Devoir maison numéro 4

À rendre pour jeudi 8 octobre

Exercice 1.

Soit $a \in \mathbf{R}$ et $n \geq 2$ un entier. On note A_n la matrice de taille $n \times n$ définie par :

$$A_n = \begin{pmatrix} a & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ a & a & \ddots & \vdots & 1 \\ \vdots & & \ddots & 1 & \vdots \\ a & & & a & 1 \\ a & a & \cdots & \cdots & a \end{pmatrix}.$$

On note $D_n = \det(A_n)$.

1. Calculer D_2 et D_3.
2. Soit $n \geq 3$ un entier. Donner une relation de récurrence entre D_n et D_{n-1}.
3. En déduire une expression explicite de D_n pour $n \geq 2$.

Exercice 2.

Soit $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ des éléments de $\mathbf{K}$. On définit la matrice de Vandermonde des éléments $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, notée $V(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, par

$$V(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Soit P définie par $P(\lambda) = \det(V(\lambda, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \\ \lambda^2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix}$.

1. Justifier que P est une fonction polynomiale de degré au plus $n-1$ (en λ) et préciser le coefficient devant λ^{n-1}.
2. Justifier que $\lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sont des racines de P. En déduire que
$$P(\lambda) = \det(V(\lambda_2, \ldots, \lambda_n)) \prod_{i=2}^{n-1} (\lambda - \lambda_i).$$
3. En évaluant la relation précédente en λ_1, montrer que
$$\det(V(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)) = \det(V(\lambda_2, \ldots, \lambda_n)) \prod_{i=2}^{n} (\lambda_1 - \lambda_i).$$

4. En procédant par récurrence, montrer que
$$\det\left(V\left(\lambda_1,\ldots,\lambda_n\right)\right)=\prod_{1\leq i<j\leq n}\left(\lambda_j-\lambda_i\right).$$
5. À quelle condition nécéssaire et suffisante portant sur $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$, la matrice $V\left(\lambda_1,\ldots,\lambda_n\right)$ est-elle inversible ?

Exercice 3.

Soit $A\in\mathscr{M}_n\left(\mathbf{K}\right)$ dont les coefficients sont dans $\{-1,1\}$.

1. Montrer que $\det\left(A\right)\in\mathbf{Z}$.
2. Montrer que 2^{n-1} divise $\det\left(A\right)$.