

Chapitre 3 : Déterminants

Table des matières

1	Déterminant d'une matrice carrée	2
1.1	Généralités	2
1.2	Propriétés du déterminant	4
1.3	Déterminant de la transposée	5
1.4	Développement par rapport à une ligne ou une colonne	5
2	Déterminant d'une famille de vecteurs	7
3	Déterminant d'un endomorphisme	8
4	Compléments	9
4.1	Déterminant de Vandermonde	9
4.2	Matrices semblables dans \mathbf{C} et dans \mathbf{R}	10
4.3	Une inégalité utile	11

Dans tout le chapitre, \mathbf{K} est le corps \mathbf{R} ou \mathbf{C} . On fixe un entier naturel n non nul.

1 Déterminant d'une matrice carrée

1.1 Généralités

Théorème 1. *Existence et unicité du déterminant.*

Il existe une unique application $\det : \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \rightarrow \mathbf{K}$ telle que :

- (i) \det est linéaire par rapport à chacune de ses colonnes ;
- (ii) la permutation de deux colonnes multiplie le déterminant par -1 ;
- (iii) le déterminant de la matrice I_n vaut 1.

Démonstration. Nous allons faire la preuve lorsque $n = 2$ et $n = 3$, le cas où $n \geq 4$ n'étant pas au programme.

1. Preuve pour $n = 2$.

On procède par analyse/synthèse.

Analyse. Supposons qu'une application f vérifiant les points (i), (ii) et (iii) du théorème existe. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbf{K})$. En utilisant la linéarité par rapport à la première colonne, on a :

$$f(M) = af \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & d \end{pmatrix} + cf \begin{pmatrix} 0 & b \\ 1 & d \end{pmatrix}.$$

En utilisant deux fois la linéarité par rapport à la seconde colonne, on a

$$f(M) = a \left(bf \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + df \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) + c \left(bf \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + df \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right).$$

Or, en permutant les deux colonnes $f \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = -f \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, donc $f \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$. De même, $f \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 0$.

En permutant les deux colonnes et en se servant du fait que $f(I_2) = 1$, on a $f \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -f(I_2) = -1$. Il s'ensuit que

$$f(M) = ad - bc.$$

Synthèse. Soit $f : \mathcal{M}_2(\mathbf{K}) \rightarrow \mathbf{K}$ définie par

$$\forall M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbf{K}), \quad f(M) = ad - bc.$$

On vérifie facilement que f vérifie les points (i), (ii) et (iii) du théorème.

2. Preuve pour $n = 3$.

On procède encore par analyse/synthèse.

Analyse. Supposons qu'une application f vérifiant les points (i), (ii) et (iii) du théorème existe. On pose

$$M = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbf{K}).$$

f est linéaire par rapport à la première colonne, donc

$$f \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} = a_{1,1} f \begin{pmatrix} 1 & a_{1,2} & a_{1,3} \\ 0 & a_{2,2} & a_{2,3} \\ 0 & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} + a_{2,1} f \begin{pmatrix} 0 & a_{1,2} & a_{1,3} \\ 1 & a_{2,2} & a_{2,3} \\ 0 & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} + a_{3,1} f \begin{pmatrix} 0 & a_{1,2} & a_{1,3} \\ 0 & a_{2,2} & a_{2,3} \\ 1 & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix}. \quad (1)$$

De plus, f est linéaire par rapport à la deuxième colonne

$$\begin{aligned} f \begin{pmatrix} 1 & a_{1,2} & a_{1,3} \\ 0 & a_{2,2} & a_{2,3} \\ 0 & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} &= a_{1,2}f \begin{pmatrix} 1 & 1 & a_{1,3} \\ 0 & 0 & a_{2,3} \\ 0 & 0 & a_{3,3} \end{pmatrix} + a_{2,2}f \begin{pmatrix} 1 & 0 & a_{1,3} \\ 0 & 1 & a_{2,3} \\ 0 & 0 & a_{3,3} \end{pmatrix} + a_{3,2}f \begin{pmatrix} 1 & 0 & a_{1,3} \\ 0 & 0 & a_{2,3} \\ 0 & 1 & a_{3,3} \end{pmatrix} \\ &= a_{2,2}f \begin{pmatrix} 1 & 0 & a_{1,3} \\ 0 & 1 & a_{2,3} \\ 0 & 0 & a_{3,3} \end{pmatrix} + a_{3,2}f \begin{pmatrix} 1 & 0 & a_{1,3} \\ 0 & 0 & a_{2,3} \\ 0 & 1 & a_{3,3} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

car, en permutant les deux premières colonnes, on a

$$f \begin{pmatrix} 1 & 1 & a_{1,3} \\ 0 & 0 & a_{2,3} \\ 0 & 0 & a_{3,3} \end{pmatrix} = -f \begin{pmatrix} 1 & 1 & a_{1,3} \\ 0 & 0 & a_{2,3} \\ 0 & 0 & a_{3,3} \end{pmatrix} \iff f \begin{pmatrix} 1 & 1 & a_{1,3} \\ 0 & 0 & a_{2,3} \\ 0 & 0 & a_{3,3} \end{pmatrix} = 0.$$

Par linéarité de f par rapport à la troisième colonne, on a

$$\begin{aligned} f \begin{pmatrix} 1 & 0 & a_{1,3} \\ 0 & 1 & a_{2,3} \\ 0 & 0 & a_{3,3} \end{pmatrix} &= a_{1,3}f \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{2,3}f \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{3,3}f \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= a_{3,3}f(I_3) \\ &= a_{3,3} \end{aligned}$$

car en permutant la première et la troisième colonne, on a $f \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -f \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

donc $f \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$. De même, en permutant la deuxième et la troisième colonne, on a

$$f \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -f \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ soit } f \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 0.$$

On montre de même que $f \begin{pmatrix} 1 & 0 & a_{1,3} \\ 0 & 1 & a_{2,3} \\ 0 & 0 & a_{3,3} \end{pmatrix} = -a_{2,3}$.

Il s'ensuit que

$$f \begin{pmatrix} 1 & a_{1,2} & a_{1,3} \\ 0 & a_{2,2} & a_{2,3} \\ 0 & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} = a_{2,2}a_{3,3} - a_{2,3}a_{3,2}.$$

On montre de même que

$$f \begin{pmatrix} 0 & a_{1,2} & a_{1,3} \\ 1 & a_{2,2} & a_{2,3} \\ 0 & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} = a_{3,2}a_{1,3} - a_{1,2}a_{3,3}$$

et

$$f \begin{pmatrix} 0 & a_{1,2} & a_{1,3} \\ 0 & a_{2,2} & a_{2,3} \\ 1 & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} = a_{1,2}a_{2,3} - a_{2,2}a_{1,3}.$$

En insérant ces trois résultats dans la ligne (1), on obtient

$$f(M) = a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} + a_{2,1}a_{3,2}a_{1,3} + a_{3,1}a_{1,2}a_{2,3} - a_{1,1}a_{2,3}a_{3,2} - a_{1,2}a_{2,1}a_{3,3} - a_{3,1}a_{2,2}a_{1,3}.$$

Synthèse. Soit $f : \mathcal{M}_3(\mathbf{K}) \rightarrow \mathbf{K}$ définie par : pour tout $M = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbf{K})$,

$$f(M) = a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} + a_{2,1}a_{3,2}a_{1,3} + a_{3,1}a_{1,2}a_{2,3} - a_{1,1}a_{2,3}a_{3,2} - a_{1,2}a_{2,1}a_{3,3} - a_{3,1}a_{2,2}a_{1,3}.$$

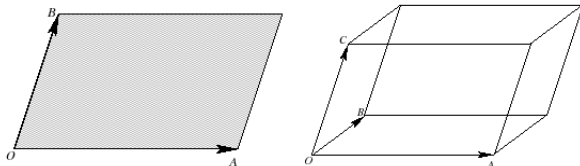
On vérifie « facilement » (c'est pénible!) que f vérifie les points (i), (ii) et (iii) du théorème.

□

Remarque 1. (i) Lorsque $n \in \{2, 3\}$, on retrouve la notion vue en TSI 1.

(ii) Si $n = 2$ et $\mathbf{K} = \mathbf{R}$, le déterminant de la matrice dont on note (u, v) les colonnes est l'aire algébrique du parallélogramme construit sur u et v .

(iii) Si $n = 3$ et $\mathbf{K} = \mathbf{R}$, le déterminant de la matrice dont on note (u, v, w) les colonnes est le volume algébrique du parallépipède construit sur u, v et w .



Exemple 1.

1.2 Propriétés du déterminant

Proposition 1. Déterminant d'une matrice ayant deux colonnes égales.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ ayant deux colonnes égales. Alors, $\det(A) = 0$.

Démonstration. On suppose que les colonnes C_i et C_j sont égales. Par définition du déterminant, lorsque l'on permute les colonnes C_i et C_j le déterminant est multiplié par -1 , ainsi $\det(A) = -\det(A)$, soit $\det(A) = 0$.

□

Proposition 2. Expression de $\det(\lambda A)$, $\lambda \in \mathbf{K}$.

Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, pour tout $\lambda \in \mathbf{K}$, on a $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$.

⚠ Attention à la puissance n !

Remarque 2. Si $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ et $\lambda > 0$, en utilisant l'interprétation géométrique du déterminant, ce résultat permet de retrouver le fait que l'aire (resp. le volume) est multipliée par λ^2 (resp. λ^3) lorsque les distances sont multipliées par λ .

Démonstration. Il suffit d'utiliser la linéarité du déterminant par rapport à chacune de ses variables.

□

Proposition 3. Déterminant et opérations élémentaires sur les colonnes.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.

- (i) Multiplier une colonne par $\lambda \in \mathbf{K}$ multiplie le déterminant par λ .
- (ii) Ajouter à une colonne de A un multiple des autres colonnes ne change pas le déterminant.

Remarque 3. En particulier, une matrice ayant une colonne nulle a un déterminant nul car linéarité par rapport à cette colonne, on a

$$\det(C_1, \dots, 0, \dots, C_n) = 0 \times \det(C_1, \dots, 0, \dots, C_n) = 0.$$

Démonstration. (i) Cela résulte de (i) du théorème 1.

(ii) Soit $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ avec $i \neq j$. Soit $\lambda \in \mathbf{K}$. On note C_1, \dots, C_n les colonnes de A . Par linéarité par rapport à la i -ème colonne, on a :

$$\det(C_1, \dots, C_i + \lambda C_j, \dots, C_j, \dots, C_n) = \det(C_1, \dots, C_i, \dots, C_j, \dots, C_n) + \lambda \det(C_1, \dots, C_j, \dots, C_j, \dots, C_n).$$

Or, d'après la proposition 1, on a $\det(C_1, \dots, C_j, \dots, C_j, \dots, C_n) = 0$, d'où

$$\det(A) = \det(C_1, \dots, C_i + \lambda C_j, \dots, C_j, \dots, C_n).$$

□

Exemple 2.

Proposition 4. *Caractérisation des matrices inversibles à l'aide du déterminant.*

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. A est inversible si, et seulement si, $\det(A) \neq 0$.

Démonstration. On traite séparément les deux implications.

\Rightarrow Supposons A inversible. L'algorithme du pivot de Gauss assure que, en faisant uniquement des opérations du type $C_i \rightarrow C_i + \lambda C_j$ ($\lambda \in \mathbf{K}$) et $C_i \rightarrow \lambda C_i$ ($\lambda \in \mathbf{K}^*$), on peut se ramener, en un nombre fini d'étapes à la matrice I_n .

Or, d'après la proposition 3 ces opérations multiplient le déterminant par un nombre **non nul**.

Ainsi, à l'issue de ces opérations, il existe $\lambda \in \mathbf{K}^*$ tel que $\lambda \det(A) = \det(I_n) = 1$. Ainsi, $\det(A) \neq 0$.

\Leftarrow On raisonne par contraposée et on suppose que A n'est pas inversible. Le rang de A , qui est la dimension de l'espace vectoriel engendré par les colonnes de A , est donc strictement inférieur à n , ainsi une colonne

est combinaison linéaire des autres : par exemple, on peut écrire $C_k = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n \lambda_i C_i$.

En faisant les opérations $C_k \leftarrow C_k - \lambda_i C_i$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{k\}$, on obtient

$$\det(A) = \det(C_1, \dots, 0, \dots, C_n) = 0$$

d'après la remarque 3. □

Proposition 5. *Déterminant d'un produit de matrices.*

Pour tout $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})^2$, on a $\det(AB) = \det(A) \det(B)$.

Démonstration. Admis. □

Corollaire 1. *Déterminant de l'inverse d'une matrice.*

Soit $A \in \text{GL}_n(\mathbf{K})$. Alors, $\det(A)$ est non nul et $\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$.

Démonstration. On a $A \times A^{-1} = I_n$. Par la proposition 5 et par définition, on a

$$1 = \det(I_n) = \det(A \times A^{-1}) = \det(A) \det(A)^{-1}.$$

On en déduit que $\det(A) \neq 0$ et $\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$. □

1.3 Déterminant de la transposée

Proposition 6. *Déterminant de la transposée.*

Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, on a $\det(A) = \det(A^T)$.

Démonstration. Admis. □

Remarque 4. Ainsi, tous les résultats (qui précèdent ou qui suivront) qui portent sur les colonnes des matrices, se généralisent aux lignes de la matrice.

1.4 Développement par rapport à une ligne ou une colonne

Théorème 2. *Développement par rapport à une colonne.*

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $n \geq 2$. On a

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{i,j} \det(A_{i,j})$$

où, pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $A_{i,j} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbf{K})$ est la matrice obtenue à partir de A en retirant la ligne i et la colonne j .

Remarque 5. D'après la remarque 4, on peut aussi développer par rapport à une ligne.

Démonstration. En utilisant la linéarité par rapport à la colonne j , on a :

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n a_{i,j} \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j-1} & 0 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & 0 & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & 0 & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,j-1} & 1 & a_{i,j+1} & \cdots & a_{i,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & 0 & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & 0 & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & 0 & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

En appliquant successivement les opérations $L_i \leftrightarrow L_{i-1}, L_{i-1} \leftrightarrow L_{i-2}, \dots, L_2 \leftrightarrow L_1$ qui multiplie le déterminant par -1 , on a

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} a_{i,j} \begin{vmatrix} a_{i,1} & \cdots & a_{i,j-1} & 1 & a_{i,j+1} & \cdots & a_{i,n} \\ a_{1,1} & \cdots & a_{1,j-1} & 0 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & 0 & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & 0 & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & 0 & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & 0 & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & 0 & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

En appliquant successivement les opérations $C_j \leftrightarrow C_{j-1}, C_{j-1} \leftrightarrow C_{j-2}, \dots, C_2 \leftrightarrow C_1$ qui multiplie le déterminant par -1 , on a

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{i,j} \begin{vmatrix} 1 & a_{i,1} & \cdots & a_{i,j-1} & a_{i,j+1} & \cdots & a_{i,n} \\ 0 & a_{1,1} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ 0 & a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

Les opérations $C_i \leftarrow C_i - a_{i,1}C_1$ (pour $i \in \llbracket 2, n \rrbracket$) donnent

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{i,j} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{1,1} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ 0 & a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

On peut maintenant montrer que l'application φ définie sur $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbf{K})$ par

$$\varphi : \begin{cases} \mathcal{M}_{n-1}(\mathbf{K}) & \longrightarrow \mathbf{K} \\ B = (b_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket^2} & \longmapsto \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_{1,1} & \cdots & b_{1,n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & b_{n-1,1} & \cdots & b_{n-1,n-1} \end{vmatrix} \end{cases}$$

vérifie les points (i), (ii) et (iii) du théorème 1. Ainsi, φ est le déterminant sur $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbf{K})$. Ainsi,

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{i,j} \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

□

Exemple 3. En développant par rapport à la première colonne, on a

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - 2 \times \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 3 \times \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \times 0 - 2 \times 1 + 3 \times 1 = 1.$$

Exemple 4. En développant par rapport à la deuxième ligne, on a

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2 \times \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 1 \times \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} - 0 \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -2 \times 1 + 1 \times 3 - 0 \times (-2) = 1.$$

Remarque 6. Pour se souvenir où placer les signes + et -, on peut se souvenir de la matrice des signes suivante

$$\begin{pmatrix} + & - & + & \cdots & \pm \\ - & + & - & \ddots & \mp \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \mp & \pm & \ddots & \ddots & - \\ \pm & \mp & \cdots & \ddots & + \end{pmatrix}.$$

Proposition 7. *Déterminant d'une matrice triangulaire.*

Le déterminant d'une matrice carrée triangulaire est le produit des éléments sur la diagonale.

Démonstration. On procède par récurrence sur n .

Pour $n = 2$, cela découle de la formule établie pour le déterminant lors de la preuve du théorème 1.

On suppose que pour toute matrice triangulaire carrée d'ordre n , le déterminant est le produit des éléments sur la diagonale.

Soit $A = (a_{i,j})_{(i,j) \in [1,n+1]^2} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbf{K})$ une matrice triangulaire. En développant le déterminant par rapport à la première colonne, on a

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,n+1} \\ 0 & a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,n+1} \\ 0 & 0 & a_{3,3} & \cdots & a_{3,n+1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_{n+1,n+1} \end{vmatrix} = a_{1,1} \begin{vmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,n+1} \\ 0 & a_{3,3} & \cdots & a_{3,n+1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n+1,n+1} \end{vmatrix}.$$

L'hypothèse de récurrence assure alors que $\det(A) = a_{1,1} \times a_{2,2} \times \cdots \times a_{n+1,n+1}$, ce qui termine la récurrence.

□

2 Déterminant d'une famille de vecteurs

Dans cette sous-partie, E est un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbf{N}^*$.

Définition 1. *Déterminant d'une famille de vecteurs par rapport à une base.*

Soient \mathcal{B} une base de E et (v_1, \dots, v_n) une famille de vecteurs de E . Le déterminant de la famille (v_1, \dots, v_n) par rapport à la base \mathcal{B} , noté $\det_{\mathcal{B}}(v_1, \dots, v_n)$, est le déterminant de la matrice $\text{mat}_{\mathcal{B}}(v_1, \dots, v_n)$.

Exemple 5. Calculer le déterminant de la famille $\mathcal{C} = (1, X - 1, (X - 1)^2)$ de $\mathbf{K}_2[X]$ par rapport à la base canonique \mathcal{B} de $\mathbf{K}_2[X]$.

Solution. Déjà, $\text{mat}_{\mathcal{B}}(1, X - 1, (X - 1)^2) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. La matrice étant triangulaire, on en déduit que

$$\det_{\mathcal{B}}(1, X - 1, (X - 1)^2) = 1 \times 1 \times 1 = 1.$$

Proposition 8. *Caractérisation des bases.*

Soit \mathcal{B} une base de E . Soit (v_1, \dots, v_n) une famille de E . (v_1, \dots, v_n) est une base de E si, et seulement si, $\det_{\mathcal{B}}(v_1, \dots, v_n) \neq 0$.

Démonstration. Il suffit de remarquer que (v_1, \dots, v_n) est une base de E si, et seulement si, la matrice $\text{mat}_{\mathcal{B}}(v_1, \dots, v_n)$ est inversible et utiliser la proposition 4. □

Exemple 6. Trouver la/les valeurs de $a \in \mathbf{K}$ pour que la famille $\mathcal{C} = ((a, 0, a), (0, 1, a), (1, 1, 1))$ soit une base de \mathbf{K}^3 .

Solution. Soit \mathcal{B} la base canonique de \mathbf{K}^3 . D'après la proposition 8, \mathcal{C} est une base de \mathbf{K}^3 si, et seulement si, $\det(\text{mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C})) \neq 0$. Or,

$$\det(\text{mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C})) = \begin{vmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ a & a & 1 \end{vmatrix}.$$

En développant par rapport à la première colonne, on a

$$\det(\text{mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C})) = a \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a & 1 \end{vmatrix} - 0 \times \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ a & 1 \end{vmatrix} + a \times \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = a \times (1 - a) + a \times (-1) = -a^2.$$

Ainsi, \mathcal{C} est une base de \mathbf{K}^3 si, et seulement si, $a \neq 0$.

3 Déterminant d'un endomorphisme

Dans cette sous-partie, E est un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbf{N}^*$.

Proposition 9. *Déterminant de deux matrices semblables.*

Soient A, B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ semblables. Alors $\det(A) = \det(B)$.

Démonstration. Comme A et B sont semblables, il existe $P \in \text{GL}_n(\mathbf{K})$ telle que $A = PBP^{-1}$. Ainsi, en utilisant la proposition 5 et le corollaire 1, on a

$$\det(A) = \det(P) \det(B) \det(P^{-1}) = \det(P) \det(B) \det(P)^{-1} = \det(B).$$

□

⚠ La réciproque de la proposition (9) est fautive : les matrices $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ont toutes les deux un déterminant nul, mais ne sont pas semblables car elles n'ont pas le même rang.

Définition 2. *Déterminant d'un endomorphisme.*

D'après la proposition 9, le déterminant de matrice d'un endomorphisme ne dépend pas de la base choisie. On définit le **déterminant**, noté $\det(u)$, cette quantité commune.

Exemple 7. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbf{K})$. Soit $u \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_2(\mathbf{K}))$ défini par

$$\forall M \in \mathcal{M}_2(\mathbf{K}), \quad u(M) = AM - MA.$$

Calculer $\det(u)$.

Solution. La famille $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$ est la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbf{K})$. De simples calculs donnent :

$$u \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, u \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, u \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \text{ et } u \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi,

$$\text{mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

On remarque que $C_3 = 2C_2$, donc d'après la proposition 1, on a $\det(\text{mat}_{\mathcal{B}}(u)) = \det(u) = 0$.

Proposition 10. *Propriétés du déterminant d'un endomorphisme.*

Soient $(u, v) \in \mathcal{L}(E)^2$ et $\lambda \in \mathbf{K}$. On a :

- (i) $\det(u \circ v) = \det(u) \det(v)$;
- (ii) $\det(\lambda u) = \lambda^n \det(u)$;
- (iii) $\det(u) \neq 0$ si, et seulement si, u est un automorphisme et on a alors $\det(u^{-1}) = \det(u)^{-1}$.

Démonstration. Ce sont les traductions « endomorphiques » des propositions 5, 2 et 4. □

4 Compléments

4.1 Déterminant de Vandermonde

Définition 3. *Matrice de Vandermonde.*

Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ des éléments de \mathbf{K} . On définit la **matrice de Vandermonde** des éléments $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, notée $V(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, par

$$V(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Proposition 11. *Déterminant d'une matrice de Vandermonde.*

Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbf{K}^n$. On a

$$\det(V(\lambda_1, \dots, \lambda_n)) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\lambda_j - \lambda_i).$$

Démonstration. Soit P définie par $P(\lambda) = \det(V(\lambda, \lambda_2, \dots, \lambda_n)) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda & \lambda_2 & \dots & \lambda_n \\ \lambda^2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix}$.

En développant ce déterminant par rapport à la première ligne, on remarque que P est une fonction polynomiale de degré au plus $n - 1$ dont le coefficient devant λ^{n-1} est $\begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \lambda_2 & \dots & \lambda_{n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_2^{n-2} & \dots & \lambda_{n-1}^{n-2} \end{vmatrix} = \det(V(\lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}))$.

De plus, $P(\lambda_2) = \dots = P(\lambda_{n-1}) = 0$ car, pour chacune de ces valeurs, la matrice comporte deux colonnes égales, donc d'après la proposition 1, le déterminant est nul.

$\lambda_2, \dots, \lambda_n$ sont des racines de P . Comme P est de degré au plus $n - 1$, on peut écrire

$$P(\lambda) = \det(V(\lambda_2, \dots, \lambda_n)) \prod_{i=2}^n (\lambda - \lambda_i).$$

En évaluant cette relation en λ_1 , on obtient

$$P(\lambda_1) = \det(V(\lambda_1, \dots, \lambda_n)) = \det(V(\lambda_2, \dots, \lambda_n)) \prod_{i=2}^n (\lambda_1 - \lambda_i). \quad (2)$$

On peut alors prouver le résultat par récurrence.

Pour $n = 1$, le résultat est clair.

Supposons le résultat vrai pour toute matrice de Vandermonde d'ordre $n - 1$. Soit $V(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ avec $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbf{K}^n$ une matrice de Vandermonde d'ordre n .

En utilisant (2) et l'hypothèse de récurrence, on a

$$\det(V(\lambda_1, \dots, \lambda_n)) = \prod_{1 \leq i < j \leq n-1} (\lambda_j - \lambda_i) \times \prod_{i=2}^n (\lambda_1 - \lambda_i) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\lambda_j - \lambda_i).$$

□

Corollaire 2. Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbf{K}^n$. La matrice $V(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ est inversible si, et seulement si, les éléments $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont deux à deux distincts.

Démonstration. En utilisant la proposition 3 est inversible si, et seulement si, $\det(V(\lambda_1, \dots, \lambda_n))$ est non nul. Or, d'après la proposition 11,

$$\det(V(\lambda_1, \dots, \lambda_n)) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\lambda_j - \lambda_i)$$

et ce déterminant est non nul si, et seulement si, les éléments $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont deux à deux distincts.

□

4.2 Matrices semblables dans \mathbf{C} et dans \mathbf{R}

Définition 4. Matrices semblables.

Soient A, B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. On dit que A et B sont semblables dans \mathbf{K} , s'il existe $P \in \text{GL}_n(\mathbf{K})$ telle que $A = PBP^{-1}$.

Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. On suppose que A et B sont semblables dans \mathbf{C} , i.e. il existe $P \in \text{GL}_n(\mathbf{C})$ telle que $A = PBP^{-1}$.

Peut-on trouver une matrice $Q \in \text{GL}_n(\mathbf{R})$ telle que $A = QBQ^{-1}$? La réponse est oui, mais la méthode est moins évidente qu'elle n'y paraît.

Plus formellement, voici la proposition que nous nous proposons d'établir.

Proposition 12. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. On suppose que A et B sont semblables dans \mathbf{C} , alors elles sont semblables dans \mathbf{R} .

Démonstration. Soit $P \in \text{GL}_n(\mathbf{C})$ telle que $A = PBP^{-1}$. On écrit $P = P_1 + iP_2$ où P_1, P_2 sont respectivement les parties réelles et imaginaires de P . On a

$$A = PBP^{-1} \iff AP = PB \iff A(P_1 + iP_2) = (P_1 + iP_2)B \iff \begin{cases} AP_1 &= P_1B \\ AP_2 &= P_2B \end{cases}. \quad (3)$$

Soit $f : \lambda \in \mathbf{C} \mapsto \det(P_1 + \lambda P_2)$. En développant le déterminant, f est une fonction polynomiale à coefficients réels.

Or, $f(i) = \det(P) \neq 0$, donc f n'est pas la fonction polynomiale nulle. En particulier, f n'est pas identiquement nulle sur \mathbf{R} (sinon f aurait une infinité de racines et serait la fonction polynomiale nulle) :

il existe $t_0 \in \mathbf{R}$ tel que $f(t_0) = \det(P_1 + t_0 P_2) \neq 0$. On pose $Q = P_1 + t_0 P_2 \in \text{GL}_n(\mathbf{R})$. En utilisant la ligne (3), on a

$$A(P_1 + t_0 P_2) = (P_1 + t_0 P_2)B$$

soit

$$AQ = QB \iff A = QBQ^{-1}.$$

Les matrices A et B sont semblables dans \mathbf{R} . □

4.3 Une inégalité utile

Proposition 13. *Une inégalité sur les déterminants.*

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. On a

$$|\det(A)| \leq \prod_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n |a_{i,j}| \right).$$

Démonstration. On commence par traiter un cas particulier. Soit, pour $n \in \mathbf{N}^*$,

$$\mathcal{P}_n : \ll \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K}), \left(\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \sum_{i=1}^n |a_{i,j}| \leq 1 \right) \implies |\det(A)| \leq 1 \gg.$$

\mathcal{P}_1 est clairement vraie. On suppose \mathcal{P}_n vraie pour un certain naturel non nul n .

Soit $A \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbf{K})$ telle que pour tout $j \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$, $\sum_{i=1}^{n+1} |a_{i,j}| \leq 1$.

En développant le déterminant par rapport à la première colonne, on a

$$|\det(A)| = \left| \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} a_{i,1} \det(A_{i,1}) \right| \leq \sum_{i=1}^n |a_{i,1}| |\det(A_{i,1})|.$$

Or, chaque matrice $A_{i,1}$ ($i \in \llbracket 1, n \rrbracket$) vérifie l'hypothèse de récurrence. Ainsi,

$$|\det(A)| \leq \sum_{i=1}^n |a_{i,1}| \leq 1,$$

ceci termine la récurrence.

On peut maintenant terminer la preuve du résultat. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ dont on note (C_1, \dots, C_n) les colonnes. On pose

$$\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \alpha_j = \sum_{i=1}^n |a_{i,j}|.$$

Si l'un des colonnes est nulle, d'après la remarque 3, $\det(A) = 0$ et l'inégalité est claire. On suppose donc que toutes les colonnes de A sont non nulles, ainsi $\alpha_j > 0$ pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Soit $M = (\alpha_1^{-1} C_1 | \dots | \alpha_n^{-1} C_n)$.

Par construction, la somme de la valeur absolue des éléments de chaque colonne de M est inférieure ou égale à 1, donc d'après la récurrence ci-dessus, on a $|\det(M)| \leq 1$.

En utilisant la linéarité du déterminant par rapport à chacune de ses variables, on a

$$\det(M) = \alpha_1^{-1} \dots \alpha_n^{-1} \det(A).$$

On en déduit finalement que

$$|\det(A)| = \prod_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n |a_{i,j}| \right) |\det(M)| \leq \prod_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n |a_{i,j}| \right).$$

□