Correction de l'interrogation 4

Exercice 1.

1. On a : $\dfrac{n^2}{n^4+\sin(n)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2}$. Or, la série $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{1}{n^2}$ converge (série de Riemann avec $\alpha = 2 > 1$). Par comparaison par équivalence des séries à termes positifs, la série $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{n^2}{n^4+\sin(n)}$ converge.
2. On a : $\ln\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{n^2}$. Or, la série $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{1}{n^2}$ converge (série de Riemann avec $\alpha = 2 > 1$). Par comparaison par équivalence des séries à termes de signe constant, la série $\sum\limits_{n\geq 2} \ln\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)$ converge.
3. On a : $1-\cos\left(\dfrac{1}{n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2n^4}$. Or, la série $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{1}{n^4}$ converge (série de Riemann avec $\alpha = 4 > 1$). Par comparaison par équivalence des séries à termes positifs, la série $\sum\limits_{n\geq 1} \left(1-\cos\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right)$ converge.
4. On pose : $u_n = \dfrac{n^2}{(n-1)!}$. On a $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ et :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^2}{n!} \times \frac{(n-1)!}{n^2} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \times \frac{1}{n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^2 \times \frac{1}{n}.$$

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^2 \times \dfrac{1}{n} = 0 < 1$. D'après le critère de d'Alembert, la série $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{n^2}{(n-1)!}$ converge.

Exercice 2.

1. Soit $(a,b) \in \mathbf{R}^2$. On a :

$$0 \leq (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

Il s'ensuit que $ab \leq \dfrac{1}{2}\left(a^2+b^2\right)$.

2. D'après la question 1, on a :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad 0 \leq \frac{\sqrt{u_n}}{n} = \sqrt{u_n} \times \frac{1}{n} \leq \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{1}{n^2}\right).$$

Or, les séries $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ et $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{1}{n^2}$ convergent, donc par linéarité la série $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{1}{n^2}\right)$ converge.

Par comparaison par inégalité des séries à termes positifs, la série $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{\sqrt{u_n}}{n}$ converge.

Exercice 3.

1. Comme la série $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{1}{n^2}$ converge, le reste $\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{1}{k^2}$ est bien défini.

Soit $f : t \longmapsto \dfrac{1}{t^2}$. f est continue et décroissante sur $\mathbf{R}_+^*$. Ainsi, pour tout $k \geq 2$, on a :

$$\int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leq f(k) \leq \int_{k-1}^{k} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Soit $n \geq 1$ et $N \geq 2$. En sommant entre $n+1$ et N, on a :

$$\sum_{k=n+1}^{N} \int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leq \sum_{k=n+1}^{N} f(k) \leq \sum_{k=n+1}^{N} \int_{k-1}^{k} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

La relation de Chasles donne

$$\int_{n+1}^{N+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leq \sum_{k=n+1}^{N} f(k) \leq \int_{k}^{N} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Comme $t \longmapsto -\dfrac{1}{t}$ est une primitive de f sur $\mathbf{R}_+^*$, on a :

$$\left[-\frac{1}{t}\right]_{n+1}^{N+1} \leq \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k^2} \leq \left[-\frac{1}{t}\right]_{k}^{N},$$

d'où

$$-\frac{1}{N+1} + \frac{1}{n+1} \leq \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k^2} \leq -\frac{1}{N} + \frac{1}{n}.$$

En faisant tendre N vers $+\infty$ (rappelons que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge), on a :

$$\frac{1}{n+1} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{n}.$$

Ainsi, en divisant par $\dfrac{1}{n}$, on a :

$$\frac{n}{n+1} \leq \frac{\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}}{\dfrac{1}{n}} \leq 1.$$

Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} = 1$, par encadrement, on en déduit que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}}{\dfrac{1}{n}} = 1$, soit $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.

2. (a) Soit $x > 0$. On a : $\dfrac{1}{x^2+n^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2}$. Or la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge. Par comparaison par équivalence des séries à termes positifs, la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{1}{x^2+n^2}$ converge.

   (b) Soit $x > 0$ fixé. Soit $f : t \longmapsto \dfrac{1}{t^2+x^2}$. f est continue et décroissante sur $\mathbf{R}_+$. Ainsi,

$$\forall k \geq 1, \quad \int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leq f(k) \leq \int_{k-1}^{k} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

   Soit $n \in \mathbf{N}^*$. En sommant l'inégalité précédente entre 1 et n et en utilisant la relation de Chasles, on a :

$$\int_1^{n+1} \frac{1}{x^2+t^2}\mathrm{d}t \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x^2+k^2} \leq \int_0^{n} \frac{1}{x^2+t^2}\mathrm{d}t.$$

Or,

$$\int_1^{n+1} \frac{1}{x^2+t^2}\mathrm{d}t = \int_1^{n+1} \frac{1}{x^2\left(1+(t/x)^2\right)}\mathrm{d}t.$$

On pose $u = \dfrac{t}{x} \iff t = ux$ (changement de variable affine). La formule du changement de variable donne

$$\begin{aligned}
\int_1^{n+1} \frac{1}{x^2+t^2}\mathrm{d}t &= \int_1^{n+1} \frac{1}{x^2\left(1+(t/x)^2\right)}\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{x}\int_x^{(n+1)x} \frac{1}{1+u^2}\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{x}\left(\mathrm{Arctan}\left((n+1)\,x\right) - \mathrm{Arctan}\,(x)\right).
\end{aligned}$$

Le même changement de variable dans l'intégrale $\displaystyle\int_0^n \frac{1}{x^2+t^2}\mathrm{d}t$ donne :

$$\int_0^n \frac{1}{x^2+t^2}\mathrm{d}t = \frac{1}{x}\mathrm{Arctan}\,(nx)\,.$$

Il s'ensuit que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$,

$$\frac{1}{x}\left(\mathrm{Arctan}\left((n+1)\,x\right) - \mathrm{Arctan}\,(x)\right) \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x^2+k^2} \leq \frac{1}{x}\mathrm{Arctan}\,(nx)\,,$$

soit

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}\left(\mathrm{Arctan}\left((n+1)\,x\right) - \mathrm{Arctan}\,(x)\right) \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{x^2+k^2} \leq \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}\mathrm{Arctan}\,(nx)\,.$$

En faisant tendre n vers $+\infty$ en utilisant le fait que $\displaystyle\lim_{u\to+\infty} \mathrm{Arctan}\,(u) = \frac{\pi}{2}$, on obtient :

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}\left(\frac{\pi}{2} - \mathrm{Arctan}\,(x)\right) \leq S\,(x) \leq \frac{1}{x^2} + \frac{\pi}{2x}.$$

(c) Comme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}\left(\frac{\pi}{2} - \mathrm{Arctan}\,(x)\right)\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x^2} + \frac{\pi}{2x}\right) = 0$, par encadrement, on en déduit que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} S\,(x) = 0$.