Chapitre 2 : Exercices

Exercice 1.

Étudier la convergence des intégrales suivantes et les calculer en cas de convergence :

1. $\displaystyle\int_1^2 \frac{\mathrm{d}t}{(t-1)^2}$;
2. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos(t)}{\sqrt{\sin(t)}}\mathrm{d}t$;
3. $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}$;
4. $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$;
5. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \tan(t)\,\mathrm{d}t$;
6. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t$.

Exercice 2.

Soit a un réel strictement positif. Montrer que les intégrales suivantes convergent et calculer leurs valeurs :

$$I = \int_0^{+\infty} \cos(t)\,\mathrm{e}^{-at}\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad J = \int_0^{+\infty} \sin(t)\,\mathrm{e}^{-at}\mathrm{d}t.$$

Exercice 3.

Étudier la convergence des intégrales ci-dessous :

1. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{(t-1)(t+5)}{t^2(t^2+1)}\mathrm{d}t$;
2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{e}^t-1}$;
3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos\left(\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t$;
4. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t$;
5. $\displaystyle\int_0^3 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}\sqrt{3-t}}$;
6. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^3+1}\mathrm{d}t$;
7. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(t)\sin\left(\mathrm{e}^{-t}\right)\mathrm{d}t$;
8. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)}{(1-t)^{3/2}}\mathrm{d}t$;
9. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1-\sqrt{t}}$;
10. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\sqrt[3]{t+1}-\sqrt[3]{t}\right)^2\mathrm{d}t$;
11. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(t+2-\sqrt{t^2+4t+1}\right)\mathrm{d}t$;
12. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos\left(t^2\right)\mathrm{d}t$.

Exercice 4.

Prouver la convergence et calculer les intégrales suivantes en procédant aux changement de variable indiqué :

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$ (poser $u=\sqrt{t}$) ;
2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(\mathrm{e}^t+1)(\mathrm{e}^{-t}+1)}$ (poser $u=\mathrm{e}^t$) ;
3. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t(1-t)}}$ (poser $t=(1+\sin(x))/2$) ;
4. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{e}^t+1}$ (poser $u=\mathrm{e}^t$).

Exercice 5.

Pour $a \in \mathbf{R}_+^*$, on considère

$$I_a = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)(1+t^a)} \quad \text{et} \quad J_a = \int_0^{+\infty} \frac{t^a}{(1+t^2)(1+t^a)}\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que les intégrales I_a et J_a sont convergentes.

2. En posant $u = 1/t$, montrer que $I_a = J_a$.
3. Calculer $I_a + J_a$. En déduire la valeur de I_a et J_a.

Exercice 6.

Pour $a \in \mathbf{R}_+^*$, on considère
$$I_a = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{a^2 + t^2} \mathrm{d}t.$$

1. Montrer que pour tout $t \in [1, +\infty[$, $0 \leq \ln(t) \leq \sqrt{t}$.
2. Montrer que l'intégrale I_a converge pour tout $a > 0$.
3. En posant $u = 1/t$, montrer que $I_1 = 0$.
4. En posant $t = au$, donner la valeur de I_a pour $a > 0$.

Exercice 7.

On a vu en cours que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} \mathrm{d}t$ converge. On va montrer qu'elle n'est pas absolument convergente.

1. Justifier que tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \left| \frac{\sin(t)}{t} \right| \geq \frac{2}{(n+1)\pi}$.
2. Conclure.

Exercice 8.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-t} \mathrm{d}t$.

1. Montrer que I_0 converge et montrer que $I_0 = 1$.
2. Soit $A \geq 0$. Montrer que
$$\int_0^A t^{n+1} \mathrm{e}^{-t} \mathrm{d}t = -A^{n+1} \mathrm{e}^{-A} + (n+1) \int_0^A t^n \mathrm{e}^{-t} \mathrm{d}t.$$
3. Montrer par récurrence que I_n converge pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} = (n+1) I_n$. En déduire la valeur de I_n.

Exercice 9.

Pour $x \in \mathbf{R}$, on pose $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t} \mathrm{d}t$.

1. Donner le domaine de définition de f.
2. Étudier la monotonie de f.
3. Calculer $f(x) + f(x+1)$ pour $x \in \mathbf{R}_+^*$.
4. Calculer la limite de f en $+\infty$ et donner un équivalent simple de f en $+\infty$.
5. Calculer la limite de f en 0^+ et donner un équivalent simple de f en 0^+.

Exercice 10.

Soit la fonction g définie sur $[0, 1[$ par $g(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{1}{\ln(t)} \mathrm{d}t$.

1. Montrer que g est bien définie sur $[0, 1[$ et continue sur $[0, 1[$.
2. Montrer que g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0, 1[$ et calculer sa dérivée g' puis déterminer ses variations.
3. Soit $x \in]0, 1[$. Montrer que pour tout $t \in [x^2, x]$,
$$\frac{x}{t \ln(t)} \leq \frac{t}{t \ln(t)} \leq \frac{x^2}{t \ln(t)},$$
puis encadrer $g(x)$.
4. Montrer que g est prolongeable par continuité en 1.
5. Montrer que g' admet une limite à gauche en 1 puis, en utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que g est dérivable en 1 et trouver la valeur de $g'(1)$.