Correction de l'interrogation 2

Exercice 1.

1. Soit $f : t \longmapsto \dfrac{t}{t^4-1}$. f est continue sur $]1,+\infty[$ et est à valeurs positives. On étudie la convergence des intégrales $\displaystyle\int_1^2 \frac{t}{t^4-1}\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{t}{t^4-1}\mathrm{d}t$.

   - Convergence de $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{t}{t^4-1}\mathrm{d}t$.

     Comme $f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^3}$ et l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^3}\mathrm{d}t$ converge (intégrale de Riemann avec $\alpha = 3 > 1$), par comparaison par équivalence des intégrales des fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{t}{t^4-1}\mathrm{d}t$ converge.

   - Divergence de $\displaystyle\int_1^2 \frac{t}{t^4-1}\mathrm{d}t$.

     On remarque que $t^4-1 = \left(t^2-1\right)\left(t^2+1\right) = (t-1)(t+1)\left(t^2+1\right)$, donc $f(t) \underset{t\to1}{\sim} \dfrac{1}{4(t-1)}$.
     Comme l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t-1}\mathrm{d}t$ diverge (intégrale de Riemann avec $\alpha = 1$), on en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_1^2 \frac{t}{t^4-1}\mathrm{d}t$ diverge.

   On a montré que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{t}{t^4-1}\mathrm{d}t$ diverge.

2. Soit la fonction f définie sur $]0,1[$ par $f(t) = \dfrac{1}{\sqrt{t(1-t)}}$. On remarque que f est continue sur $]0,1[$ et à valeurs positives. On étudie la convergence des intégrales $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}}\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_{1/2}^1 \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}}\mathrm{d}t$.

   - Convergence de $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}}\mathrm{d}t$.

     Comme $f(t) \underset{t\to0}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ et comme l'intégrale $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$ (intégrale de Riemann avec $\alpha = \dfrac{1}{2} < 1$) converge, par comparaison par équivalence des intégrales de fonctions positives, on en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{1/2} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

   - Convergence de $\displaystyle\int_{1/2}^1 \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}}\mathrm{d}t$.

     Comme $f(t) \underset{t\to1}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{1-t}}$ et comme l'intégrale $\displaystyle\int_{1/2}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t}}\mathrm{d}t$ (intégralde de Riemann avec $\alpha = \dfrac{1}{2} < 1$) converge, par comparaison par équivalence des intégrales de fonctions positives, on en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_{1/2}^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

   On en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

3. Soit f définie sur $]0,1[$ par $f(t)=\dfrac{t-1}{\ln(t)}$. f est continue sur $]0,1[$ et à valeurs négatives.

   On est dans le cadre d'un intervalle ouvert, on choisit un point de $]0,1[$, par exemple $1/2$.

   On étudie la convergence de $\displaystyle\int_0^{1/2}\frac{t-1}{\ln(t)}\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_{1/2}^{1}\frac{t-1}{\ln(t)}\mathrm{d}t$.

   - Convergence de $\displaystyle\int_0^{1/2}\frac{t-1}{\ln(t)}\mathrm{d}t$.

     Comme $\lim\limits_{t\to 0}\ln(t)=-\infty$ et $\lim\limits_{t\to 0}t-1=-1$, donc $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t-1}{\ln(t)}=0$. Ainsi f est prolongeable par continuité en 0 et l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}}f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

   - Convergence de $\displaystyle\int_{1/2}^{1}\frac{t-1}{\ln(t)}\mathrm{d}t$.

     Comme $\lim\limits_{t\to 1}\dfrac{\ln(t)}{t-1}=1$ (c'est un taux d'accroissement), donc $\lim\limits_{t\to 1}\dfrac{t-1}{\ln(t)}=1$. f est prolongeable par continuité en 1 et l'intégrale $\displaystyle\int_{1/2}^{1}f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

4. On pose $f:t\longmapsto\dfrac{\cos(t)}{t^2}$. f est continue sur $]0,+\infty[$. On est dans le cadre d'un intervalle ouvert, on choisit un point de $]0,+\infty[$, par exemple 1. On étudie la convergence des intégrales $\displaystyle\int_0^1\frac{\cos(t)}{t^2}\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\cos(t)}{t^2}\mathrm{d}t$.

   - Convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\cos(t)}{t^2}\mathrm{d}t$.

     Pour tout $t\in[1,+\infty[$, on a $\left|\dfrac{\cos(t)}{t^2}\right|\leq\dfrac{1}{t^2}$. Comme l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$ converge, par comparaison par ingalités des intégrales de fonctions positives, on en déduit que l'intgrale $\displaystyle\int_1^{+\infty}\left|\frac{\cos(t)}{t^2}\right|\mathrm{d}t$ converge et donc l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\cos(t)}{t^2}\mathrm{d}t$ converge.

   - Divergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1\frac{\cos(t)}{t^2}\mathrm{d}t$.

     Comme $f(t)\underset{t\to 0}{\sim}\dfrac{1}{t^2}$ et comme l'intégrale $\displaystyle\int_0^1\frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$ diverge, par comparaison par équivalence des intégrales des fonctions positives, on en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge.

   On a montré que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge.

Exercice 2.

1. - Convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{t^2+2t+2}\mathrm{d}t$.

     Soit $g:t\longmapsto\dfrac{1}{t^2+2t+2}$. g est continue sur $\mathbf{R}$ car le dénominateur ne s'annule pas ($\Delta=-4<0$), donc à valeurs positives.
     On a aussi $g(t)\underset{t\to\pm\infty}{\sim}\dfrac{1}{t^2}$. Comme les intégrales $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1}\frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$ convergent, par comparaison par équivalence des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}g(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

- Calcul de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t^2+2t+2}\mathrm{d}t$.

  Soit $A \geq 0$, on remarque que $t^2+2t+2 = (t+1)^2+1$ d'où :

$$\int_{-A}^{A} \frac{1}{t^2+2t+2}\mathrm{d}t = \int_{-A}^{A} \frac{1}{(t+1)^2+1}\mathrm{d}t.$$

  On fait le changement de variable $u = t+1$ dans la dernière intégrale, ainsi

$$\int_{-A}^{A} \frac{1}{t^2+2t+2}\mathrm{d}t = \int_{-A+1}^{A+1} \frac{1}{u^2+1}\mathrm{d}u = \mathrm{Arctan}\,(A+1) - \mathrm{Arctan}\,(-A+1)\,.$$

  Comme $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} \mathrm{Arctan}\,(A+1) = \frac{\pi}{2}$ et $\displaystyle\lim_{A\to-\infty} \mathrm{Arctan}\,(-A+1) = -\frac{\pi}{2}$, donc :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t^2+2t+2}\mathrm{d}t = \pi.$$

2. - Convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{\mathrm{e}^{-t}+\mathrm{e}^{t}}\mathrm{d}t$.

     On pose $h : t \longmapsto \dfrac{1}{\mathrm{e}^{t}+\mathrm{e}^{-t}}$. h est continue sur l'intervalle $[0,+\infty[$ et à valeurs positives.

     Comme $h(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\mathrm{e}^{t}} \underset{t\to+\infty}{\sim} e^{-t}$ et que l'intégrale $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$ converge, par comparaison par équivalence des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} h(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

   - Calcul de l'intégrale $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{\mathrm{e}^{-t}+\mathrm{e}^{t}}\mathrm{d}t$.

     Soit $A \geq 0$, on suit l'indication et on fait le changement de variable $u = \mathrm{e}^{t}$ (qui est $\mathscr{C}^1$ et bijectif de $[0,+\infty[$ sur $[1,+\infty[$) dans l'intégrale $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{\mathrm{e}^{-t}+\mathrm{e}^{t}}\mathrm{d}t$. On a donc :

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{\mathrm{e}^{-t}+\mathrm{e}^{t}}\mathrm{d}t = \int_{1}^{+\infty} \frac{1}{u+\dfrac{1}{u}} \times \frac{1}{u}\mathrm{d}u = \int_{1}^{+\infty} \frac{1}{u^2+1}\mathrm{d}u.$$

     Comme $\displaystyle\int_{1}^{X} \frac{1}{u^2+1}\mathrm{d}u = [\mathrm{Arctan}\,(u)]_1^X = \mathrm{Arctan}\,(X) - \frac{\pi}{4} \underset{X\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{4}$, il vient que :

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{\mathrm{e}^{-t}+\mathrm{e}^{t}}\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4}.$$