{1}{4}\right).$$
7. f est continue sur $\left[1, \mathrm{e}^2\right]$ et $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers $\ell \in \left[1, \mathrm{e}^2\right]$. D'après le théorème de point fixe, on a $\ell = f(\ell)$. D'après l'inégalité des accroissements finis et la question 6, on a
$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad |u_{n+1} - \ell| = |f(u_n) - f(\ell)| \leq \frac{1}{4}|u_n - \ell|.$$
8. On procède par récurrence : pour tout $n \in \mathbf{N}$, on introduit la proposition $\mathscr{P}_n$: « $|u_n - \ell| \leq \left(\dfrac{1}{4}\right)^n |u_0 - \ell|$ ».
$\mathscr{P}_0$ est évidemment vraie.

On suppose $\mathscr{P}_n$ pour un certain entier naturel n. Par hypothèse de récurrence, on a donc

$$|u_n - \ell| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n |u_0 - \ell| \, .$$

En multipliant cette inégalité par $\dfrac{1}{4} > 0$, on récupère

$$\frac{1}{2} |u_n - \ell| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} |u_0 - \ell| \, .$$

En utilisant le résultat de la question 7, on en déduit que

$$|u_n - \ell| \leq \frac{1}{4} |u_n - \ell| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} |u_0 - \ell| \, .$$

On a montré que $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie. Par le principe de raisonnement par récurrence, on a montré que

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad |u_n - \ell| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n |u_0 - \ell| \, .$$