Programme de colle : du 21 au 25 septembre

1 Compléments d'algèbre linéaire

1. Révisions sur la notion de sous-espace vectoriel. Exemples.
2. Notion de famille (quelconque) libre/liée / génératrice. Une famille est liée si, et seulement si l'un des vecteurs est combinaison linéaire des autres.
3. Base d'un espace vectoriel. Une famille est une base si, et seulement si tout vecteur s'écrit comme une combinaison linéaire unique d'éléments de cette famille (admis). Base canonique de $\mathbf{K}[X]$.
4. Une famille de $\mathbf{K}[X]$ échelonnée en degré et ne contenant pas le polynôme nul est libre (résultat admis). Conséquence : une famille de polynômes (P_n) avec $\deg(P_n) = n$ pour tout $n \in \mathbf{N}$ est une base de $\mathbf{K}[X]$.
5. Rappels sur les applications linéaires. Image et noyau. Ce sont des sous-espaces vectoriels. Théorème du rang. Exemples de détermination de noyau et d'image d'applications linéaires.
6. Rappels sur les matrices d'applications linéaires. Relation $Y = AX$.
7. Rappels sur les formules de changement de base. Matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{C}$, notée $\mathrm{Pass}(\mathscr{B} \to \mathscr{C})$: c'est la matrice des coordonnées des vecteurs de $\mathscr{C}$ exprimées dans la base $\mathscr{B}$. Inversibilité des matrices de passage. Rappel de l'inversibilité des matrices 2×2. Formules de changement de base pour les vecteurs, pour les endomorphismes.
8. Somme de p sous-espaces vectoriels. Définition de la somme directe de p sous-espaces vectoriels $F_1, \ldots, F_p$. La somme est directe si, et seulement si, $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} f_i = 0 \implies f_i = 0$. Base adaptée à une somme directe. Exemples.
9. Hyperplan d'un espace vectoriel. Un sous-espace vectoriel est un hyperplan si, et seulement si, il est le noyau d'une forme linéaire non nulle (admis).
10. Sous-espace stable. Matrice d'une application linéaire u dans une base adaptée à la somme directe $E = F_1 \oplus \cdots \oplus F_p$ avec F_i stable par u.
11. Trace d'une matrice. Deux matrices semblables ont même trace. La réciproque est fausse. Trace d'un endomorphisme. Exemples.
12. Transposée d'une matrice. Matrice symétrique/antisymétrique. Somme directe $\mathscr{M}_n(\mathbf{K}) = \mathscr{S}_n(\mathbf{K}) \oplus \mathscr{A}_n(\mathbf{K})$.

2 Intégration

1. Définition de l'intégrale d'une fonction continue $f : [a, b[\longrightarrow \mathbf{K}$, $f :]a, b] \longrightarrow \mathbf{K}$ et $f :]a, b[\longrightarrow \mathbf{K}$.
2. Propriétés fondamentales des intégrales convergentes : linéarité, positivité, définie positive et relation de Chasles.
3. Formule du changement de variable. Après un changement de variable, les intégrales sont de même nature.
4. Intégrales de référence : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda t}\mathrm{d}t$, $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)\,\mathrm{d}t$ et intégrales de Riemann (en 0 et en $+\infty$).
5. Règles de comparaison pour les fonctions positives : par inégalité, par équivalence. Exemples.