Correction de l'interrogation 3

Exercice 1.

En faisant $C_i \longleftarrow C_i - C_1$ pour $i \in [\![2,4]\!]$, on a

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ 1 & 4 & 7 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 6 & 9 \end{vmatrix}.$$

On développe par rapport à la première ligne, ainsi :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ 1 & 4 & 7 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 6 \\ 5 & 6 & 9 \end{vmatrix}$$

car le déterminant d'une matrice est égal à celui de sa transposée. On utilise la linéarité du déterminant par rapport à la deuxième et la troisième colonne. On obtient :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ 1 & 4 & 7 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 6 \\ 5 & 6 & 9 \end{vmatrix} = 2 \times 3 \times \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 5 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

car deux colonnes sont égales dans la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 5 & 3 & 3 \end{pmatrix}$.

Exercice 2.

1. • On a $D_2 = \begin{vmatrix} 1+x^2 & x \\ x & 1+x^2 \end{vmatrix} = \left(1+x^2\right)^2 - x^2 = x^4 + x^2 + 1.$
   • En développant par rapport à la première colonne, on a :

$$\begin{aligned} D_3 &= \begin{vmatrix} 1+x^2 & x & 0 \\ x & 1+x^2 & x \\ 0 & x & 1+x^2 \end{vmatrix} \\ &= \left(1+x^2\right) \begin{vmatrix} 1+x^2 & x \\ x & 1+x^2 \end{vmatrix} - x \begin{vmatrix} x & 0 \\ x & 1+x^2 \end{vmatrix} \\ &= \left(1+x^2\right)\left(\left(1+x^2\right)^2 - x^2\right) - \left(1+x^2\right) x^2 \\ &= x^6 + x^4 + x^2 + 1. \end{aligned}$$

2. On suit l'indication et on développe par rapport à la première colonne, on obtient :

$$D_n = \left(1+x^2\right) \begin{vmatrix} 1+x^2 & x & 0 & \cdots & 0 \\ x & 1+x^2 & x & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & x & 1+x^2 & x \\ 0 & \cdots & 0 & x & 1+x^2 \end{vmatrix}_{(n-1)} - x \begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ x & 1+x^2 & x & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & x & 1+x^2 & x \\ 0 & \cdots & 0 & x & 1+x^2 \end{vmatrix}_{(n-1)}.$$

On développe ce dernier déterminant par rapport à la première ligne pour obtenir

$$\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ x & 1+x^2 & x & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & x & 1+x^2 & x \\ 0 & \cdots & 0 & x & 1+x^2 \end{vmatrix}_{(n-1)} = x\left(1+x^2\right) \begin{vmatrix} 1+x^2 & x & 0 & \cdots & 0 \\ x & 1+x^2 & x & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & x & 1+x^2 & x \\ 0 & \cdots & 0 & x & 1+x^2 \end{vmatrix}_{(n-2)}.$$

Il s'ensuit que

$$D_n = \left(1+x^2\right) D_{n-1} - x^2 D_{n-2}.$$

3. On procède par récurrence et, pour $n \geq 2$, on introduit la proposition $\mathscr{P}_n$: « $D_n - D_{n-1} = x^{2(n-2)}\left(D_2 - D_1\right)$ ». $\mathscr{P}_2$ est clairement vraie. Supposons $\mathscr{P}_n$ vraie pour un certain entier naturel n, montrons que $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie. On a :

$$\begin{aligned} D_{n+1} - D_n &= \left(1+x^2\right) D_n - x^2 D_{n-1} - D_n \quad \text{question 2} \\ &= x^2\left(D_n - D_{n-1}\right) \\ &= x^2 x^{2(n-2)}\left(D_2 - D_1\right) \quad \text{hypothèse de récurrence} \\ &= x^{2(n-1)}\left(D_2 - D_1\right). \end{aligned}$$

On a montré que $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie, ce qui termine la récurrence.

4. Pour $n \geq 2$, on pose $\mathscr{P}_n$: « $D_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^{2k}$ ».

La question 1 assure que $\mathscr{P}_2$ est vraie. On suppose $\mathscr{P}_n$ vraie pour un certain entier naturel $n \geq 2$, montrons que $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie. On a :

$$\begin{aligned} D_{n+1} &= D_n + x^{2(n-1)}\left(D_2 - D_1\right) \quad \text{question 3} \\ &= \sum_{k=0}^{n} x^{2k} + x^{2(n-1)} \times x^4 \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} x^{2k}. \end{aligned}$$

On a montré que $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie, ce qui termine la récurrence.

Exercice 3.

La relation $AB + BA = 0$ donne $AB = -BA$, soit $\det(AB) = \det(-BA) = (-1)^n \det(BA)$. Par propriété sur le déterminant, on a :

$$\det(A)\det(B) = (-1)^n \det(B)\det(A).$$

Comme A et B sont inversibles, on a $\det(A) \neq 0$ et $\det(B) \neq 0$, donc $(-1)^n = 1$. On en déduit que n est pair.