# Devoir maison numéro 3
## À rendre pour lundi 28 septembre

**Exercice 1.**

Soit, pour $n \in \mathbf{N}$, $W_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^n(t)\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$,
$$(n+2)\,W_{n+2} = (n+1)\,W_n.$$
2. En déduire que pour tout $n \in \mathbf{N}$,
$$W_{2n} = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \times \frac{\pi}{2}.$$
3. Montrer que la suite $\left((n+1)\,W_n W_{n+1}\right)_{n\in\mathbf{N}}$ est constante. Calculer cette constante.
4. En déduire $W_{2n+1}$.
5. En déduire que $W_n > 0$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.
6. Montrer que la suite $(W_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est décroissante.
7. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{W_{n+1}}{W_n} = 1$.
8. Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} W_n = 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

**Exercice 2.**

Soient $a$ et $b$ deux réels strictement positifs tels que $0 < a < b$.

1. Justifier la convergence de $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-at} - \mathrm{e}^{-bt}}{t}\mathrm{d}t$.
2. Soit $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ avec $0 < x < y$. Montrer que :
$$\int_x^y \frac{\mathrm{e}^{-at} - \mathrm{e}^{-bt}}{t}\mathrm{d}t = \int_{ax}^{bx} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\mathrm{d}t - \int_{ay}^{by} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\mathrm{d}t.$$
3. Montrer que pour tout réel $z > 0$, on a :
$$\mathrm{e}^{-bz}\left(\ln(b) - \ln(a)\right) \leq \int_{az}^{bz} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\mathrm{d}t \leq \mathrm{e}^{-az}\left(\ln(b) - \ln(a)\right).$$
4. En déduire que $I = \ln(b) - \ln(a)$.

**Exercice 3.**

Le but de cet exercice est de montrer la convergence et calculer $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$. On introduit les fonctions $f$ et $g$ par :
$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad f(x) = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-x\left(1+t^2\right)}}{1+t^2}\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad g(x) = \left(\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t\right)^2.$$

1. Justifier la convergence de $I$.

2. Justifier l'existence de $f(x)$ et $g(x)$ pour tout réel $x$.
3. (a) Montrer que :
$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad \mathrm{e}^x = 1 + x + \int_0^x \mathrm{e}^t (x-t)\,\mathrm{d}t.$$
   (b) En déduire que :
$$\forall x \in [-2,2], \quad |\mathrm{e}^x - 1 - x| \leq \frac{\mathrm{e}^2}{2}x^2.$$
   (c) Montrer que pour tout $t \in [0,1]$ et tout $h \in [-1,1]$,
$$\left|\mathrm{e}^{-\left(1+t^2\right)h} - 1 + \left(1+t^2\right)h\right| \leq 2\mathrm{e}^2 h^2.$$
   (d) En déduire que pour tout $h \in [-1,1]$
$$\left|\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-(x+h)\left(1+t^2\right)}}{1+t^2}\mathrm{d}t - \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-x\left(1+t^2\right)}}{1+t^2}\mathrm{d}t + h\int_0^1 \mathrm{e}^{-x\left(1+t^2\right)}\mathrm{d}t\right| \leq 2\mathrm{e}^2h^2 \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-x\left(1+t^2\right)}}{1+t^2}\mathrm{d}t.$$
   (e) En utilisant le taux d'accroissement, montrer que $f$ est dérivable sur $\mathbf{R}$ et montrer que
$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad f'(x) = -\int_0^1 \mathrm{e}^{-x\left(1+t^2\right)}\mathrm{d}t.$$
4. Soit la fonction $h$ définie sur $\mathbf{R}$ par :
$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad h(x) = f\left(x^2\right) + g(x).$$
   Montrer que $h$ est constante sur $\mathbf{R}$ et préciser la valeur de cette constante.
5. Montrer que pour tout $t \in [0,1]$, $\dfrac{\mathrm{e}^{-x\left(1+t^2\right)}}{1+t^2} \leq \mathrm{e}^{-x}$. En déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
6. En déduire que $I = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

**Exercice 4.**

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par $u_0 = 4$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = 4 + \dfrac{1}{4}\ln(u_n)$. Soit la fonction $f$ définie par $f(x) = 4 + \dfrac{1}{4}\ln(x)$.

1. Préciser l'ensemble de définition de $f$ et étudier les variations de $f$. Montrer que l'intervalle $\left[1, \mathrm{e}^2\right]$ est stable par $f$.
2. Étudier le signe de $f(x) - x$ sur $\left[1, \mathrm{e}^2\right]$. En déduire que $f$ possède un unique point fixe dans cet intervalle.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n$ existe et $u_n \in \left[1, \mathrm{e}^2\right]$.
4. Préciser la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$.
5. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers une limite $\ell$ à préciser.
6. Montrer que
$$\forall x \in \left[1, \mathrm{e}^2\right], \quad \left|f'(x)\right| \leq \frac{1}{4}.$$
7. En utilisant l'inégalité des accroissements finis, montrer que
$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad |u_{n+1} - \ell| \leq \frac{1}{4}|u_n - \ell|.$$
8. En déduire que
$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad |u_n - \ell| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n |u_0 - \ell|.$$