Devoir maison numéro 2, sujet A

À rendre pour jeudi 17 septembre

Exercice 1.

On note $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathbf{R}_2[X]$.
Soient les polynômes :

$$P_1(X) = \frac{1}{8}(X-3)(X-5), \quad P_2(X) = -\frac{1}{4}(X-1)(X-5) \text{ et } P_3(X) = \frac{1}{8}(X-1)(X-3).$$

1. Calculer $P_1(1)$, $P_1(3)$, $P_1(5)$, $P_2(1)$, $P_2(3)$, $P_2(5)$, $P_3(1)$, $P_3(3)$ et $P_3(5)$.
2. Montrer que la famille $\mathscr{C} = (P_1, P_2, P_3)$ est une base de $\mathbf{R}_2[X]$.
3. Déterminer les coordonnées de $X^2 + X + 1$ dans la base $\mathscr{C}$.
4. (a) Déterminer la matrice de passage $\operatorname{Pass}(\mathscr{B} \to \mathscr{C})$.
   (b) Retrouver les coordonnées du polynôme $X^2 + X + 1$ dans la base $\mathscr{C}$.

Problème

Dans tout le problème, E est un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension $n \geq 2$.

- On note id_E l'application identité de E.
- Soient f et g deux endomorphismes de E, on note $f \circ g$ la composée de f et g. On convient que $f^0 = \mathrm{id}_E$, $f^1 = f$ et pour tout $k \geq 2$, $f^k = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{k \text{ termes}}$.
- Soit f un endomorphisme de E. On dit que f est cyclique si, et seulement s'il existe un vecteur $a \in E$ tel que la famille $\left(a, f(a), \ldots, f^{n-1}(a)\right)$ est une base de E.
  Par exemple, si $n = 2$, dire que f est cyclique revient à dire qu'il existe $a \in E$ tel que la famille $(a, f(a))$ est une base de E.
  Par exemple, si $n = 3$, dire que f est cyclique revient à dire qu'il existe $a \in E$ tel que la famille $\left(a, f(a), f^2(a)\right)$ est une base de E.
- Pour tout $P \in \mathbf{R}[X]$, on note $\deg(P)$ le degré de P.

La première partie du problème est consacré à l'étude d'exemples.
La seconde partie, totalement indépendante de la première, propose l'étude d'un endomorphisme de $\mathbf{R}_{n-1}[X]$.

Partie 1 : Étude d'exemples

1. Dans cette question 1, on suppose que $E = \mathbf{R}^2$. On note u l'endomorphisme de $\mathbf{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique $\mathscr{B}$ est $A = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.
   (a) On pose $a = (2, 3)$. Calculer $u(a)$ et montrer que u est cyclique.
   (b) Déterminer le vecteur $u^2(a)$, puis déterminer deux réels x et y tels que $u^2(a) = xa + yu(a)$.
   (c) Déterminer la matrice A' de u dans la base $\mathscr{B}' = (a, u(a))$.
   (d) Écrire la relation de passage entre les matrices A et A'.
   (e) Donner un vecteur non nul b tel que la famille $(b, u(b))$ ne soit pas une base de $\mathbf{R}^2$. On donnera les coordonnées de b dans la base canonique.
2. Dans cette question 2, on suppose que $E = \mathbf{R}^3$. On note v l'endomorphisme de $\mathbf{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique est $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -6 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.
   (a) Montrer que la matrice B est inversible. En déduire que v est un automorphisme.
   (b) Donner une base (e_1, e_2) de $\operatorname{Ker}(v - 2\mathrm{id}_{\mathbf{R}^3})$.
   (c) Donner une base (e_3) de $\operatorname{Ker}(v - \mathrm{id}_{\mathbf{R}^3})$.
   (d) Justifier que la famille (e_1, e_2, e_3) est une base de E et donner la matrice de v dans cette base.
   (e) (Pour 5/2) Justifier que v est diagonalisable.
   (f) Montrer que $v^2 - 3v + 2\mathrm{id}_{\mathbf{R}^3} = 0$ où 0 désigne l'endomorphisme nul.
   (g) En déduire que v n'est pas cyclique.
3. Dans cette question 3, on suppose que $E = \mathbf{R}_{n-1}[X]$ où n est un entier naturel supérieur ou égal à 2. On note d l'endomorphisme de $\mathbf{R}_{n-1}[X]$ qui, à tout polynôme P de $\mathbf{R}_{n-1}[X]$, associe le polynôme P'. On admet que d est bien un endomorphisme de $\mathbf{R}_{n-1}[X]$. On a, par exemple, $d\left(X^2 - 3X + 1\right) = 2X - 3$.
   (a) Déterminer $d\left(X^{n-1}\right)$ et plus généralement $d^k\left(X^{n-1}\right)$ pour tout entier k compris entre 1 et $n-1$. On effectuera un raisonnement par récurrence sur k.
   (b) En déduire que d est cyclique.

Partie 2 : Étude d'un endomorphisme de $\mathbf{R}_{n-1}[X]$

Dans cette partie, on se donne un entier naturel n supérieur ou égal à 2.

On considère l'endomorphisme Δ de $\mathbf{R}_{n-1}[X]$ qui à tout polynôme P de $\mathbf{R}_{n-1}[X]$ associe le polynôme Q défini par : $Q(X) = P(X+1) - P(X)$.

On admet que Δ est bien un endomorphisme de $\mathbf{R}_{n-1}[X]$.

On a donc, par exemple, $\Delta\left(X^2 - 3X + 1\right) = (X+1)^2 - 3(X+1) + 1 - \left(X^2 - 3X + 1\right)$.

1. Soit $(Q_0, Q_1, \ldots, Q_{n-1})$ une famille de polynômes de $\mathbf{R}_{n-1}[X]$ telle que pour tout entier i compris entre 1 et $n-1$, $\deg(Q_i) = i$.
   Montrer que la famille $(Q_0, Q_1, \ldots, Q_{n-1})$ est une base de $\mathbf{R}_{n-1}[X]$.
2. Dans cette question, on montre que Δ est cyclique.
   (a) Soit k un entier naturel compris entre 1 et $n-1$. En utilisant la formule du binôme de Newton, montrer que le polynôme $\Delta\left(X^k\right)$ est de degré $k-1$.
   (b) Soit maintenant un polynôme quelconque de $\mathbf{R}_{n-1}[X]$, le polynôme P supposé de degré supérieur ou égal à 1.
   En utilisant le résultat de la question précédente, montrer que $\deg(\Delta(P)) = \deg(P) - 1$.
   (c) Montrer enfin que Δ est cyclique en considérant la famille $\left(X^{n-1}, \Delta\left(X^{n-1}\right), \Delta^2\left(X^{n-1}\right), \ldots, \Delta^{n-1}\left(X^{n-1}\right)\right)$.

3. Dans cette question, on détermine le noyau et l'image de Δ.
   (a) En utilisant la question 2 (b) de la partie 2, montrer que le noyau de Δ est constitué de l'ensemble des polynômes constants.
   (b) Montrer que l'image de l'endomorphisme Δ est contenue dans $\mathbf{R}_{n-2}[X]$.
   (c) En utilisant le théorème du rang, montrer que $\mathrm{Im}(\Delta) = \mathbf{R}_{n-2}[X]$.
4. Dans cette question, on introduit une famille de polynômes $P_0, \ldots, P_{n-1}$ qui va permettre de démontrer d'une autre manière que Δ est cyclique.
   On définit les polynômes $P_0, P_1, \ldots, P_{n-1}$ de $\mathbf{R}_{n-1}[X]$ en posant :

   $$P_0(X) = 1,\ P_1(X) = \frac{1}{1!}X,\ P_2(X) = \frac{1}{2!}X(X-1), \ldots, P_{n-1}(X) = \frac{1}{(n-1)!}X(X-1)(X-2)\cdots(X-n+2).$$

   On a donc, pour tout entier j compris entre 1 et $n-1$, $P_j(X) = \dfrac{1}{j!}\displaystyle\prod_{k=0}^{j-1}(X-k)$.
   (a) Montrer que la famille $(P_0, P_1, \ldots, P_{n-1})$ est une base de $\mathbf{R}_{n-1}[X]$.
   (b) Dans cette question et uniquement dans cette question, on suppose que $n = 4$. Déterminer les coordonnées du polynôme $X^3 - 5X^2 + X - 3$ dans la base (P_0, P_1, P_2, P_3) de $\mathbf{R}_3[X]$.
   Indication : On pourra remarquer que 0 est racine de P_1, P_2 et P_3, puis que 1 est racine de P_2 et P_3, etc.
   (c) Soient i et j deux entiers naturels tels que : $i \neq 0$ et $1 \leq j \leq n-1$. Montrer que $\Delta(P_j) = P_{j-1}$, puis déterminer $\Delta^i(P_j)$ en distinguant les cas $i \leq j$ et $i > j$.
   On donnera le résultat sans avoir besoin de le justifier.
   (d) En déduire une autre démonstration du fait que Δ est cyclique.