Devoir maison numéro 2, sujet B

À rendre pour jeudi 17 septembre

Exercice 1.

Les questions sont indépendantes les unes des autres.

1. Montrer que l'ensemble $F = \left\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3,\ x - y + 2z = 0\right\}$ est un espace vectoriel.
2. Montrer que $u : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ définie par $u(x, y, z) = (x + y + z, x + y + z, x + y + z)$ est linéaire. Préciser son noyau et son image.
3. Montrer que $u : \mathbf{R}_2[X] \longrightarrow \mathbf{R}^2$ définie par $u(P) = (P(0), P'(0))$ est linéaire. Préciser son noyau et son image.
4. On note $\mathscr{B} = (e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathbf{R}^2$. Montrer que la famille $\mathscr{C} = (2e_1 - e_2, -e_1 + 3e_2)$ est une base de $\mathbf{R}^2$. Préciser la matrice $\mathrm{Pass}(\mathscr{B} \to \mathscr{C})$, ainsi que son inverse.
5. Soit g l'application de $\mathbf{R}_2[X]$ définie par $g(P) = \left(X^2 - 1\right) P' - (2X + 1) P$.
   (a) Montrer que g est un endomorphisme de $\mathbf{R}_2[X]$.
   (b) Écrire la matrice de g dans la base canonique de $\mathbf{R}_2[X]$.
   (c) Déterminer le rang de g. Qu'en déduit-on ?
6. On pose $E = \mathscr{C}^0([0,1], \mathbf{R})$. Soient $F = \left\{ f \in \mathscr{C}^0([0,1], \mathbf{R}),\ \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0 \right\}$ et G est l'ensemble des fonctions constantes sur $[0, 1]$.
   Montrer que $E = F \oplus G$.

Exercice 2.

On considère F et G les sous ensemble de $E = \mathbf{R}^3$ suivants :

$$F = \left\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3,\ y = z\right\} \quad \text{et} \quad G = \left\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3,\ x = y, z = 2y\right\}.$$

1. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^3$.
2. (a) Donner une base de F.
   (b) Donner une base de G.
   (c) Montrer que $E = F \oplus G$.
3. Soit q l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ défini par $q(x, y, z) = (x + y - z, y, y)$.
   (a) Montrer que q est un projecteur de E, i.e. montrer que pour tout $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$, $q^2(x, y, z) = q(x, y, z)$.
   Indication : On rappelle que $q^2 = q \circ q$.
   (b) Donner une base de $\mathrm{Ker}(q)$.
   (c) Vérifier que $\mathrm{Ker}(q)$ et G sont en somme directe.
   (d) Montrer que $\mathrm{Im}(q) = F$.

Exercice 3.

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Soit $u : \mathscr{M}_2(\mathbf{R}) \longrightarrow \mathscr{M}_2(\mathbf{R})$ définie par $u(M) = AM - MA$.

1. Vérifier que u est linéaire.

2. Déterminer le noyau de u.
3. Préciser le rang de u. En déduire $\mathrm{Im}\,(u)$.
4. En déduire l'ensemble des matrices qui commutent avec la matrice A.

Exercice 4.

Soit u l'endomorphisme de $\mathbf{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique $\mathscr{B}$ est $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Soit la famille $\mathscr{C} = (e_1 + e_2, e_1 - e_2)$.

1. Montrer que $\mathscr{C}$ est une base de $\mathbf{R}^2$.
2. Donner la matrice A' de u dans la base $\mathscr{C}$.
3. Écrire la relation de passage qui lie A et A'.
4. En déduire A^n pour $n \in \mathbf{N}$.

Exercice 5.

On note $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathbf{R}_2\,[X]$.
Soient les polynômes :

$$P_1\,(X) = \frac{1}{8}\,(X-3)\,(X-5)\,,\ P_2\,(X) = -\frac{1}{4}\,(X-1)\,(X-5)\ \text{ et } P_3\,(X) = \frac{1}{8}\,(X-1)\,(X-3)\,.$$

1. Calculer $P_1\,(1)$, $P_1\,(3)$, $P_1\,(5)$, $P_2\,(1)$, $P_2\,(3)$, $P_2\,(5)$, $P_3\,(1)$, $P_3\,(3)$ et $P_3\,(5)$.
2. Montrer que la famille $\mathscr{C} = (P_1, P_2, P_3)$ est une base de $\mathbf{R}_2\,[X]$.
3. Déterminer les coordonnées de $X^2 + X + 1$ dans la base $\mathscr{C}$.
4. (a) Déterminer la matrice de passage $\mathrm{Pass}\,(\mathscr{B} \to \mathscr{C})$.
   (b) Retrouver les coordonnées du polynôme $X^2 + X + 1$ dans la base $\mathscr{C}$.

Exercice 6.

Soit $u \in \mathscr{L}\left(\mathbf{R}^3\right)$ dont la matrice dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -4 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer une base (e_1) de $\mathrm{Ker}\,(u - 2\mathrm{id}_{\mathbf{R}^3})$.
2. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}\left(u^2\right)$.
3. Montrer que $\mathrm{Ker}\,(u) \subset \mathrm{Ker}\left(u^2\right)$ et donner une base de $\mathrm{Ker}\,(u)$.
4. Donner un élément de e_2 dans $\mathrm{Ker}\left(u^2\right) \backslash \mathrm{Ker}\,(u)$.
5. Justifier que la famille $\mathscr{B} = (e_1, u\,(e_2)\,, e_2)$ est une base de $\mathbf{R}^3$ et préciser la matrice de u dans la base $\mathscr{B}$.