Chapitre 2 : Intégration sur un intervalle quelconque

Table des matières

Dans tout le chapitre, $\mathbf{K}$ est le corps $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.

1 Intégrale d'une fonction continue sur un intervalle

1.1 Intervalle semi-ouvert à droite

Soit $f : [a, b[\longrightarrow \mathbf{K}$ une fonction continue avec $a < b \leq +\infty$.

Définition 1. *Convergence de l'intégrale sur $[a, b[$.*

*On dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ **converge** si la fonction $x \in [a, b[\longmapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ admet une limite finie lorsque x tend vers b^-. Dans ce cas, on note*

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x \to b^-} \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

*Lorsque l'intégrale ne converge pas, on dit qu'elle **diverge**.*

Exemple 1. (i) Soit $f : t \in [0, 4[\longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{4-t}}$. f est continue sur $[0, 4[$ et pour tout $a \in [0, 4[$, on a :

$$\int_0^a \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{4-t}} = \left[-2\sqrt{4-t}\right]_0^a = -2\sqrt{4-a} + 4 \underset{a \to 4}{\longrightarrow} 4.$$

L'intégrale $\displaystyle\int_0^4 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{4-t}}$ converge et vaut 4.

(ii) Soit $f : t \in \mathbf{R}_+ \longmapsto \dfrac{t}{1+t^2}$. f est continue sur $\mathbf{R}_+$ et pour tout $A \geq 0$, on a :

$$\int_0^A \frac{t}{1+t^2}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left[\ln\left(1+t^2\right)\right]_0^A = \frac{1}{2}\ln\left(1+A^2\right) \underset{A \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{1+t^2}\mathrm{d}t$ diverge.

1.2 Intervalle semi-ouvert à gauche

Soit $f :]a, b] \longrightarrow \mathbf{K}$ une fonction continue avec $-\infty \leq a < b$.

Définition 2. *Convergence de l'intégrale sur $]a, b]$.*

*On dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ **converge** si la fonction $x \in]a, b] \longmapsto \displaystyle\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t$ admet une limite finie lorsque x tend vers a^+. Dans ce cas, on note*

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x \to a^+} \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

*Lorsque l'intégrale ne converge pas, on dit qu'elle **diverge**.*

Exemple 2. Soit $f : t \in \mathbf{R}_- \longmapsto \dfrac{1}{1+t^2}$. f est continue sur $\mathbf{R}_-$ et pour tout $B \leq 0$, on a :

$$\int_B^0 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}\mathrm{d}t = [\mathrm{Arctan}\,(t)]_B^0 = -\mathrm{Arctan}\,(B) \underset{B \to -\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2}.$$

L'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^0 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$ converge et vaut $\dfrac{\pi}{2}$.

1.3 Intervalle ouvert

Soit $f :]a,b[\longrightarrow \mathbf{K}$ une fonction continue avec $-\infty \leq a < b \leq +\infty$.

Définition 3. *Convergence de l'intégrale sur* $]a,b[$.

On dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ ***converge*** *si les intégrales* $\displaystyle\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t$ *et* $\displaystyle\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$ *convergent pour une valeur de* $c \in]a,b[$*. On pose alors*

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Lorsque l'intégrale de converge pas, on dit qu'elle ***diverge****.*

Remarque 1. (i) La nature (convergence ou divergence) de l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ ne dépend pas de $c \in]a,b[$.

(ii) En cas de convergence, la valeur de $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ ne dépend pas de $c \in]a,b[$.

Exemple 3. Soit $f : t \in \mathbf{R} \longmapsto t\mathrm{e}^{-t^2/2}$. f est continue sur $\mathbf{R}$. Pour tout $A \geq 0$, on a

$$\int_0^A t\mathrm{e}^{-t^2/2}\mathrm{d}t = \left[-\mathrm{e}^{-t^2/2}\right]_0^A = 1 - \mathrm{e}^{-A^2/2} \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\mathrm{e}^{-t^2/2}\mathrm{d}t$ converge et vaut 1.

On montre de même que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^0 t\mathrm{e}^{-t^2/2}\mathrm{d}t$ converge et vaut -1.

Il s'ensuit que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t\mathrm{e}^{-t^2/2}\mathrm{d}t$ converge et vaut $1 - 1 = 0$.

1.4 Propriétés fondamentales sur les intégrales convergentes

Les prochaines propositions sont des prolongements des propositions déjà connues des intégrales sur des segments.

Proposition 1. *Linéarité pour les intégrales convergentes.*

Soient $f, g :]a,b[\longrightarrow \mathbf{K}$ *deux fonctions continues telles que les intégrales* $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ *et* $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ *convergent. Soit* $\lambda \in \mathbf{K}$*. Alors l'intégrale* $\displaystyle\int_a^b (f(t) + \lambda g(t))\,\mathrm{d}t$ *convergent et*

$$\int_a^b (f(t) + \lambda g(t))\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \lambda \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Remarque 2. La proposition s'étend évidemment aux intégrales convergentes sur des intervalles du type $]a,b]$ ou $[a,b[$.

Démonstration. Soit $c \in]a,b[$. Par linéarité de l'intégrale sur les **segments**, pour tout $x \geq c$, on a

$$\int_a^x (f(t) + \lambda g(t))\,\mathrm{d}t = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t + \lambda \int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Comme les intégrales $\displaystyle\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_c^b g(t)\,\mathrm{d}t$ convergent et

$$\lim_{x\to b^-} \int_c^x f(x)\,\mathrm{d}t = \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \lim_{x\to b^-} \int_c^x g(t)\,\mathrm{d}t = \int_c^b g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Ainsi, l'intégrale $\displaystyle\int_c^b (f(t)+\lambda g(t))\,\mathrm{d}t$ converge et $\displaystyle\int_c^b (f(t)+\lambda g(t))\,\mathrm{d}t = \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t + \lambda \int_c^b g(t)\,\mathrm{d}t$.

On montre de même que l'intégrale $\displaystyle\int_a^c (f(t)+\lambda g(t))\,\mathrm{d}t$ converge et

$$\int_a^c (f(t)+\lambda g(t))\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \lambda \int_c^b g(t)\,\mathrm{d}t.$$

En utilisant la définition 3, on en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b (f(t)+\lambda g(t))\,\mathrm{d}t$ converge et

$$\int_a^b (f(t)+\lambda g(t))\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \lambda \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t.$$

□

Proposition 2. *Positivité de l'intégrale et croissance de l'intégrale.*

Soient $f, g :]a,b[\longrightarrow \mathbf{R}$ deux fonctions continues dont les intégrales $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ convergent. Alors :

(i) *si f à valeurs positives, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \geq 0$;*

(ii) *si pour tout $t \in]a,b[$, $f(t) \leq g(t)$, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$;*

(iii) *Si f est à valeurs positives et telle que $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0$, alors pour tout $t \in]a,b[$, $f(t) = 0$.*

Remarque 3. Ce résultat s'étend évidemment aux intervalles du type $]a,b]$ et $[a,b[$.

Démonstration. (i) Soit $c \in]a,b[$. Par **positivité de l'intégrale sur un segment**, pour tout $x \in]c,b[$, $\displaystyle\int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t \geq 0$. En particulier,

$$\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to b^-} \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t \geq 0.$$

On montre de même que $\displaystyle\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t \geq 0$. Ainsi, on a

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^a f(t)\,\mathrm{d}t \geq 0.$$

(ii) Il est clair que pour tout $t \in]a,b[$, $g(t) - f(t)$ et, d'après la proposition 1, l'intégrale $\displaystyle\int_a^b (g(t)-f(t))\,\mathrm{d}t$ converge.

D'après (i), on a $\displaystyle\int_a^b (g(t)-f(t))\,\mathrm{d}t$, puis par linéarité, on a

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t.$$

(iii) On suppose qu'il existe $x_0 \in]a,b[$ tel que $f(x_0) > 0$. Soit $\varepsilon = f(x_0)/2$. Par continuité de f, il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall t \in [x_0-\alpha, x_0+\alpha], \quad f(t) \geq \varepsilon.$$

Soit la fonction g définie sur $]a,b[$ par

$$\forall t \in]a,b[, \quad g(t) = \begin{cases} \dfrac{\varepsilon}{\alpha}(t-x_0+\alpha) & \text{si } t \in [x_0-\alpha, x_0] \\ -\dfrac{\varepsilon}{\alpha}(t-x_0-\alpha) & \text{si } t \in [x_0, x_0+\alpha] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Il est alors clair que

$$\forall t \in]a,b[, \quad f(t) \geq g(t).$$

En particulier, pour tout $y \geq x_0 + \alpha$, on a

$$\int_{x_0}^{y} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{x_0}^{x_0+\alpha} f(t)\,\mathrm{d}t \geq \int_{x_0}^{x_0+\alpha} g(t)\,\mathrm{d}t = \frac{\alpha\varepsilon}{2} > 0.$$

Ainsi,

$$\int_{x_0}^{b} f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{y \to b^-} \int_{x_0}^{y} f(t)\,\mathrm{d}t \geq \frac{\alpha\varepsilon}{2}.$$

On montre de même que

$$\int_{a}^{x_0} f(t)\,\mathrm{d}t \geq \frac{\alpha\varepsilon}{2}.$$

On en déduit que

$$\int_{a}^{b} f(t)\,\mathrm{d}t \geq \alpha\varepsilon$$

ce qui est exclu.

□

Proposition 3. *Relation de Chasles.*

Soit $f :]a,b[\longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue. On suppose que l'intégrale $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

Alors, pour tout $c \in]a,b[$, les intégrales $\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$ convergent et

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Remarque 4. La relation de Chasles s'étend évidemment aux intervalles du type $]a,b]$ et $[a,b[$.

Démonstration. Soit $c \in]a,b[$. D'après la définition 3, les intégrales $\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$ convergent et

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

□

Exemple 4. Montrons que l'intégrale $\int_{-2}^{+\infty} \mathrm{e}^{-|t|}\mathrm{d}t$ converge et calculons la.

Soit $f : t \in [-2,+\infty[\longmapsto \mathrm{e}^{-|t|}$. f est continue sur $[-2,+\infty[$. Soit $A \geq 0$. On utilise la relation de Chasles :

$$\int_{-2}^{A} \mathrm{e}^{-|t|}\mathrm{d}t = \int_{-2}^{0} \mathrm{e}^{t}\mathrm{d}t + \int_{0}^{A} \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = 2 - \mathrm{e}^{-2} - \mathrm{e}^{-A} \underset{A \to +\infty}{\longrightarrow} 2 - \mathrm{e}^{-2}.$$

L'intégrale $\int_{-2}^{+\infty} \mathrm{e}^{-|t|}\mathrm{d}t$ converge et vaut $2 - \mathrm{e}^{-2}$.

Proposition 4. *Formule du changement de variable.*

Démonstration. Soit $\varphi :]\alpha,\beta[\longrightarrow]a,b[$ une bijection de classe $\mathscr{C}^1$ croissante.

Les intégrales $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature. En cas de convergence, on a

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$$

□

Remarque 5. (i) Il faut s'assurer de la convergence des intégrales avant d'écrire une égalité.

(ii) On peut énoncer un résultat analogue pour les bijections de classe $\mathscr{C}^1$ décroissante : en cas de convergence de l'une des deux intégrales, l'autre converge et

$$\int_b^a f(t)\,\mathrm{d}t = \int_\beta^\alpha f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$$

(iii) En pratique, le changement de variable se pratique comme dans le cas des segments.

Démonstration. Soit F une primitive de f sur $]a,b[$. Soit $c \in]\alpha,\beta[$. Soient $x \in]\alpha,c]$ et $y \in [c,\beta[$. On a

$$\int_x^c f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = [F(\varphi(t))]_x^c = F(\varphi(c)) - F(\varphi(x)) = \int_{\varphi(x)}^{\varphi(c)} f(t)\,\mathrm{d}t \tag{1}$$

et

$$\int_c^y F(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = [F(\varphi(t))]_c^y = F(\varphi(y)) - F(\varphi(c)) = \int_{\varphi(c)}^{\varphi(y)} f(t)\,\mathrm{d}t. \tag{2}$$

Comme $\lim\limits_{x\to\alpha^+} \varphi(x) = a$, on en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_\alpha^c f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$ converge si, et seulement si, l'intégrale $\displaystyle\int_a^{\varphi(c)} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

De même, l'intégrale $\displaystyle\int_c^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$ converge si, et seulement si, l'intégrale $\displaystyle\int_{\varphi(c)}^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

Cela permet d'affirmer que l'intégrale $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$ converge si, et seulement si, l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

En cas de convergence, en faisant tendre $x \to \alpha^+$ dans (1) et $y \to \beta^-$ dans (2), on obtient

$$\int_\alpha^c f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^{\varphi(c)} f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \int_c^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\varphi(c)}^b f(t)\,\mathrm{d}t,$$

soit, en sommant,

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

□

Exemple 5. On souhaite étudier la convergence de l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$. On fait le changement de variable $x = \sin(t)$ dans I, on obtient

$$J = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2(t)}{\sqrt{1-\sin^2(t)}}\cos(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \sin^2(t)\,\mathrm{d}t.$$

Comme $t \in [0,\pi/2] \longmapsto \sin^2(t)$ est continue, l'intégrale J converge.

Ainsi, par le théorème de changement de variable, l'intégrale I converge et

$$I = J = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} (1-\cos(2t))\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t}{2} - \frac{1}{4}\sin(2t)\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}.$$

2 Intégrale d'une fonction de signe constant

2.1 Intégrales de référence

Proposition 5. *Soit* $\lambda \in \mathbf{R}$. *L'intégrale* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda t}\mathrm{d}t$ *converge si, et seulement si,* $\lambda > 0$. *En cas de convergence, on a*

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda t}\mathrm{d}t = \frac{1}{\lambda}.$$

Démonstration. La preuve se fait en deux temps.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Soit $A \geq 0$. On a

$$\int_0^A \mathrm{e}^{-\lambda t}\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{\lambda}\mathrm{e}^{-\lambda t}\right]_0^A = -\frac{1}{\lambda}\mathrm{e}^{-\lambda A} + \frac{1}{\lambda}.$$

Comme $\lambda > 0$, on a $\lim\limits_{A\to+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda A} = 0$, ainsi

$$\lim_{A\to+\infty} \int_0^A \mathrm{e}^{-\lambda t}\mathrm{d}t = \frac{1}{\lambda}.$$

$\boxed{\Longleftarrow}$ On va prouver la contraposée de l'implication, i.e. on va montrer que si $\lambda \leq 0$, alors $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda t}\mathrm{d}t$ diverge. On distingue le cas $\lambda = 0$ et $\lambda < 0$.

(i) Si $\lambda = 0$. Soit $A \geq 0$. On a

$$\int_0^A \mathrm{e}^{-\lambda t}\mathrm{d}t = \int_0^A \mathrm{d}t = A \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

(ii) Si $\lambda < 0$. Soit $A \geq 0$. On a

$$\int_0^A \mathrm{e}^{-\lambda t}\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{\lambda}\mathrm{e}^{-\lambda t}\right]_0^A = -\frac{1}{\lambda}\mathrm{e}^{-\lambda A} + \frac{1}{\lambda} \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

car $\lambda < 0$.

Dans les deux cas, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda t}\mathrm{d}t$ diverge.

□

Proposition 6. *L'intégrale* $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)\,\mathrm{d}t$ *converge et vaut* -1.

Démonstration. Soit $\varepsilon \in \left]0,1\right[$. On pose $u : t \longmapsto \ln(t)$ et $v : t \longmapsto t$. Les fonctions u et v sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'intervalle $[\varepsilon, 1]$. Une intégration par parties donne

$$\int_\varepsilon^1 \ln(t)\,\mathrm{d}t = [t\ln(t)]_\varepsilon^1 - \int_\varepsilon^1 t \times \frac{1}{t}\mathrm{d}t = -\varepsilon\ln(\varepsilon) - (1-\varepsilon).$$

Comme $\lim\limits_{\varepsilon\to0^+} \varepsilon\ln(\varepsilon) = 0$ (croissance comparée), on en déduit que

$$\lim_{\varepsilon\to0^+} \int_\varepsilon^1 \ln(t)\,\mathrm{d}t = -1.$$

L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)\,\mathrm{d}t$ converge et vaut -1.

□

Remarque 6. La preuve indique que $x \longmapsto x\ln(x) - x$ est une primitive de ln sur $\mathbf{R}_+^*$.

Proposition 7. *Intégrales de Riemann.*
Soit $\alpha \in \mathbf{R}$. *On a*

(i) *L'intégrale* $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t$ *converge si, et seulement si,* $\alpha > 1$. *En cas de convergence, on a*

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t = \frac{1}{\alpha-1}.$$

(ii) *L'intégrale* $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t$ *converge si, et seulement si,* $\alpha < 1$.

Démonstration. (i) La preuve est en deux temps.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Soit $A \geq 1$. On a

$$\int_1^A \frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t = \left[\frac{t^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_1^A = \frac{A^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} + \frac{1}{\alpha-1}.$$

Comme $-\alpha+1<0$, on a $\lim\limits_{A\to+\infty} A^{-\alpha+1} = 0$, on a

$$\lim_{A\to+\infty}\int_1^A \frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t = \frac{1}{\alpha-1}.$$

$\boxed{\Longrightarrow}$ Encore une fois, on raisonne par contraposée. On distingue les cas où $\alpha = 1$ et $\alpha < 1$.

(a) Si $\alpha = 1$. Soit $A \geq 1$, on a

$$\int_1^A \frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t = \int_1^A \frac{1}{t}\mathrm{d}t = [\ln(t)]_1^A = \ln(A) \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

(b) Si $\alpha < 1$. Soit $A \geq 1$, on a

$$\int_1^A \frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t = \left[\frac{t^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_1^A = \frac{A^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} + \frac{1}{\alpha-1} \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

car $-\alpha+1>0$.

Dans les deux cas, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t$ diverge.

(ii) Soit $\alpha \in \mathbf{R}$. On va se ramener au cas précédent en procédant à un changement de variable. Soit $\varepsilon \in]0,1[$. On fait le changement de variable $u = \dfrac{1}{t} \iff u = \dfrac{1}{t}$ dans l'intégrale $\displaystyle\int_\varepsilon^1 \frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t$. Le changement de variable est de classe $\mathscr{C}^1$ et bijectif de $[\varepsilon,1]$ sur $\left[1,\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$. La formule du changement de variable donne

$$\int_\varepsilon^1 \frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t = \int_1^{1/\varepsilon} \frac{1}{u^{-\alpha+2}}\mathrm{d}u.$$

Lorsque $\varepsilon \to 0^+$, on a $1/\varepsilon \to +\infty$. Or, d'après (i), $\varepsilon \longmapsto \displaystyle\int_1^{1/\varepsilon} \frac{1}{u^{-\alpha+2}}\mathrm{d}u$ admet une limite finie lorsque $\varepsilon \to 0^+$ si, et seulement si, $-\alpha+2>1 \iff \alpha<1$.

□

2.2 Règles de comparaison

On fixe un intervalle de $[a,b[$ de $\mathbf{R}$ avec $a < b \leq +\infty$.

Théorème 1. *Théorème de comparaison par inégalité.*
Soient $f,g : [a,b[\longrightarrow \mathbf{R}$ *deux fonctions continues telles que* $0 \leq f(t) \leq g(t)$ *pour tout* $t \in [a,b[$.

(i) *Si l'intégrale* $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ *converge, alors l'intégrale* $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ *converge.*

(ii) *Si l'intégrale* $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ *diverge, alors l'intégrale* $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ *diverge.*

Démonstration. (i) Comme f est à valeurs positives, la fonction $x \in [a, b[\longmapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est croissante sur $[a, b[$. Ainsi, pour montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge, il suffit de montrer que la fonction $x \in [a, b[\longmapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est majorée sur $[a, b[$.

Comme g est positive et l'intégrale $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ converge, on en déduit que

$$\forall x \in [a, b[\,, \quad \int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t.$$

En utilisant l'hypothèse $f(t) \leq g(t)$ pour tout $t \in [a, b[$ et la ligne précédente, on en tire

$$\forall x \in [a, b[\,, \quad \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t,$$

ce qui termine la preuve.

(ii) Toujours par positivité de f, la fonction $x \in [a, b[\longmapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est croissante sur $[a, b[$. Par le théorème de la limite monotone (pour les fonction), la fonction $x \in [a, b[\longmapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ admet une limite (finie ou $+\infty$) en b^-.

Comme l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est supposée divergente, on en déduit que

$$\lim_{x \to b^-} \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = +\infty.$$

En utilisant l'hypothèse $f(t) \leq g(t)$ pour tout $t\, [a, b[$, on en déduit que

$$\forall x \in [a, b[\,, \quad \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Le théorème de comparaison (pour les fonctions) assure alors que

$$\lim_{x \to b^-} \int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t = +\infty,$$

ce qui termine la preuve.

□

Remarque 7. (i) Pour utiliser ce résultat, il suffit de vérifier l'inégalité $0 \leq f(t) \leq g(t)$ sur un voisinage de b.

(ii) On peut énoncer un résultat analogue pour les intégrales des fonctions continues sur $]a, b]$.

Exemple 6. On souhaite étudier la convergence de $I = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2}\mathrm{d}t$.

Déjà, $t \in [1, +\infty[\longmapsto \dfrac{\sin^2(t)}{t^2}$ est continue et

$$\forall t \in [1, +\infty[\,, \quad 0 \leq \frac{\sin^2(t)}{t^2} \leq \frac{1}{t^2}.$$

Or l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$ converge, par comparaison par inégalité des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2}\mathrm{d}t$ converge.

Théorème 2. *Théorème de comparaison par équivalence.*

Soient $f, g : [a, b[\longrightarrow \mathbf{R}$ *deux fonctions continues. On suppose que* f *est positive sur un voisinage de* b^- *et* $f(t) \underset{t \to b^-}{\sim} g(t)$*, alors*

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \text{ converge } \iff \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t \text{ converge.}$$

Démonstration. Une fois n'est pas coutume, on peut traiter l'équivalence en une fois.

Dire que $f(t) \underset{t \to b^-}{\sim} g(t)$, c'est dire que, par définition, il existe une fonction $\varepsilon : [a, b[\longrightarrow \mathbf{R}$ avec $\lim\limits_{t \to b^-} \varepsilon(t) = 1$ telle que

$$\forall t \in [a, b[, \quad g(t) = (1 + \varepsilon(t)) f(t).$$

Comme $\lim\limits_{t \to b^-} (1 + \varepsilon(t)) = 1$, il existe $\alpha_1 > 0$ tel que

$$\forall t \in [b - \alpha_1, b[, \quad \frac{1}{2} \leq 1 + \varepsilon(t) \leq \frac{3}{2}.$$

Comme f est supposée positive sur un voisinage de b, il existe $\alpha_2 > 0$ tel que

$$\forall t \in [b - \alpha_2, b[, \quad f(t) \geq 0.$$

En posant $\alpha = \min\{\alpha_1, \alpha_2\}$, on a

$$\forall t \in [b - \alpha, b[, \quad 0 \leq \frac{1}{2} f(t) \leq g(t) \leq f(t).$$

D'après le théorème 1, les intégrales $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ sont de la même nature, donc convergent (et divergent) simultanément.

□

Remarque 8. (i) Pour utiliser ce résultat, il suffit de s'assurer que f est de signe constant (i.e. positive ou négative) sur un voisinage de b.

(ii) On peut énoncer un résultat analogue pour les intégrales des fonctions continues sur $]a, b]$.

Exemple 7. On souhaite étudier la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos(t)}{t}\mathrm{d}t$.

Déjà, $t \in]0, \pi/2] \longmapsto \dfrac{\cos(t)}{t}$ est continue. De plus,

$$\frac{\cos(t)}{t} \underset{t \to 0}{\sim} \frac{1}{t}.$$

Comme l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos(t)}{t}\mathrm{d}t$ diverge, par comparaison par équivalence des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos(t)}{t}\mathrm{d}t$ diverge.

3 Intégrabilité d'une fonction continue sur un intervalle

On considère un intervalle I de $\mathbf{R}$ non trivial (i.e. non ide et non réduit à un point). On note $a = \inf(I)$ et $b = \sup(I)$. Ainsi, on a $I = [a, b]$, $]a, b]$, $[a, b[$ ou $]a, b[$.

Définition 4. *Fonction intégrable.*

Soit $f : I \longrightarrow \mathbf{K}$ *une fonction continue. On dit que* f *est* ***intégrable*** *sur* I *si l'intégrale* $\displaystyle\int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$ *converge.*

Remarque 9. (i) Une fonction $f : I \longrightarrow \mathbf{K}$ continue est intégrable sur I si, et seulement si, elle est intégrable sur $]a, b[$.

(ii) Si f est intégrable sur I, on dit que l'intégrale $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ **converge absolument**.

(iii) Si f est positive, l'intégrale $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si, et seulement si, f est intégrable sur I.

Proposition 8. *Si $f : I \longrightarrow \mathbf{K}$ est intégrable, alors l'intégrale $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.*

Remarque 10. (i) Autrement dit, si une intégrale converge absolument, elle converge.

(ii) En particulier, tous les résultats établis à la sous-partie 1.4 restent vrais : la linéarité (proposition 1), la relation de Chasles (proposition 3) et la positivité/croissance de l'intégrale (proposition 2).

Démonstration. Soit g la fonction définie sur I par $g(x) = f(x) + |f(x)|$. Il est clair que

$$\forall x \in I, \quad 0 \leq g(x) \leq 2\,|f(x)|\,.$$

Comme l'intégrale $\int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$ converge (par définition car f est intégrable sur I), l'intégrale $\int_a^b 2\,|f(t)|\,\mathrm{d}t$ converge ainsi, par comparaison par inégalité des intégrales des fonctions positives (proposition 1), l'intégrale $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ converge. Or,

$$\forall t \in I, \quad f(t) = g(t) - |f(t)|\,.$$

Comme les intégrales $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$ convergent, d'après la proposition 1, l'intégrale $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

□

Exemple 8. On s'intéresse à la nature de l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^2}\mathrm{d}t$.

Déjà, $t \in [1, +\infty[\longmapsto \frac{\sin(t)}{t^2}$ est continue. De plus,

$$\forall t \in [1, +\infty[\,, \quad \left|\frac{\sin(t)}{t^2}\right| \leq \frac{1}{t^2}.$$

Or, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$ converge. Par comparaison par inégalitédes intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^2}\mathrm{d}t$ converge absolument, donc converge.

Notation. *Si $f : I \longrightarrow \mathbf{K}$ est continue et intégrable, on pose*

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_I f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Proposition 9. *Espace $L^1(I)$.*

L'ensemble des fonctions continues sur I à valeurs dans $\mathbf{K}$ intégrables est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel noté $L^1(I)$.

Démonstration. Déjà, il est clair que la fonction nulle appartient à $L^1(I)$.

Soient $f, g \in L^1(I)$ et $\lambda \in \mathbf{K}$. On commence par remarquer que :

$$\forall t \in I, \quad |f(t) + \lambda g(t)| \leq |f(t)| + |\lambda|\,|g(t)|\,.$$

Or, par hypothèse, l'intégrale $\int_a^b (|f(t)| + |\lambda|\,|g(t)|)\,\mathrm{d}t$ converge. Par comparaison par inégalité des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\int_a^b |f(t) + \lambda g(t)|\,\mathrm{d}t$ converge, donc par définition $t \in I \longmapsto f(t) + \lambda g(t)$ appartient à $L^1(I)$.

□

Proposition 10. *Propriétés des fonctions intégrables.*
Soit $f : I \longrightarrow \mathbf{K}$ une fonction continue intégrable. Alors :

(i) $\displaystyle \left| \int_I f(t)\, \mathrm{d}t \right| \leq \int_I |f(t)|\, \mathrm{d}t$;

(ii) $\displaystyle \int_I |f(t)|\, \mathrm{d}t = 0$ *si, et seulement si, pour tout $t \in I$, $f(t) = 0$.*

Avant de prouver la proposition 10, nous utiliserons le lemme suivant.

Lemme 1. *Fonctions f^+ et f^-.*
Soit $f : i \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue. On définit sur I les fonctions f^+ et f^- par

$$\forall x \in I, \quad f^+(x) = \max\{f(x), 0\} \quad \text{et} \quad f^-(x) = \max\{-f(x), 0\}.$$

Alors :

(i) *les fonctions f^+ et f^- sont positives et continues sur I ;*

(ii) *pour tout $x \in I$,*

$$f(x) = f^+(x) - f^-(x) \quad \text{et} \quad |f(x)| = f^+(x) + f^-(x).$$

Démonstration. (i) La positivité est claire. Pour montrer que f^+ et f^- sont continues, il suffit (discuter suivant que $f(x) \geq 0$ ou non) de remarquer que

$$\forall x \in I, \quad f^+(x) = \frac{1}{2}\left(f(x) + |f(x)|\right) \quad \text{et} \quad f^-(x) = \frac{1}{2}\left(|f(x)| - f(x)\right).$$

et d'utiliser les théorèmes généraux sur la continuité.

(ii) Il suffit à nouveau de discuter suivant que $f(x)$ soit ou non positif.

□

Nous prouvons maintenant la proposition 10.

Démonstration. (i) (a) On commence par supposer que $\mathbf{K} = \mathbf{R}$. On introduit les fonctions f^+ et f^- du lemme 1. D'après le lemme 1, on a

$$\forall x \in I, \quad \left|f^+(x)\right| \leq |f(x)| \quad \text{et} \quad \left|f^-(x)\right| \leq |f(x)|.$$

Par comparaison par inégalité des intégrales de fonctions positives, les intégrales $\displaystyle \int_I \left|f^+(t)\right| \mathrm{d}t$ et $\displaystyle \int_a^b \left|f^-(t)\right| \mathrm{d}t$ convergent. Comme les fonctions sont positives, les intégrales $\displaystyle \int_I f^+(t)\, \mathrm{d}t$ et $\displaystyle \int_a^b f^-(t)\, \mathrm{d}t$ convergent. Ainsi, en utilisant la proposition 1, on a

$$\left| \int_I f(t)\, \mathrm{d}t \right| = \left| \int_I \left(f^+(t) - f^-(t)\right) \mathrm{d}t \right| = \left| \int_I f^+(t)\, \mathrm{d}t - \int_I f^-(t)\, \mathrm{d}t \right|.$$

En utilisant l'inégalité triangulaire, on a

$$\left| \int_I f(t)\, \mathrm{d}t \right| \leq \left| \int_I f^+(t)\, \mathrm{d}t \right| + \left| \int_I f^-(t)\, \mathrm{d}t \right|.$$

Par le lemme 1 et par positivité de l'intégrale pour les intégrales convergentes (proposition 2), on a $\displaystyle \int_I f^+(t)\, \mathrm{d}t \geq 0$ et $\displaystyle \int_I f^-(t)\, \mathrm{d}t \geq 0$. Ainsi, en utilisant à nouveau la proposition 1 (car f est intégrable sur I) et le lemme 1, on a

$$\left| \int_I f(t)\, \mathrm{d}t \right| \leq \int_I f^+(t)\, \mathrm{d}t + \int_I f^-(t)\, \mathrm{d}t = \int_I \left(f^+(t) + f^-(t)\right) \mathrm{d}t = \int_I |f(t)|\, \mathrm{d}t.$$

(b) On suppose que $\mathbf{K} = \mathbf{C}$. On écrit $f = \mathrm{Re}\,(f) + \mathrm{i}\,\mathrm{Im}\,(f)$ où $\mathrm{Re}\,(f)$ et $\mathrm{Im}\,(f)$ sont respectivement les parties réelles et imaginaires de f. Comme f est continue sur I, $\mathrm{Re}\,(f)$ et $\mathrm{Im}\,(f)$ sont continues sur I. On remarque que

$$\forall t \in I, \quad |\mathrm{Re}\,(f)\,(t)| \leq |f\,(t)|\,.$$

Par comparaison par inégalité des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_I |\mathrm{Re}\,(f)\,(t)|\,\mathrm{d}t$ converge. En utilisant la proposition 8, on en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_I \mathrm{Re}\,(f)\,(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

Un même raisonnement montre que l'intégrale $\displaystyle\int_I \mathrm{Im}\,(f)\,(t)\,\mathrm{d}t$ converge. Par linéarité (proposition 1) et utilisation de l'inégalité triangulaire, on a

$$\left|\int_I f\,(t)\,\mathrm{d}t\right| = \left|\int_I \mathrm{Re}\,(f)\,(t)\,\mathrm{d}t + \mathrm{i}\int_I \mathrm{Im}\,(f)\,(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \left|\int_I \mathrm{Re}\,(f)\,(t)\,\mathrm{d}t\right| + \left|\int_I \mathrm{Im}\,(f)\,(t)\,\mathrm{d}t\right|.$$

Comme les fonctions $\mathrm{Re}\,(f)$ et $\mathrm{Im}\,(f)$ sont intégrables sur I, d'après le cas (a) ce cette preuve, on a

$$\left|\int_I \mathrm{Re}\,(f)\,(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_I |\mathrm{Re}\,(f)\,(t)|\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \left|\int_I \mathrm{Im}\,(f)\,(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_I |\mathrm{Im}\,(f)\,(t)|\,\mathrm{d}t.$$

Il s'ensuit que

$$\left|\int_I f\,(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_I (|\mathrm{Re}\,(f)\,(t)| + |\mathrm{Im}\,(f)\,(t)|)\,\mathrm{d}t.$$

Or, pour tout $t \in I$,

$$|f\,(t)| = \sqrt{\mathrm{Re}\,(f)\,(t)^2 + \mathrm{Im}\,(f)\,(t)^2} \geq |\mathrm{Re}\,(f)\,(t)| + |\mathrm{Im}\,(f)\,(t)|\,,$$

ainsi

$$\left|\int_I f\,(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_I |f\,(t)|\,\mathrm{d}t.$$

(ii) Adapter la preuve de (iii) de la proposition 2.

□

4 Exemples

Pour étudier la nature d'une intégrale $\displaystyle\int_a^b f\,(t)\,\mathrm{d}t$ où f est une fonction au moins définie sur $]a, b[$ à valeurs dans $\mathbf{K}$, on pourra retenir le plan suivant.

1. On détermine si f est continue sur $[a, b]$, $]a, b]$, $[a, b[$ ou $]a, b[$.
   (a) Si f est continue (ou prolongeable par continuité) sur $[a, b]$, l'intégrale converge.
   (b) Si f n'est que continue sur $]a, b[$, on sépare l'intégrale en deux pour se ramener au cas où seulement l'une des deux extrémités est ouverte.
2. On est donc ramené au cas où f est continue sur $[a, b[$ (ou $]a, b]$). On essaie d'utiliser les résultats suivants du cours pour décider de la nature de l'intégrale dans l'ordre suivant :
   (a) Si on connaît une primitive de f, on peut utiliser la définition pour étudier la convergence.
   (b) On peut essayer de déterminer un équivalent de f ou $|f|$ au voisinage de b.
   (c) On peut essayer d'établir, au voisinage de b, une inégalité portant sur f ou $|f|$.
   (d) On peut essayer de faire un changement de variable pour transformer l'intégrale.
   (e) On peut essayer de faire une intégration par parties.
3. Dans le cas où l'on avait séparé l'intervalle en deux, on conclut.

Exemple 9. On s'intéresse à la nature de l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^2 \mathrm{e}^{-t^3} \mathrm{d}t$. Soit $A \geq 0$. On a

$$\int_0^A t^2 \mathrm{e}^{-t^3} \mathrm{d}t = \frac{1}{3}\left[-\mathrm{e}^{-t^3}\right]_0^A = -\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-A^3} + \frac{1}{3} \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{3}.$$

On en déduit que l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^2 \mathrm{e}^{-t^3} \mathrm{d}t$ converge et vaut $\frac{1}{3}$.

Exemple 10. On s'intéresse à la nature de l'intégrale $\int_{\mathrm{e}}^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t} \mathrm{d}t$. On remarque que

$$\forall t \geq \mathrm{e}, \quad \frac{\ln(t)}{t} \geq \frac{1}{t}.$$

Or, l'intégrale $\int_{\mathrm{e}}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t}$ diverge. Par comparaison par inégalité des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\int_{\mathrm{e}}^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t} \mathrm{d}t$ diverge.

Exemple 11. On s'intéresse à la nature de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\cos(t)\,\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}} \mathrm{d}t$.

Déjà $t \in \mathbf{R}_+^* \longmapsto \frac{\cos(t)\,\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}$ est continue. Ainsi, pour étudier la nature de l'intégrale, on étudie la nature de

$$\int_0^1 \frac{\cos(t)\,\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}} \mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)\,\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}} \mathrm{d}t.$$

(i) On a

$$\frac{\cos(t)\,\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{t}}.$$

Or, l'intégrale $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}$ converge. Par comparaison par équivalence des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\int_0^1 \frac{\cos(t)\,\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}} \mathrm{d}t$ converge.

(ii) On a

$$\forall t \geq 1, \quad \left|\frac{\cos(t)\,\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\right| \leq \mathrm{e}^{-t}.$$

Or, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} \mathrm{d}t$ converge. Par comparaison par inégalité des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)\,\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}} \mathrm{d}t$ converge absolument, donc converge.

Par somme, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\cos(t)\,\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}} \mathrm{d}t$ converge.

Exemple 12. On s'intéresse à la nature de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} \mathrm{d}t$.

Déjà $t \in \mathbf{R}_+ \longmapsto \mathrm{e}^{-t^2}$ est continue. De plus,

$$\forall t \geq 1, \quad 0 \leq \mathrm{e}^{-t^2} \leq \mathrm{e}^{-t}.$$

Or, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} \mathrm{d}t$ converge. Par comparaison par inégalité des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} \mathrm{d}t$ converge.

Comme $\int_0^1 \mathrm{e}^{-t^2} \mathrm{d}t$ converge (intégrale d'une fonction continue sur un segment), par somme l'intégrale $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} \mathrm{d}t$ converge.

Exemple 13. On s'intéresse à la nature de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t}}$. On fait le changement de variable $u = 1-t$. Le théorème de changement de variable assure que la précédente intégrale est de la même nature que

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u}}.$$

Or, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u}}$ converge, ainsi l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t}}$ converge.

Exemple 14. On s'intéresse à la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t$.

Déjà $t \in \mathbf{R}_+^* \longmapsto \dfrac{\sin(t)}{t}$ est continue. Ainsi, pour étudier la nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t$, on étudie la nature de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t$.

(i) On a

$$\frac{\sin(t)}{t} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{t}{t} = 1.$$

Ainsi, $t \longmapsto \dfrac{\sin(t)}{t}$ est prolongeable par continuité en 0 (en lui donnant la valeur 1 en 0), donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t$ converge.

(ii) Soit $A \geq 1$. Une intégration par parties donne

$$\int_1^A \frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t = \left[-\frac{\cos(t)}{t}\right]_1^A - \int_1^A \frac{\cos(t)}{t^2}\mathrm{d}t = -\frac{\cos(A)}{A} + \cos(1) - \int_1^A \frac{\cos(t)}{t^2}\mathrm{d}t.$$

Or, $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} \frac{\cos(A)}{A} = 0$, donc les intégrales $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^2}\mathrm{d}t$ sont de même nature. Mais,

$$\forall t \geq 1, \qquad \left|\frac{\cos(t)}{t^2}\right| \leq \frac{1}{t^2}.$$

Or, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$ converge. Par comparaison par inégalité des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^2}\mathrm{d}t$ converge absolument, donc converge. Ainsi, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t$ converge.

Par somme, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t$ converge.

5 Compléments

Ces compléments sont des notions qui, sans être au programme, sont des exercices très classiques de concours.

5.1 Théorème de comparaison par négligeabilité

Théorème 3. *Théorème de comparaison par négligeabilité.*

Soient $f, g : [a,b[\longrightarrow \mathbf{K}$ deux fonctions continues. On suppose que $f(t) \underset{t\to b}{=} o(g(t))$ et que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ converge absolument.

Alors, l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge absolument.

Démonstration. Comme $f(t) \underset{t\to b}{=} o(g(t))$, il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $t \in [b-\alpha, b[$, $|f(t)| \leq |g(t)|$.

Comme l'intégrale $\displaystyle\int_a^b |g(t)|\,\mathrm{d}t$ converge, par comparaison par inégalité des intégrales de fonctions positives, on en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$ converge.

□

Exemple 15. Montrons que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2}\mathrm{d}t$ converge.

Déjà, $t \in [1, +\infty[\longmapsto \dfrac{\ln(t)}{t^2}$ est continue.

De plus, on remarque que $\dfrac{\ln(t)}{t^2} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^{3/2}}\right)$. Or, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{3/2}}\mathrm{d}t$ converge absolument (intégrale de Riemann avec $\alpha = 3/2 > 1$). Par comparaison par négligeabilité, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2}\mathrm{d}t$ converge absolument, donc converge.

5.2 Intégrales de Wallis

On définit la suite $(W_n)_{n\in\mathbf{N}}$ par

$$W_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(t)\,\mathrm{d}t.$$

Soit $n \in \mathbf{N}$. On a

$$W_{n+2} = \int_0^{\pi/2} \sin^{n+2}(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \sin^{n+1}(t)\sin(t)\,\mathrm{d}t.$$

Une intégration par parties donne

$$\begin{aligned} W_{n+2} &= \left[-\sin^{n+1}(t)\cos(t)\right]_0^{\pi/2} + (n+1)\int_0^{\pi/2} \sin^n(t)\cos^2(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\pi/2} \sin^n(t)\left(1-\sin^2(t)\right)\mathrm{d}t \\ &= (n+1)W_n - (n+1)W_{n+2}. \end{aligned}$$

On en déduit que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n$, soit

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}W_n. \tag{3}$$

Cette relation de récurrence nous permet alors de donner une expression explicite pour W_{2n} :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad W_{2n} = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \times \frac{\pi}{2}. \tag{4}$$

On prouve (4) par récurrence. Comme $W_0 = \dfrac{\pi}{2}$, (4) est vraie pour $n = 0$.

On suppose que $W_{2n} = \dfrac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \times \dfrac{\pi}{2}$. D'après (3), on a

$$\begin{aligned} W_{2n+2} &= \frac{2n+1}{2n+2}W_{2n} \quad \text{d'après (3)} \\ &= \frac{2n+1}{2n+2} \times \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \times \frac{\pi}{2} \quad \text{hypothèse de récurrence} \\ &= \frac{(2n+1)!}{(2n+2)^2(2^n n!)^2} \times \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{(2n+2)!}{(2^{n+1}(n+1)!)^2} \times \frac{\pi}{2}, \end{aligned}$$

ce qui termine la récurrence.

Pour obtenir une expression explicite de W_{2n+1}, on commence par remarquer que la suite $\left((n+1)\,W_nW_{n+1}\right)_{n\in\mathbf{N}}$ est constante. En effet, en utilisant (3), on a

$$(n+2)\,W_{n+1}W_{n+2} = (n+2)\,W_{n+1}\frac{n+1}{n+2}W_n = (n+1)\,W_nW_{n+1}.$$

Comme $W_0 = \pi/2$ et $W_1 = 1$, on a

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad (n+1)\,W_nW_{n+1} = W_0W_1 = \frac{\pi}{2}. \tag{5}$$

Il s'ensuit que

$$W_{2n+1} = \frac{\frac{\pi}{2}}{(2n+1)\,W_{2n}} = \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}.$$

On souhaite maintenant trouver la limite et, si possible, donner un équivalent de W_n lorsque n tend vers $+\infty$. On commence par remarquer que

$$W_{n+1} - W_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(t)\,(\sin(t) - 1)\,\mathrm{d}t \leq 0.$$

La suite $(W_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est décroissante. Comme elle est positive, elle converge. En notant ℓ la limite de la suite $(W_n)_{n\in\mathbf{N}}$, la relation (5) donne $\ell^2 = 0$, soit $\ell = 0$.

Pour donner un équivalent de W_n, on utilise la décroissance de $(W_n)_{n\in\mathbf{N}}$

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad W_{n+2} \leq W_{n+1} \leq W_n.$$

La ligne (3) donne

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad \frac{n+1}{n+2}W_n \leq W_{n+1} \leq W_n.$$

Comme $W_n > 0$ pour tout $n \in \mathbf{N}$ et on a

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad \frac{n+1}{n+2} \leq \frac{W_{n+1}}{W_n} \leq 1.$$

Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n+2} = 1$, on en déduit que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{W_{n+1}}{W_n} = 1$, soit $W_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} W_n$.

En remarquant que $n+1 \underset{n\to+\infty}{\sim} n$, la relation (5) donne $nW_n^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\pi}{2}$, soit par positivité de W_n,

$$W_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$

5.3 Théorème d'Abel

Le but de cette sous-partie est d'établir un nouveau théorème de convergence pour les intégrales généralisées.

Théorème 4. *Théorème d'Abel.*

Soit $f : \mathbf{R}_+ \longrightarrow \mathbf{K}$ *une fonction continue telle que* $t \in \mathbf{R}_+ \longmapsto \displaystyle\int_0^t f(u)\,\mathrm{d}u$ *soit bornée sur* $\mathbf{R}_+$*. Soit* $g : \mathbf{R}_+ \longrightarrow \mathbf{R}$ *une fonction de classe* $\mathscr{C}^1$ *sur* $\mathbf{R}_+$*, décroissante et de limite nulle en* $+\infty$*. Alors, l'intégrale* $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,g(t)\,\mathrm{d}t$ *converge.*

Remarque 11. Le théorème d'Abel s'applique lorsque les fonctions f et g sont définies sur un intervalle du type $[a, +\infty[$.

Démonstration. Soit $F : t \in \mathbf{R}_+ \longmapsto \int_0^t f(u)\,\mathrm{d}u$. Soit $A \geq 0$. Une intégration par parties donne

$$\int_0^A f(t)\,g(t)\,\mathrm{d}t = [F(t)\,g(t)]_0^A - \int_0^A F(t)\,g'(t)\,\mathrm{d}t = F(A)\,g(A) - \int_0^A F(t)\,g'(t)\,\mathrm{d}t. \tag{6}$$

Comme F est bornée sur $\mathbf{R}_+$ et g est de limite nulle en $+\infty$, on a

$$\lim_{A\to+\infty} F(A)\,g(A) = 0. \tag{7}$$

On commence par remarquer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \left(-g'(t)\right)\mathrm{d}t$ converge. Soit $A \geq 0$, on a

$$\int_0^{+\infty} \left(-g'(t)\right)\mathrm{d}t = -\,[g(t)]_0^A = -g(A) + g(0) \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} g(0).$$

Soit $M \in \mathbf{R}_+$ tel que pour tout $t \geq 0$, $|F(t)| \leq M$. Comme g est décroissante, pour tout $t \in \mathbf{R}_+$, $-g'(t) \geq 0$, donc

$$\forall t \in \mathbf{R}_+, \quad \left|F(t)\,g'(t)\right| \leq -Mg'(t).$$

Par comparaison par inégalité des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\int_0^A F(t)\,g'(t)\,\mathrm{d}t$ converge absolument, donc converge.

Ainsi, $A \longmapsto \int_0^A F(t)\,g'(t)\,\mathrm{d}t$ admet une limite en $+\infty$. En utilisant les lignes (6) et (7), en faisant tendre A vers $+\infty$, on en déduit que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\,g(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

$\square$

Exemple 16. L'intégrale $\int_2^{+\infty} \frac{\sin(t)}{\ln(t)}\mathrm{d}t$ converge car $t \in [2,+\infty[\longmapsto \int_2^t \sin(u)\,\mathrm{d}u = \cos(2) - \cos(t)$ est bornée et $t \in [2,+\infty[\longmapsto \frac{1}{\ln(t)}$ est de classe $\mathscr{C}^1$, décroissante et de limite nulle en $+\infty$.

5.4 Calcul de l'intégrale de Gauss

Le but de cette sous-partie est de montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$ converge et montrer que $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

(i) *Convergence.*
$t \in \mathbf{R}_+ \longmapsto \mathrm{e}^{-t^2}$ est continue. De plus, par croissance comparée, $\lim_{t\to+\infty} t^2\mathrm{e}^{-t^2} = 0$. Ainsi, il existe $A > 0$ tel que

$$\forall t \geq A, \quad t^2\mathrm{e}^{-t^2} \leq 1 \iff \mathrm{e}^{-t^2} \leq \frac{1}{t^2}.$$

Or, l'intégrale $\int_A^{+\infty} \frac{1}{t^2}$ converge (intégrale de Riemann avec $\alpha = 2 > 1$), par comparaison par inégalité des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\int_A^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$ converge, puis par somme, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$ converge aussi.

(ii) *Calcul.*
On introduit sur $\mathbf{R}_+$ les fonctions f et g suivantes :

$$\forall x \in \mathbf{R}_+, \quad f(x) = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-x\left(1+t^2\right)}}{1+t^2}\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad g(x) = \left(\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t\right)^2.$$

Soit $x \in [-2,2]$. Comme la fonction exp est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbf{R}$, la formule de Taylor avec reste intégral donne

$$\mathrm{e}^x = 1 + x + \int_0^x \mathrm{e}^t (x-t)\,\mathrm{d}t.$$

Ainsi,

$$|\mathrm{e}^x - 1 - x| \leq \mathrm{e}^2 \left| \int_0^x |x-t|\,\mathrm{d}t \right|.$$

En discutant suivant que $x \geq 0$ ou $x \leq 0$, on montre que $\left| \int_0^x |x-t|\,\mathrm{d}t \right| = \dfrac{x^2}{2}$. Ainsi,

$$\forall x \in [-2,2], \quad |\mathrm{e}^x - 1 - x| \leq \frac{\mathrm{e}^2}{2} x^2.$$

Pour tout $t \in [0,1]$ et pour tout $h \in [-1,1]$, on a $-\left(1+t^2\right) h \in [-2,2]$, ainsi

$$\left| \mathrm{e}^{-\left(1+t^2\right)h} - 1 + \left(1+t^2\right) h \right| \leq \frac{\mathrm{e}^2}{2} \left(1+t^2\right)^2 h^2 \leq 2\mathrm{e}^2 h^2.$$

En multipliant cette inégalité par $\dfrac{\mathrm{e}^{-x\left(1+t^2\right)}}{1+t^2} \geq 0$ ($x \in \mathbf{R}$), on obtient

$$\left| \frac{\mathrm{e}^{-(x+h)\left(1+t^2\right)}}{1+t^2} - \frac{\mathrm{e}^{-x\left(1+t^2\right)}}{1+t^2} + h\mathrm{e}^{-x\left(1+t^2\right)} \right| \leq 2\mathrm{e}^2 \frac{\mathrm{e}^{-x\left(1+t^2\right)}}{1+t^2} h^2.$$

En intégrant cette inégalité entre 0 et 1 en utilisant l'inégalité triangulaire, on a

$$\left| \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-(x+h)\left(1+t^2\right)}}{1+t^2}\mathrm{d}t - \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-x\left(1+t^2\right)}}{1+t^2}\mathrm{d}t + h\int_0^1 \mathrm{e}^{-x\left(1+t^2\right)}\mathrm{d}t \right| \leq 2\mathrm{e}^2 h^2 \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-x\left(1+t^2\right)}}{1+t^2}\mathrm{d}t.$$

En divisant par $|h| \geq 0$ (que l'on suppose non nul), on peut écrire

$$\left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \int_0^1 \mathrm{e}^{-x\left(1+t^2\right)}\mathrm{d}t \right| \leq 2\mathrm{e}^2 |h| \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-x\left(1+t^2\right)}}{1+t^2}\mathrm{d}t.$$

En faisant tendre h vers 0, on en déduit que

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = -\int_0^1 \mathrm{e}^{-x\left(1+t^2\right)}\mathrm{d}t.$$

Ainsi, f est dérivable sur $\mathbf{R}$ et

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad f'(x) = -\int_0^1 \mathrm{e}^{-x\left(1+t^2\right)}\mathrm{d}t.$$

Soit la fonction h définie sur $\mathbf{R}$ par

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad h(x) = f\left(x^2\right) + g(x).$$

h est dérivable sur $\mathbf{R}$ et

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad h'(x) = -2x\int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2\left(1+t^2\right)}\mathrm{d}t + 2\mathrm{e}^{-x^2}\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t = -2x\mathrm{e}^{-x^2}\int_0^1 \mathrm{e}^{-(xt)^2}\mathrm{d}t + 2\mathrm{e}^{-x^2}\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t.$$

Le changement de variable $u = tx$ dans la première intégrale donne

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad h'(x) = -2\mathrm{e}^{-x^2}\int_0^x \mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u + 2\mathrm{e}^{-x^2}\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t = 0.$$

Comme $\mathbf{R}$ est un intervalle, on en déduit que h est constante. Or,

$$h(0) = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t = [\mathrm{Arctan}(t)]_0^1 = \frac{\pi}{4},$$

d'où pour tout $x \in \mathbf{R}$, $h(x) = \dfrac{\pi}{4}$. Enfin,

$$\forall x \geq 0, \quad 0 \leq f(x) \leq \mathrm{e}^{-x}$$

car pour tout $t \in [0,1]$, $\dfrac{\mathrm{e}^{-x\left(1+t^2\right)}}{1+t^2} \leq \mathrm{e}^{-x}$.
On en déduit donc que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, ainsi en utilisant le fait que h est constante, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \dfrac{\pi}{4}$.
Or, pour tout $x \geq 0$, $\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t \geq 0$, ainsi

$$\lim_{x\to+\infty} \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t = \sqrt{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$