Devoir maison numéro 1

À rendre pour jeudi 10 septembre

Exercice 1.

Soit $f : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ définie par

$$\forall (x, y, z) \in \mathbf{R}^3, \quad f(x, y, z) = (2x - y - z, -2x + y - 2z, -x - y + 2z).$$

On note $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbf{R}^3$.

1. Vérifier que f est un endomorphisme de $\mathbf{R}^3$.
2. Écrire la matrice A de f dans la base $\mathscr{B}$.
3. Montrer que $f^2 - 2f - 3\mathrm{id}_{\mathbf{R}^3} = 0$.
   Indication : On rappelle que $f^2 = f \circ f$ et pour tout $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$, $\mathrm{id}_{\mathbf{R}^3}(x, y, z) = (x, y, z)$.
4. Déterminer une base du sous-espace vectoriel $G = \mathrm{Ker}\,(f - 3\mathrm{id}_{\mathbf{R}^3})$. Quelle est sa dimension ?
5. Déterminer une base du sous-espace vectoriel $H = \mathrm{Ker}\,(f + \mathrm{id}_{\mathbf{R}^3})$. Quelle est sa dimension ?
6. Montrer que G et H sont supplémentaires dans $\mathbf{R}^3$.
7. Donner une base $\mathscr{C} = (u_1, u_2, u_3)$ adaptée à la somme directe $G \oplus H = \mathbf{R}^3$.
8. Écrire la matrice D de f dans la base $\mathscr{C}$.
9. Écrire la relation de passage qui lie les matrices A et D.
10. (Pour 5/2). Justifier que f est diagonalisable. Pourquoi pouvait-on l'affirmer dès la question 5 ?
11. En utilisant la matrice D, montrer que

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad f^n = \left(\frac{3^n + 3 \times (-1)^n}{4}\right) \mathrm{id}_{\mathbf{R}^3} + \left(\frac{3^n + (-1)^{n+1}}{4}\right) f.$$

   Indication : On rappelle que $f^0 = \mathrm{id}_{\mathbf{R}^3}$ et $f^n = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ termes}}$

Exercice 2.

Soit $F = \mathscr{C}^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R})$. Soient f_1, f_2 et f_3 les fonctions définies sur $\mathbf{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad f_1(x) = \mathrm{e}^{-x}, \quad f_2(x) = x\mathrm{e}^{-x} \quad \text{et} \quad f_3(x) = x^2\mathrm{e}^{-x}.$$

1. Soit E le sous-espace vectoriel de F engendré par les fonctions f_1, f_2 et f_3. Quelle est sa dimension ?
2. Pour $f \in F$, on définit $u(f) = f'$.
   (a) Montrer que u est un endomorphisme de E.
   (b) Donner la matrice A de u relativement à la base (f_1, f_2, f_3).
   (c) Si $f = a_0 f_1 + b_0 f_2 + c_0 f_3$ et $u(f) = a_1 f_1 + b_1 f_2 + c_1 f_3$. Comment exprimer a_1, b_1, c_1 à l'aide de a_0, b_0 et c_0 ?
   (d) Si $f = a_0 f_1 + b_0 f_2 + c_0 f_3$ et $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$, comment peut-on calculer $f^{(n)}$ à l'aide de A ?
3. On note $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(a) Calculer B^n pour $n \in \mathbf{N}$.

(b) Exprimer A à l'aide de B et de I_3. En déduire une expression de A^n en fonction de n, I_3, B et B^2.

4. Soit g définie pour tout réel x par $g(x) = \left(3 - 2x + 8x^2\right) \mathrm{e}^{-x}$. Calculer $g^{(n)}$.
5. Pour $f \in E$, on pose $v(f) = f + f'$.

(a) Montrer que v est un endomorphisme de E dont on déterminera la matrice dans la base (f_1, f_2, f_3).

(b) Déterminer une base de $\mathrm{Im}(v)$ et une base de $\mathrm{Ker}(v)$.