Correction du devoir surveillé numéro 1

Exercice 1.

1. • Soient M et N deux matrices de Δ_A et $\lambda \in \mathbf{K}$. On a :

$$\begin{aligned} M+\lambda N+(M+\lambda N)^T &= M+\lambda N+M^T+\lambda N^T \quad \text{par linéarité de la transposition} \\ &= M+M^T+\lambda\left(N+N^T\right) \\ &= \operatorname{Tr}(M)A+\lambda\operatorname{Tr}(N)A \quad \text{car } M \text{ et } N \text{ sont dans } \Delta_A \\ &= \operatorname{Tr}(M+\lambda N)A \quad \text{par linéarité de la trace} \end{aligned}$$

   Ainsi, $M+\lambda N \in \Delta_A$, donc Δ_A est un sous espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$.

   • Soit $M \in \mathscr{A}_n(\mathbf{K})$.

   ⋆ D'une part, on a $M=-M^T$, donc $M+M^T=0$.

   ⋆ D'autre part, on a $\operatorname{Tr}(M)=\operatorname{Tr}\left(-M^T\right)=-\operatorname{Tr}\left(M^T\right)=-\operatorname{Tr}(M)$ (linéarité de la trace et invariance par transposition), donc $\operatorname{Tr}(M)=0$, puis $\operatorname{Tr}(M)A=0$.

   Ainsi, $A \in \Delta_A$, donc $\mathscr{A}_n(\mathbf{K}) \subset \Delta_A$.

2. Cette question a été traitée en cours.

3. Soit $M \in \Delta_A$. de l'égalité $M+M^T=\operatorname{Tr}(M)A$, on a (linéarité de la trace et invariance par transposition) :

$$\operatorname{Tr}\left(M+M^T\right)=\operatorname{Tr}(\operatorname{Tr}(M)A),$$

   soit

$$2\operatorname{Tr}(M)=\operatorname{Tr}(M)\operatorname{Tr}(A).$$

   On en déduit donc que $\operatorname{Tr}(M)(2-\operatorname{Tr}(A))=0$. Or, $\operatorname{Tr}(A)\neq 2$, donc $\operatorname{Tr}(M)=0$.
   Comme $M \in \Delta_A$, on a : $M+M^T=0$, soit $M=-M^T$, donc $M \in \mathscr{A}_n(\mathbf{K})$.
   La question 1 assure alors que $\Delta_A=\mathscr{A}_n(\mathbf{K})$.

4. (a) On a (linéarité de la trace) : $\left(M+M^T\right)^T=M^T+\left(M^T\right)^T=M^T+M$ car $\left(M^T\right)^T=M$, ainsi $M+M^T \in \mathscr{S}_n(\mathbf{K})$.

   (b) Soit $M \in \Delta_A$. Si $\operatorname{Tr}(M)\neq 0$, alors $\operatorname{Tr}(M)A \notin \mathscr{S}_n(\mathbf{K})$, ce qui contredit le fait que $\operatorname{Tr}(M)A=M+M^T \in \mathscr{S}_n(\mathbf{K})$.
   On en déduit que $\operatorname{Tr}(M)=0$, puis $M+M^T=0$, soit $M \in \mathscr{A}_n(\mathbf{K})$.
   La question 1 assure alors que $\Delta_A=\mathscr{A}_n(\mathbf{K})$.

   (c) Soit $M \in \Delta_A$. D'après la question 2, il existe $M_1 \in \mathscr{S}_n(\mathbf{K})$ et $M_2 \in \mathscr{A}_n(\mathbf{K})$ telles que $M=M_1+M_2$. En utilisant la linéarité de la transposition et de la trace, on a :

$$M_1+M_2+M_1^T+M_2^T=\operatorname{Tr}(M_1)A+\operatorname{Tr}(M_2)A.$$

   Or, M_2 est antisymétrique, donc la ligne précédente se simplifie en

$$2M_1=\operatorname{Tr}(M_1)A,$$

   soit $M_1 \in \operatorname{Vect}(A)$, puis $M \in \operatorname{Vect}(A)+\mathscr{A}_n(\mathbf{K})=\operatorname{Vect}(A)\oplus\mathscr{A}_n(\mathbf{K})$ car A est symétrique.
   Réciproquement si $M \in \operatorname{Vect}(A)\oplus\mathscr{A}_n(\mathbf{K})$, alors $M \in \Delta_A$.
   Il s'ensuit que $\Delta_A=\operatorname{Vect}(A)\oplus\mathscr{A}_n(\mathbf{K})$.

Exercice 2.

1. Cette question a été traitée en cours.
2.
   - Si $a = 0$, $I(a)$ converge et $I(a) = 0$ car l'intégrande est nulle sur $\mathbf{R}_+$
   - Si $a > 0$. On fait le changement de variable $u = at$ dans l'intégrale $I(a)$. Le changement de variable est $\mathscr{C}^1$, bijectif de $]0, +\infty[$ sur $]0, +\infty[$ et croissant. Le théorème de changement de variable assure alors que intégrales $I(a)$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u/a}\frac{1}{a}\mathrm{d}u = I$ sont de même nature. Or, I converge, donc $I(a)$ converge aussi et $I(a) = I = \dfrac{\pi}{2}$.
   - Si $a < 0$. On fait le changement de variable $u = -at$ dans l'intégrale $I(a)$. Le changement de variable est $\mathscr{C}^1$, bijectif de $]0, +\infty[$ sur $]0, +\infty[$ et ecroissant. Le théorème de changement de variable assure alors que intégrales $I(a)$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(-u)}{-u/a}\frac{1}{-a}\mathrm{d}u = -\int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u}\mathrm{d}u = -I$ sont de même nature. Or, I converge, donc $I(a)$ converge aussi et $I(a) = -I = -\dfrac{\pi}{2}$.
3. (a) Soit $f : t \longmapsto \dfrac{\sin^2(t)}{t^2}$. f est continue sur $]0, +\infty[$. On étudie la convergence de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin^2(t)}{t^2}\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2}\mathrm{d}t$.

   - Comme $\dfrac{\sin^2(t)}{t^2} \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{t^2}{t^2} = 1$, f la fonction $t \longmapsto \dfrac{\sin^2(t)}{t^2}$ est prolongeable par continuité en 0, donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin^2(t)}{t^2}\mathrm{d}t$ converge.
   - On remarque que pour tout $t \in [1, +\infty[$, $\left|\dfrac{\sin^2(t)}{t^2}\right| \leq \dfrac{1}{t^2}$. Or l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$ converge (intégrale de Riemann avec $\alpha = 2 > 1$), donc par comparaison par inégalité des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2}\mathrm{d}t$ converge absolument, donc converge.

   Par somme, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2}\mathrm{d}t$ converge.

   (b) On traite séparemment la convergence des intégrales $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin^2(t)}{t^2}\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2}\mathrm{d}t$.

   - Soit $\varepsilon \in]0, 1]$. On fait une intégration par parties dans $\displaystyle\int_\varepsilon^1 \frac{\sin^2(t)}{t^2}\mathrm{d}t$. On pose $u : t \longmapsto \sin^2(t)$ et $v : t \longmapsto \dfrac{1}{t}$. Les fonctions u et v sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[\varepsilon, 1]$. La formule d'intégration par parties donne :

   $$\begin{aligned}\int_\varepsilon^1 \frac{\sin^2(t)}{t^2}\mathrm{d}t &= \left[-\frac{\sin^2(t)}{t}\right]_\varepsilon^1 + \int_\varepsilon^1 \frac{2\cos(t)\sin(t)}{t}\mathrm{d}t \\ &= -\sin^2(1) + \frac{\sin^2(\varepsilon)}{\varepsilon} + \int_\varepsilon^1 \frac{\sin(2t)}{t}\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

   Or, $\sin^2(\varepsilon) \underset{\varepsilon\to 0}{\sim} \varepsilon^2$, donc $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\sin^2(\varepsilon)}{\varepsilon} = 0$. Puis, comme l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin(2t)}{t}\mathrm{d}t$ converge, on a $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1 \frac{\sin(2t)}{t}\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{\sin(2t)}{t}\mathrm{d}t$. Il s'ensuit que :

   $$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1 \frac{\sin^2(t)}{t^2}\mathrm{d}t = -\sin^2(1) + \int_0^1 \frac{\sin(2t)}{t}\mathrm{d}t.$$

   - La même intégration par parties montre que

   $$\lim_{A\to+\infty}\int_1^A \frac{\sin^2(t)}{t^2}\mathrm{d}t = \sin^2(1) + \int_1^A \frac{\sin(2t)}{t}\mathrm{d}t.$$

Par somme et en utilisant la question 2, on en déduit que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2}\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(2t)}{t}\mathrm{d}t = I(2) = \frac{\pi}{2}.$$

4. (a) Pour tout $t > 0$, on a

$$\frac{\sin(at)\cos(bt)}{t} = \frac{1}{2} \times \frac{\sin((a-b)t)}{t} + \frac{1}{2} \times \frac{\sin((a+b)t)}{t}.$$

Comme les intégrales $I(a-b)$ et $I(a+b)$ convergent, on en déduit que $K(a,b)$ converge et :

$$K(a,b) = \frac{1}{2}I(a-b) + \frac{1}{2}I(a+b).$$

(b) En reprenant l'expression de $I(a)$ obtenue à la question 2, on a :

$$K(a,b) = \begin{cases} \pi/2 & \text{si } a-b>0 \text{ et } a+b>0 \\ -\pi/2 & \text{si } a-b<0 \text{ et } a+b<0 \\ 0 & \text{si } (a-b<0 \text{ et } a+b>0) \text{ ou } (a-b>0 \text{ et } a+b<0) \\ 0 & \text{si } a=b=0 \\ \pi/4 & \text{si } a=b>0 \\ -\pi/4 & \text{si } a=b<0 \\ \pi/4 & \text{si } a=-b>0 \\ -\pi/4 & \text{si } a=-b<0 \end{cases}.$$

Cela se simplifie en :

$$K(a,b) = \begin{cases} \pi/2 & \text{si } a>|b| \\ -\pi/2 & \text{si } a<-|b| \\ 0 & \text{si } |a|<|b| \\ 0 & \text{si } a=b=0 \\ \pi/4 & \text{si } a=b>0 \\ -\pi/4 & \text{si } a=b<0 \\ \pi/4 & \text{si } a=-b>0 \\ -\pi/4 & \text{si } a=-b<0 \end{cases}.$$

Exercice 3.

1. Soit $f : t \longmapsto \ln(\sin(t))$. f est continue sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$. De plus,

$$\ln(\sin(t)) \underset{t\to 0}{=} \ln(t + o(t)) \underset{t\to 0}{=} \ln(t(1+o(1))) \underset{t\to 0}{=} \ln(t) + \ln(1+o(1)) \underset{t\to 0}{\sim} \ln(t).$$

Or, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(t)\,\mathrm{d}t$ converge. Par comparaison par équivalence des intégrales de fonctions de signe constant, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(\sin(t))\,\mathrm{d}t$ converge.

2. On suit l'indication et on fait le changement de variable $u = \frac{\pi}{2} - t$ dans l'intégrale I. La changement de variable est $\mathscr{C}^1$, bijectif de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ et décroissant. Ainsi, l'intégrale $\displaystyle -\int_{\pi/2}^{0} \ln\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - u\right)\right)\mathrm{d}u$ converge et est égale à I. Or, $\sin\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \cos(u)$, donc

$$-\int_{\pi/2}^{0} \ln\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - u\right)\right)\mathrm{d}u = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos(u))\,\mathrm{d}u = J.$$

Donc l'intégrale J converge et $I = J$.

3. On a :

$$\begin{aligned} I+J &= \int_0^{\pi/2} \ln(\sin(t))\,\mathrm{d}t + \int_0^{\pi/2} \ln(\cos(t))\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\pi/2} \ln(\sin(t)\cos(t))\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\pi/2} \ln\left(\frac{1}{2}\sin(2t)\right)\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\pi/2} \left(-\ln(2) + \ln(\sin(2t))\right)\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Comme les intégrales $I+J$ et $\displaystyle\int_0^{\pi/2} -\ln(2)\,\mathrm{d}t$ convergent, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(\sin(2t))\,\mathrm{d}t$ converge. Le formule de changement de variable $u=2t$ dans cette intégrale (qui est de classe $\mathscr{C}^1$, bijectif de $\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$ sur $]0,\pi]$ et croissant) assure que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\pi} \ln(\sin(u))\,\mathrm{d}u$ converge et :

$$\int_0^{\pi/2} \ln(\sin(2t))\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \ln(\sin(u))\,\mathrm{d}u.$$

La relation de Chasles donne :

$$\int_0^{\pi/2} \ln(\sin(2t))\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \ln(\sin(u))\,\mathrm{d}u + \frac{1}{2}\int_{\pi/2}^{\pi} \ln(\sin(u))\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}I + \frac{1}{2}\int_{\pi/2}^{\pi} \ln(\sin(u))\,\mathrm{d}u. \quad (1)$$

On fait le changement de variable $u=\pi-t$ (qui est de classe $\mathscr{C}^1$, bijectif de $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right[$ sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$ et décroissant). Il s'ensuit que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(\sin(u-t))\,\mathrm{d}t$ converge et :

$$\int_{\pi/2}^{\pi} \ln(\sin(u))\,\mathrm{d}u = -\int_{\pi/2}^{0} \ln(\sin(\pi-t))\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin(t))\,\mathrm{d}t = I. \quad (2)$$

En reprenant les lignes (1) et (2), on en déduit que $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(\sin(2t))\,\mathrm{d}t = I$. Il s'ensuit que

$$I+J = -\frac{\pi\ln(2)}{2} + I,$$

soit $J = -\dfrac{\pi\ln(2)}{2}$. Puis, d'après la question 2, on a $I=J=-\dfrac{\pi\ln(2)}{2}$.

Exercice 4.

1. Soit $(a_0,a_1,\ldots,a_N)\in\mathbf{R}^{N+1}$ tel que $a_0e_0+\cdots+a_Ne_N=0$. Il s'ensuit que : pour tout $x\in\mathbf{R}_+$,

$$0 = a_0\mathrm{e}^{-x} + a_1x\mathrm{e}^{-x} + \cdots + a_Nx^N\mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{-x}\left(a_0 + a_1x + \cdots + a_Nx^N\right).$$

Comme $\mathrm{e}^{-x}\neq 0$ pour tout $x\in\mathbf{R}_+$, on en déduit que

$$\forall x\in\mathbf{R}_+,\quad a_0+a_1x+\cdots+a_Nx^N = 0.$$

La fonction polynomiale $x\longmapsto a_0+a_1x+\cdots+a_Nx^N$ a une infinité de racines donc ses coefficients sont nuls, soit $a_0=\cdots=a_N=0$.
On a montré que la famille $(e_0,\ldots,e_N)$ est une famille libre de F. Elle est génératrice par définition, donc elle est une base de F.
On en déduit que F est de dimension finie et $\dim(F)=N+1$.

2. (a) Déjà, si $f \in F$, il est clair que $\Delta(f) \in F$. La linéarité de Δ résulte de la linéarité de la dérivation.

   (b) Pour tout $k \in [\![1, N]\!]$ et pour tout $x \in \mathbf{R}_+$, on a :

   $$\Delta(e_k)(x) = kx^{k-1}\mathrm{e}^{-x} - x^k\mathrm{e}^{-x}.$$

   Il s'ensuit que $\Delta(e_k) = -e_k + ke_{k-1}$. On note aussi que $\Delta(e_0) = -e_0$. Il s'ensuit que la matrice de Δ que la base $\mathscr{B}$ est $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & N \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 \end{pmatrix}$.

   (c) A est triangulaire supérieure avec des -1 sur la diagonale, dont $\det(A) = (-1)^{N+1} \neq 0$, donc A est inversible et Δ est un automorphisme de F.

   (d) A est triangulaire, donc $\mathrm{Sp}(A) = \{-1\}$. Si A était diagonalisable, il existerait $P \in \mathrm{GL}_{N+1}(\mathbf{R})$ telle que $A = P\mathrm{I}_{N+1}P^{-1} = -\mathrm{I}_{N+1}$. Or, $A \neq -\mathrm{I}_{N+1}$, donc A n'est pas diagonalisable.

Problème

Partie 1 : Étude de deux applications

1. Il est clair que si $P \in \mathbf{R}_2[X]$, alors $f(P) \in \mathbf{R}_2[X]$. De plus, la linéarité de f est facile à vérifier.
2. La linéarité de φ est facile à vérifier.
3. On a :

   $$f(1) = 1, \quad f(X) = \frac{1}{2}X + \frac{1}{4} \quad \text{et} \quad f\left(X^2\right) = \frac{1}{4}X^2 + \frac{1}{4}X + \frac{1}{8}.$$

   Il s'ensuit que la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$ est $\begin{pmatrix} 1 & 1/4 & 1/8 \\ 0 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}$.
4. Comme la matrice est précédente est inversible car triangulaire et tous les éléments sur la diagonale sont non nuls, on en déduit que f est bijective, donc injective et surjective.
5. Soit $P(X) = aX^2 + bX + c \in \mathbf{R}_2[X]$ avec $(a, b, c) \in \mathbf{R}^3$. On a :

   $$\begin{aligned} P(X) \in \mathrm{Ker}(\varphi) &\iff \varphi(P(X)) = 0 \\ &\iff P(1) = a + b + c = 0 \\ &\iff a = -b - c \\ &\iff P(X) = (-b-c)X^2 + bX + c = b\left(-X^2 + X\right) + c\left(-X^2 + 1\right). \end{aligned}$$

   Il s'ensuit que $\mathrm{Ker}(\varphi) = \mathrm{Vect}\left(-X^2 + X, -X^2 + 1\right)$, en particulier, la famille $\left(-X^2 + X, -X^2 + 1\right)$ est génératrice de $\mathrm{Ker}(\varphi)$. Les deux polynômes $-X^2 + X$ et $-X^2 + 1$ ne sont pas colinéaires, la famille $\left(-X^2 + X, -X^2 + 1\right)$ est libre dans $\mathbf{R}_2[X]$, donc forme une base de $\mathrm{Ker}(\varphi)$.
   On en déduit que $\dim(\mathrm{Ker}(\varphi)) = 2$.
6.
   - Comme $\mathrm{Ker}(\varphi) \neq \{0\}$, φ n'est pas injective.
   - Le théorème du rang assure que

     $$\mathrm{rg}(\varphi) = \dim(\mathbf{R}_2[X]) - \dim(\mathrm{Ker}(\varphi)) = 3 - 2 = 1.$$

     Or, $\mathrm{Im}(\varphi) \subset \mathbf{R}$ et ces deux espaces vectoriels ont la même dimension, donc $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathbf{R}$. En particulier, φ est surjective.

Partie 2 : Calcul des puissances successives d'une matrice

1. La famille $\mathscr{B}'$ est une famille de $\mathbf{R}_2[X]$ échelonnée en degré et ne contenant pas le polynôme nul : elle est donc libre.
   Elle contient trois éléments dans $\mathbf{R}_2[X]$ de dimension 3, elle est donc une base de $\mathbf{R}_2[X]$.
2. Par définition, on a $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$.
3. On a :
$$f(1) = 1,$$
$$f(-2X+1) = \frac{1}{2}\left(-2\left(\frac{X}{2}\right) + 1 - 2\left(\frac{X+1}{2}\right) + 1\right) = \frac{1}{2}(-2X+1)$$
   et
$$f\left(6X^2 - 6X + 1\right) = \frac{1}{2}\left(6\left(\frac{X}{2}\right)^2 - 6\left(\frac{X}{2}\right) + 1 + 6\left(\frac{X+1}{2}\right)^2 - 6\left(\frac{X+1}{2}\right) + 1\right) = \frac{1}{4}\left(6X^2 - 6X + 1\right).$$
   Il s'ensuit que la matrice de f dans la base $\mathscr{B}'$ est $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}$.
4. Par le cours, on a :
$$A = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(f) = \mathrm{Pass}\left(\mathscr{B} \to \mathscr{B}'\right) \mathrm{mat}_{\mathscr{B}'}(f)\, \mathrm{Pass}\left(\mathscr{B} \to \mathscr{B}'\right)^{-1},$$
   soit
$$A = QMQ^{-1}.$$
   Une simple récurrence permet alors d'établir que :
$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad A^n = QM^nQ^{-1}.$$
   Un simple calcul permet d'établir que $Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1/6 \end{pmatrix}$. Comme M est diagonale, il s'ensuit que
$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbf{N}, \quad A^n &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2^n & 0 \\ 0 & 0 & 1/4^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1/6 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1/2 - 1/2^{n+1} & 1/3 - 1/2^{n+1} + 1/6 \times 1/4^n \\ 0 & 1/2^n & 1/2^n - 1/4^n \\ 0 & 0 & 1/4^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$
5. Si $P(X) = aX^2 + bX + c$, la matrice des coordonnées de $P(X)$ dans la base $\mathscr{B}$ est $\begin{pmatrix} c \\ b \\ a \end{pmatrix}$. Il s'ensuit que la matrice des coordonnées de $f^n(P(X))$ dans la base $\mathscr{B}$ est
$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} 1 & 1/2 - 1/2^{n+1} & 1/3 - 1/2^{n+1} + 1/6 \times 1/4^n \\ 0 & 1/2^n & 1/2^n - 1/4^n \\ 0 & 0 & 1/4^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ b \\ a \end{pmatrix} \\ = &\begin{pmatrix} c + \left(1/2 - 1/2^{n+1}\right) b + \left(1/3 - 1/2^{n+1} + 1/6 \times 1/4^n\right) a \\ 1/2^n b + \left(1/2^n - 1/4^n\right) a \\ 1/4^n a \end{pmatrix}. \end{aligned}$$
   On en déduit que pour tout $n \in \mathbf{N}$:
$$f^n(P(X)) = \left(c + \left(1/2 - 1/2^{n+1}\right) b + \left(1/3 - 1/2^{n+1} + 1/6 \times 1/4^n\right) a\right) + \left(1/2^n b + \left(1/2^n - 1/4^n\right) a\right) X + 1/4^n a X^2.$$

6. La question précédente assure que pour tout $n \in \mathbf{N}$:

   $$\varphi\left(f^n\left(P\left(X\right)\right)\right) = c + \left(1/2 - 1/2^{n+1}\right)b + \left(1/3 - 1/2^{n+1} + 1/6 \times 1/4^n\right)a + 1/2^n b + \left(1/2^n - 1/4^n\right)a + 1/4^n a.$$

   Il s'ensuit que $\lim\limits_{n\to+\infty} \varphi\left(f^n\left(P\left(X\right)\right)\right) = \dfrac{a}{3} + \dfrac{b}{2} + c = \displaystyle\int_0^1 P\left(t\right)\mathrm{d}t$.

Partie 3 : Une autre preuve du résultat précédent

1. On introduit la proposition $\mathscr{P}_n$: « $\forall P\left(X\right) \in \mathbf{R}_2\left[X\right], \quad f^n\left(P\left(X\right)\right) = \dfrac{1}{2^n}\displaystyle\sum_{k=0}^{2^n-1} P\left(\dfrac{X+k}{2^n}\right)$ ».

   La proposition est clairement vraie au rang $n = 0$. On suppose $\mathscr{P}_n$ vraie pour un certain entier n, montrons que $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie. On peut donc écrire :

   $$\begin{array}{rcll} f^{n+1}\left(P\left(X\right)\right) & = & f\left(f^n\left(P\left(X\right)\right)\right) & \\ & = & f\left(\dfrac{1}{2^n}\displaystyle\sum_{k=0}^{2^n-1} P\left(\dfrac{X+k}{2^n}\right)\right) & \text{hypothèse de récurrence} \\ & = & \dfrac{1}{2^n}\displaystyle\sum_{k=0}^{2^n-1} f\left(P\left(\dfrac{X+k}{2^n}\right)\right) & \text{linéarité de } f \\ & = & \dfrac{1}{2^{n+1}}\displaystyle\sum_{k=0}^{2^n-1}\left(P\left(\dfrac{X/2+1}{2^n}\right) + P\left(\dfrac{\left(X+1\right)/2+k}{2^n}\right)\right) & \\ & = & \dfrac{1}{2^{n+1}}\displaystyle\sum_{k=0}^{2^n-1}\left(P\left(\dfrac{X+2k}{2^{n+1}}\right) + P\left(\dfrac{X+2k+1}{2^{n+1}}\right)\right) & \\ & = & \dfrac{1}{2^{n+1}}\displaystyle\sum_{k=0}^{2^{n+1}-1} P\left(\dfrac{X+k}{2^{n+1}}\right). & \end{array}$$

   On a montré que $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie, ce qui termine la récurrence.
2. Comme P est continue sur $[0,1]$, d'après le résultat sur les sommes de Riemann, on a :

   $$\lim_{n\to+\infty} \varphi\left(f^n\left(P\left(X\right)\right)\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{2^n-1} P\left(\frac{1+k}{2^n}\right) = \int_0^1 P\left(t\right)\mathrm{d}t.$$