Interrogation 1

Jeudi 10 septembre

Exercice 1.

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

1. Soit u définie sur $\mathbf{K}^3$ par $u(x,y,z) = (x+y, y+z, z+x)$. Vérifier que u est linéaire. Déterminer son noyau et son image.
2. Soit la famille $\mathscr{C} = ((1,3), (2,1))$ de $\mathbf{K}^2$. On note $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathbf{K}^2$.
   (a) Vérifier que $\mathscr{C}$ est une base de $\mathbf{K}^2$.
   (b) Préciser $P = \mathrm{Pass}(\mathscr{B} \to \mathscr{C})$. Donner aussi son inverse.
   (c) Donner les coordonnées de $(1,1)$ dans la base $\mathscr{C}$.
3. Soit $E = \mathbf{K}_2[X]$. Soient $F = \{P \in E,\ P(0) = P(1) = 0\}$, $G = \{P \in E,\ P(1) = P(2) = 0\}$ et $H = \{P \in E,\ P(2) = P(3) = 0\}$.
   Montrer que $E = F \oplus G \oplus H$.

Exercice 2.

Soit l'application u définie sur $\mathbf{K}_3[X]$ définie par $u(P) = P(X+1)$. Ainsi, par exemple, $u\left(X^2\right) = (X+1)^2 = X^2 + 2X + 1$.

1. Vérifier que $u \in \mathscr{L}(\mathbf{K}_3[X])$.
2. Donner la matrice M de u dans la base canonique de $\mathbf{K}_3[X]$. Vérifier que cette matrice est inversible.
3. Soit l'application v définie sur $\mathbf{K}_3[X]$ par $v(P) = P(X-1)$. On admet que v est un endomorphisme de $\mathbf{K}_3[X]$.
   (a) Montrer que :
   $$\forall P \in \mathbf{K}_3[X], \quad (u \circ v)(P) = P.$$
   (b) En déduire l'inverse de M.

Exercice 3. *D'après oral CCP TSI*

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Soit $f \in \mathscr{L}(\mathscr{M}_2(\mathbf{R}))$ définie par $f(M) = AM$.

1. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f)$.
2. f est-elle surjective ?
3. Déterminer une base de $\mathrm{Im}(f)$.
4. A-t-on $\mathscr{M}_2(\mathbf{R}) = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$?