Correction de l'interrogation 1

Exercice 1.

1. • Soient (x_1, y_1, z_1) et (x_2, y_2, z_2) deux éléments de $\mathbf{K}^3$. Soit $\lambda \in \mathbf{K}$. On a :

$$\begin{aligned} u\left((x_1, y_1, z_1) + \lambda (x_2, y_2, z_2)\right) &= u\left(x_1 + \lambda x_2, y_1 + \lambda y_2, z_1 + \lambda z_2\right) \\ &= \left(x_1 + \lambda x_2 + y_1 + \lambda y_2, y_1 + \lambda y_2 + z_1 + \lambda z_2, x_1 + \lambda x_2 + z_1 + \lambda z_2\right) \\ &= \left(x_1 + y_1 + \lambda (x_2 + y_2), y_1 + z_1 + \lambda (y_2 + z_2), z_1 + x_1 + \lambda (z_2 + x_2)\right) \\ &= (x_1 + y_1, y_1 + z_1, z_1 + x_1) + \lambda (x_2 + y_2, y_2 + z_2, z_2 + x_2) \\ &= u(x_1, y_1, z_1) + \lambda u(x_2, y_2, z_2). \end{aligned}$$

u est bien linéaire.

• Soit $(x, y, z) \in \mathbf{K}^3$. On a :

$$\begin{aligned} (x, y, z) \in \operatorname{Ker}(u) &\iff (x + y, y + z, z + x) = (0, 0, 0) \\ &\iff x = y = z = 0. \end{aligned}$$

On en déduit que $\operatorname{Ker}(u) = \{0\}$.

• D'après le théorème du rang, on a : $\operatorname{rg}(u) = \dim\left(\mathbf{K}^3\right) - \dim(\operatorname{Ker}(u)) = 3$.
Or, $\operatorname{Im}(u) \subset \mathbf{K}^3$ et ces deux espaces vectoriels sont la même dimension, donc $\operatorname{Im}(u) = \mathbf{K}^3$.

2. (a) Les vecteurs $(1, 3)$ et $(2, 1)$ ne sont pas colinéaires, on en déduit que la famille $\mathscr{C}$ est libre.
$\mathscr{C}$ est libre, contient deux éléments dans $\mathbf{K}^2$ de dimension 2, $\mathscr{C}$ est une base de $\mathbf{K}^2$.

(b) Par définition, on a $\operatorname{Pass}(\mathscr{B} \to \mathscr{C}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

$\operatorname{Pass}(\mathscr{B} \to \mathscr{C})$ est inversible car c'est une matrice de passage et $\operatorname{Pass}(\mathscr{B} \to \mathscr{C})^{-1} = \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.

(c) On note X la matrice des coordonnées de $(1, 1)$ dans la base $\mathscr{B}$ et X' la matrice des coordonnées de $(1, 1)$ dans la base $\mathscr{C}$. On a :

$$X' = \operatorname{Pass}(\mathscr{C} \to \mathscr{B})\, X = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

3. On commence par donner des bases de F, G et H. Soit $P \in E$. On a :

$$\begin{aligned} P \in F &\iff P(0) = P(1) = 0 \\ &\iff X(X-1) \text{ divise } P \\ &\iff \exists R \in \mathbf{K}_0[X],\ P = X(X-1)R. \end{aligned}$$

On en déduit que $F = \operatorname{Vect}(X(X-1))$.
On montre de même que $G = \operatorname{Vect}((X-1)(X-2))$ et $H = \operatorname{Vect}((X-2)\ (X-3))$.
Soit $P \in E$. On procède par analyse/synthèse et on suppose qu'il existe $P_1 \in F$, $P_2 \in G$ et $P_3 \in H$ tels que $P = P_1 + P_2 + P_3$. Comme $P_1 \in F$ (resp. $P_2 \in G$, resp. $P_3 \in H$), il existe $a \in \mathbf{K}$ (resp. $b \in \mathbf{K}$, resp. $c \in \mathbf{K}$) tels que $P_1 = aX(X-1)$ (resp. $P_2 = b(X-1)(X-2)$, resp. $P_3 = c(X-2)(X-3)$). On a donc :

$$P = aX(X-1) + b(X-1)(X-2) + c(X-2)(X-3). \tag{1}$$

En évaluant la relation (1) en 0, 1 et 2, on a :

$$\begin{cases} 2b+6c & = P(0) \\ 2c & = P(1) \\ 2a & = P(2) \end{cases} \iff \begin{cases} a & = \frac{1}{2}P(2) \\ c & = \frac{1}{2}P(1) \\ b & = \frac{1}{2}\left(P(0)-3P(1)\right) \end{cases}.$$

Réciproquement, si l'on pose $P_1 = aX(X-1)$, $P_2 = b(X-1)(X-2)$ et $P_3 = c(X-2)(X-3)$ avec les valeurs de a, b et c trouvées ci-dessus, il est clair que $P_1 \in F$, $P_2 \in G$ et $P_3 \in H$. De plus, on a $P = P_1 + P_2 + P_3$.

On a montré que tout élément de E s'écrit comme la somme unique d'un élément de F, d'un élément de G et d'un élément de H, donc $E = F \oplus G \oplus H$.

Exercice 2.

1. Il est clair que u prend ses valeurs dans $\mathbf{K}_3[X]$. Soit $(P,Q) \in \mathbf{K}_3[X]^2$ et soit $\lambda \in \mathbf{K}$. On a :

$$\begin{aligned} u(P+\lambda Q) &= (P+\lambda Q)(X+1) \\ &= P(X+1) + \lambda Q(X+1) \\ &= u(P) + \lambda u(Q). \end{aligned}$$

u est linéaire, donc $u \in \mathscr{L}(\mathbf{K}_3[X])$.

2. On a :

$u(1) = 1,\ u(X) = X+1,\ u\left(X^2\right) = (X+1)^2 = X^2+2X+1$ et $u\left(X^3\right) = (X+1)^3 = X^3+3X^2+3X+1$.

On en déduit que la matrice de u dans la base canonique de $\mathbf{K}_3[X]$ est $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

La matrice M est inversible car triangulaire et les éléments sur la diagonale sont tous non nuls.

3. (a) Soit $P \in \mathbf{K}_3[X]$. On a :

$$(u \circ v)(P) = u(v(P)) = u(P(X-1)) = P(X-1+1) = P.$$

(b) Comme $v = u^{-1}$, la matrice de v dans la base canonique est M^{-1}. Or,

$v(1) = 1,\ v(X) = X-1,\ v\left(X^2\right) = (X-1)^2 = X^2-2X+1$ et $v\left(X^3\right) = (X-1)^3 = X^3-3X^2+3X-1$.

On en déduit que $M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 3.

1. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbf{R})$. On a :

$$\begin{aligned} M \in \operatorname{Ker}(f) &\iff AM = 0 \\ &\iff \begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ 2a+4c & 2b+4d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} a+2c & = 0 \\ b+2d & = 0 \\ 2a+4c & = 0 \\ 2b+4d & = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} a & = -2c \\ b & = -2d \end{cases} \\ &\iff M = \begin{pmatrix} -2c & -2d \\ c & d \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On en déduit que $\operatorname{Ker}(f) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & -2\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)$.

Comme les vecteurs $\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}0 & -2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires, on en déduit que la famille $\left(\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & -2\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)$ forme une base de $\operatorname{Ker}(f)$.

2. La question précédente assure que $\dim(\operatorname{Ker}(f)) = 2$.
   Le théorème du rang assure que $\operatorname{rg}(u) = \dim(\mathscr{M}_2(\mathbf{R})) - \dim(\operatorname{Ker}(f)) = 2 < 4$, donc f n'est pas surjective.
3. On a :

$$\begin{aligned}
\operatorname{Im}(f) &= \operatorname{Vect}\left(f\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, f\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}, f\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}, f\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)\\
&= \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 2\\ 0 & 4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2 & 0\\ 4 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 2\\ 0 & 4\end{pmatrix}\right)\\
&= \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 2\\ 0 & 4\end{pmatrix}\right).
\end{aligned}$$

   Comme $\operatorname{rg}(f) = 2$ et les vecteurs $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 0\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}0 & 2\\ 0 & 4\end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires, on en déduit que la famille $\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 2\\ 0 & 4\end{pmatrix}\right)$ est une base de $\operatorname{Im}(f)$.
4.
   - Déjà, par le théorème du rang, $\dim(\operatorname{Ker}(f)) + \dim(\operatorname{Im}(f)) = \dim(\mathscr{M}_2(\mathbf{R}))$.
   - Soit $M = \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix} \in \operatorname{Ker}(f) \cap \operatorname{Im}(f)$.

     Comme $M \in \operatorname{Ker}(f)$, il existe deux réels a et b tels que $M = a\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}0 & -2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

     De même, comme $M \in \operatorname{Im}(f)$, il existe deux réels c et d tels que $M = c\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 0\end{pmatrix} + d\begin{pmatrix}0 & 2\\ 0 & 4\end{pmatrix}$.

     Il s'ensuit que l'on a :

$$\begin{cases} -2a &= c\\ a &= 2c\\ -2b &= 2d\\ b &= 4d \end{cases} \iff a = b = c = d = 0.$$

     On en déduit que $M = 0$, soit $\operatorname{Ker}(f) \cap \operatorname{Im}(f) \subset \{0\}$. L'inclusion réciproque étant claire, on a : $\operatorname{Ker}(f) \cap \operatorname{Im}(f) = \{0\}$

   On a montré que $\mathscr{M}_2(\mathbf{R}) = \operatorname{Ker}(f) \oplus \operatorname{Im}(f)$.