Devoir maison numéro 5

À rendre pour lundi 2 novembre

1 Niveau 1

Exercice 1.

Montrer que les ensembles suivants sont des espaces vectoriels et en donner une base.

1. $E = \left\{(x, y, z) \in \mathbf{K}^3,\ x - y + z = 0\right\}$;
2. $E = \{P \in \mathbf{K}_3[X],\ P(0) = P(1) = 0\}$;
3. $E = \{M \in \mathscr{M}_2(\mathbf{K}),\ AM = 0\}$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$;
4. $E = \{P \in \mathbf{K}[X],\ P(X) = P(-X)\}$.

Exercice 2.

Montrer que les applications suivantes suivantes sont linéaires. Déterminer le noyau et l'image.

1. u définie sur $\mathbf{K}^3$ par $u(x, y, z) = (x + y, y + z, z + x)$;
2. u est définie sur $\mathbf{K}_2[X]$ par $u(P) = (X + 1)P' + P(1)$;
3. u définie sur $\mathscr{M}_2(\mathbf{K})$ par $u(M) = AM$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$;
4. u est définie sur $\mathbf{K}[X]$ par $u(P) = P\left(X^2\right)$.

Exercice 3.

Soit $u \in \mathscr{L}\left(\mathbf{K}^2\right)$ dont la matrice dans la base canonique est $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer $\operatorname{Ker}(u)$ et préciser sa dimension.
2. Déterminer $\operatorname{Ker}(u - 2\mathrm{id}_{\mathbf{K}^2})$ et préciser sa dimension.
3. Montrer que $\mathbf{K}^2 = \operatorname{Ker}(u) \oplus \operatorname{Ker}(u - 2\mathrm{id}_{\mathbf{K}^2})$ et donner la matrice de u dans une base de $\mathbf{K}^2$ adaptée à la somme directe précédente.
4. Écrire la relation de passage.

Exercice 4.

Préciser la nature des intégrales suivantes.

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^3 + \sqrt{t}} \mathrm{d}t$;
2. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}} \mathrm{d}t$;
3. $\displaystyle\int_0^{1} \ln^2(t)\, \mathrm{d}t$;
4. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(\cos(t))\, \mathrm{d}t$.

Exercice 5.

Soit, pour $n \in \mathbf{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-t} \mathrm{d}t$.

1. Justifier que I_n converge pour tout $n \in \mathbf{N}$.
2. Calculer I_0 et I_1.
3. En faisant une intégration par parties, établir une relation de récurrence entre I_{n+1} et I_n.
4. En déduire que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $I_n = n!$.

2 Niveau 2

Exercice 6.

Soit φ définie sur $\mathbf{K}_2[X]$ par : pour tout $P \in \mathbf{K}_2[X]$, $\varphi(P)$ est le reste de la division euclidienne de $\left(X^2+1\right) P(X)$ par X^3+1.

1. Rappeler le théorème concernant la division euclidienne de polynômes.
2. Montrer que $\varphi \in \mathscr{L}(\mathbf{K}_2[X])$.
3. Donner la matrice de φ dans la base canonique de $\mathbf{K}_2[X]$.
4. Préciser le noyau de φ.
5. Préciser l'image de φ.

Exercice 7.

1. Justifier que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ ne converge pas absolument.
2. Justifier que pour $n \in \mathbf{N}$ et pour tout $t \in [0,1]$, on a :
$$\frac{1}{1+t} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^k + \frac{(-1)^{n+1} t^{n+1}}{1+t}.$$
3. En déduire que
$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad \ln(2) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k+1} + (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t} \mathrm{d}t.$$
4. En déduire que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ converge et préciser sa somme.

Exercice 8.

Soient $x_0, x_1, \ldots, x_n$ des réels deux à deux distincts. Pour $j \in [\![0,n]\!]$, on pose
$$L_j = \prod_{\substack{i=0\\ i\neq j}}^{n} \frac{X - x_i}{x_j - x_i}.$$

1. Pour $(j,k) \in [\![0,n]\!]^2$, calculer $L_j(x_k)$.
2. Montrer que la famille $(L_0, \ldots, L_n)$ est une base de $\mathbf{K}_n[X]$.
3. Donner les coordonnées du polynôme 1 dans cette base.

Exercice 9.

Soit f la fonction définie par $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2} \mathrm{d}t$.

1. (a) Justifier que f est définie sur $\mathbf{R}$.
   (b) Déterminer la monotonie de f.

(c) Déterminer la limite de f en $+\infty$, puis dresser le tableau de variation de f et préciser $f(0)$.

2. (a) En utilisant la formule de Taylor avec reste intégral, montrer que pour tout $u \in [-1,1]$, $\left|\mathrm{e}^{-u}-1+u\right| \leq \dfrac{\mathrm{e}u^2}{2}$.

   (b) En déduire que : pour tout $x \in \mathbf{R}$, pour tout $h \in [-1,1]$ et pour tout $t \in [0,1]$,
$$\left|\mathrm{e}^{-(x+h)t}-\mathrm{e}^{-xt}+ht\mathrm{e}^{-xt}\right| \leq h^2\frac{3t^2}{2}\mathrm{e}^{-xt}.$$
   Montrer alors que :
$$\left|f(x+h)-f(x)+h\int_0^1 \frac{t\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2}\mathrm{d}t\right| \leq \frac{3h^2}{2}\int_0^1 \frac{t^2\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2}\mathrm{d}t.$$

   (c) En déduire que f est dérivable sur $\mathbf{R}$ et que pour tout $x \in \mathbf{R}$,
$$f'(x) = -\int_0^1 \frac{t\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2}\mathrm{d}t.$$

Exercice 10.

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = u_n - u_n^2$.

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est décroissante et converge vers 0.
2. Prouver que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} u_n^2$ converge et calculer sa somme.
3. À l'aide des sommes partielles, prouver que la série de terme général $\ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ diverge.
4. En déduire la nature de la série de terme général u_n.

Exercice 11.

Définition 1. *Schéma d'Euler explicite.*
Soit I un intervalle ouvert de $\mathbf{R}$ et soit $F : I\times\mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction.
Soient $t_0 \in I$, $T > 0$ tels que $[t_0, t_0+T] \subset I$ et $y_0 \in \mathbf{R}$. On s'intéresse à l'équation différentielle
$$\forall t \in [t_0, t_0+T], \quad y'(t) = F(t, y(t)) \quad \text{et} \quad y(t_0) = y_0. \tag{1}$$
*Soit $n \in \mathbf{N}^*$. On définit le **pas** h par $h = \dfrac{T}{n}$ et pour tout $i \in [\![0,n]\!]$, on pose*
$$t_{n,i} = t_0 + i\frac{T}{n}.$$
On définit la suite $(Y_{n,i})_{i\in[\![0,n]\!]}$ par :
$$Y_{n,0} = y_0 \quad \text{et} \quad \forall i \in [\![0,n-1]\!], \quad Y_{n,i+1} = Y_{n,i} + hF(t_{n,i}, Y_{n,i}).$$
On note Y_n définie sur $[t_0, t_0+T]$ par : pour tout $i \in [\![0,n]\!]$, $Y_n(t_{n,i}) = y_{n,i}$ et Y_n affine par morceaux sur les intervalles $[y_{n,i}, y_{n,i+1}]$ pour tout $i \in [\![0,n-1]\!]$.

Soit l'équation différentielle suivante : pour tout $t \in [0,1]$,
$$y'(t) = y(t) \quad \text{et} \quad y(0) = 1.$$

1. Résoudre explicitement l'équation différentielle précédente : on note y_{ex} la solution explicite.
2. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Donner l'expression explicite de la suite $(Y_{n,i})_{i\in[\![0,n]\!]}$.
3. Montrer que Y_n est croissante sur $[0,1]$.
4. (a) Soit $t \in [0,1[$. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, il existe $i_n \in [\![0,n-1]\!]$ tel que $t \in [t_{n,i_n}, t_{n,i_n+1}[$. Préciser la valeur de i_n en fonction de t et n.

   (b) Montrer que
$$\forall t \in [0,1[, \quad \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\lfloor tn\rfloor} = \mathrm{e}^t.$$

   (c) En déduire que
$$\forall t \in [0,1], \quad \lim_{n\to+\infty} Y_n(t) = y_{\text{ex}}(t).$$

3 Niveau 3

Exercice 12.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbf{N}^*$. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$.

1. (a) Montrer que pour tout $p \in \mathbf{N}$, $\operatorname{Ker}(u^p) \subset \operatorname{Ker}\left(u^{p+1}\right)$.
   (b) En déduire qu'il existe un entier naturel p_0 tel que $\operatorname{Ker}(u^{p_0}) = \operatorname{Ker}\left(u^{p_0+1}\right)$.
   (c) Montrer que pour tout $p \geq p_0$, $\operatorname{Ker}(u^{p_0}) = \operatorname{Ker}(u^p)$.
2. (a) Montrer que pour tout $p \in \mathbf{N}$, $\operatorname{Im}\left(u^{p+1}\right) \subset \operatorname{Im}(u^p)$.
   (b) En déduire que $\operatorname{Im}(u^{p_0}) = \operatorname{Im}\left(u^{p_0+1}\right)$, p_0 étant introduit à la question 1 (b).
   (c) Montrer que pour tout $p \geq p_0$, $\operatorname{Im}(u^{p_0}) = \operatorname{Im}(u^p)$.
3. Montrer que pour tout $p \geq p_0$, $E = \operatorname{Ker}(u^p) \oplus \operatorname{Im}(u^p)$.

Exercice 13.

Soient n et m deux entiers naturels non nuls. Soit $A \in \mathscr{M}_{n,m}(\mathbf{K})$. Soit $k \in \mathbf{N}^*$ tel que $k \leq \min\{n, m\}$.

On appelle mineur d'ordre k toute matrice B carrée d'ordre k extraite de la matrice $A = (a_{i,j})_{\substack{i\in[\![1,n]\!] \\ j\in[\![1,m]\!]}}$, c'est-à-dire, il existe $I \subset [\![1, n]\!]$ et $J \subset [\![1, m]\!]$ tous les deux de cardinal k tels que $B = (a_{i,j})_{\substack{i\in I \\ j\in J}}$.

1. Montrer que s'il existe un mineur d'ordre k inversible, alors $\operatorname{rg}(A) \geq k$.
2. En déduire que $\operatorname{rg}(A) = k$ si, et seulement s'il existe un mineur d'ordre k inversible et si aucun mineur d'ordre $\ell \geq k + 1$ n'est inversible.

Exercice 14.

Soit $f : x \longmapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-2t}\sqrt{1 + x^2\mathrm{e}^{2t}}\mathrm{d}t$.

1. (a) Justifier que pour tout réel $a > 0$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-at}\mathrm{d}t$ converge et donner sa valeur.
   (b) Soit $x \in \mathbf{R}$. Établir la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-2t}\sqrt{1 + x^2\mathrm{e}^{2t}}\mathrm{d}t$.
   (c) Justifier que f est paire.
2. (a) Montrer que pour tout $x > 0$ et pour tout $t \geq 0$,
$$x\mathrm{e}^t \leq \sqrt{1 + x^2\mathrm{e}^{2t}} \leq x\mathrm{e}^t + \frac{\mathrm{e}^{-t}}{2x}.$$
   (b) Prouver que pour tout $x > 0$, on a :
$$x \leq f(x) \leq x + \frac{1}{6x}.$$
   (c) En déduire un équivalent de f en $+\infty$.
3. (a) À l'aide du changement de variable $u = x\mathrm{e}^t$, que l'on justifiera, montrer que si $x > 0$:
$$f(x) = x^2 \int_x^{+\infty} \frac{\sqrt{1 + u^2}}{u^3}\mathrm{d}u.$$
   (b) Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et que pour tout $x > 0$,
$$f'(x) = \frac{2f(x) - \sqrt{1 + x^2}}{x}.$$
   (c) Montrer, pour tout réel $x > 0$, que
$$2f(x) = \sqrt{1 + x^2} + x^2 \int_x^{+\infty} \frac{1}{u\sqrt{1 + u^2}}\mathrm{d}u.$$
   En déduire que f est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

4. (a) Montrer que pour tout $x > 0$:

$$\int_x^{+\infty} \frac{1}{u\sqrt{1+u^2}}\mathrm{d}u = -\frac{\ln(x)}{\sqrt{1+x^2}} + \int_x^{+\infty} \frac{u\ln(u)}{(1+u^2)^{3/2}}\mathrm{d}u.$$

Montrer que l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{u\ln(u)}{(1+u^2)^{3/2}}\mathrm{d}u$$

converge.

(b) À l'aide des questions précédentes, montrer que : $f'(x) \underset{x\to 0}{\sim} -x\ln(x)$ et $f(x) - \dfrac{1}{2} \underset{x\to 0}{\sim} -\dfrac{x^2\ln(x)}{2}$.

(c) En déduire que f est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,+\infty[$ et donner la valeur de $f'(0)$.

Exercice 15.

1. Montrer que l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t$ converge.
2. Pour $n \in \mathbf{N}$, on pose $J_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2n+1)t)}{\sin(t)}\mathrm{d}t$.
   (a) Justifier que l'intégrale J_n converge.
   (b) En utilisant une formule de trigonométrique, montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $J_{n+1} = J_n$.
   (c) En déduire que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $J_n = \dfrac{\pi}{2}$.
3. Soit la fonction φ définie sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ par :

$$\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad \varphi(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t = 0 \\ \dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{\sin(t)} & \text{si } t \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right] \end{cases}.$$

   (a) Montrer que φ est continue sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.
   (b) Montrer que φ est dérivable sur $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ et montrer que

$$\forall t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right], \quad \varphi'(t) = \frac{t^2\cos(t) - \sin^2(t)}{t^2\sin^2(t)}.$$

   (c) Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \varphi'(x) = -\frac{1}{6}$.
   (d) En déduire que φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.
   (e) Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2n+1}\int_0^{\pi/2} \varphi'(t)\cos((2n+1)t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

   (f) En faisant une intégration par parties, montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\pi/2} \varphi(t)\sin((2n+1)t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

4. Pour $n \in \mathbf{N}$, on pose $K_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2n+1)t)}{t}\mathrm{d}t$.
   (a) Justifier que l'intégrale K_n converge pour tout $n \in \mathbf{N}$.
   (b) En faisant un changement de variable, montrer que la suite $(K_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers I.

(c) En utilisant la question 3 (f), montrer que $\lim_{n\to+\infty}(K_n - J_n) = 0$.

(d) En déduire la valeur de I.

Exercice 16.

On pose, pour $n \in \mathbf{N}^*$, $u_n = \dfrac{n!\mathrm{e}^n}{n^n\sqrt{n}}$ et $v_n = \ln(u_n)$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $v_{n+1} - v_n = -\left(n+\dfrac{1}{2}\right)\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)+1$.
2. En déduire que la série $\sum\limits_{n\geq 1}(v_{n+1}-v_n)$ converge, en déduire que la suite $(v_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge.
3. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge vers une limite strictement positive ℓ.
4. On admet que $\dfrac{(2n)!}{(2^n n!)^2}\times\dfrac{\pi}{2}\underset{n\to+\infty}{\sim}\sqrt{\dfrac{\pi}{4n}}$. En déduire la valeur de ℓ.

Exercice 17.

Dans $\mathbf{R}[X]$, on considère le sous-espace vectoriel H défini par :

$$H = \left\{P \in \mathbf{R}[X],\ \int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t = 0\right\}.$$

On considère l'application linéaire D définie sur H par :

$$\forall P \in \mathbf{R}[X],\quad D(P) = P'.$$

1. (a) Soit $P \in \mathbf{R}[X]$. À l'aide de l'égalité $P = \left(P - \int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t\right) + \int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t$, justifier qu'il existe un unique couple $(Q,\lambda) \in H\times\mathbf{R}$ tel que $P = Q+\lambda$.
   (b) En déduire que D est surjective.
   (c) Montrer que D est un isomorphisme de H. On note φ l'isomorphisme réciproque de D.
2. Soit $P \in \mathbf{R}[X]$. Soit Q la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par :
$$\forall x \in \mathbf{R},\quad Q(x) = \int_0^x P(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^1 (t-1)P(t)\,\mathrm{d}t.$$
   (a) Montrer que $Q \in H$.
   (b) Montrer que $\varphi(P) = Q$.
3. On considère la suite de polynômes $(B_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par : $B_0 = 1$ et par la relation de récurrence : pour tout $n \in \mathbf{N}$, $B_{n+1} = \varphi(B_n)$.
   (a) Calculer B_1 et B_2.
   (b) Montrer que pour tout $n \geq 2$, $B_n(0) = B_n(1)$.
4. Pour $n \in \mathbf{N}$, on définit le polynôme C_n par $C_n = (-1)^n B_n(1-X)$.
   (a) Pour tout $n \in \mathbf{N}$, exprimer C'_{n+1} à l'aide de C_n.
   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $C_{n+1} = \varphi(C_n)$.
   (c) En déduire que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $B_n(1-X) = (-1)^n B_n$.
   (d) Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, les nombres $B_{2n+1}(0)$ et $B_{2n+1}(1)$ sont nuls.

Exercice 18.

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$. On souhaite montrer l'inégalité :

$$|\det(A)| \leq \prod_{j=1}^n\left(\sum_{i=1}^n |a_{i,j}|\right).$$

1. En procédant par récurrence, montrer l'inégalité annoncée lorsque $\sum\limits_{i=1}^n |a_{i,j}| \leq 1$ pour tout $j \in [\![1,n]\!]$.
2. En déduire l'inégalité dans le cas général.

Problème 1

1 Définitions et étude de la convergence

Définition 2. *Fraction continue finie.*
Soit $q_0 \in \mathbf{Z}$ *et* $(q_1, \ldots, q_n) \in (\mathbf{N}^*)^n$*. L'expression*

$$q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \ddots + \cfrac{1}{q_{n-1} + \cfrac{1}{q_n}}}}}$$

est appelée ***fraction continue finie*** *et est notée* $[q_0, q_1, \ldots, q_n]$.

Définition 3. *Fraction continue infinie.*
Soit $(q_n)_{n \in \mathbf{N}}$ *une suite telle que* $q_0 \in \mathbf{Z}$ *et* $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $q_n \in \mathbf{N}^*$*. L'expression (si elle existe)*

$$q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \ddots}}$$

est appelée ***fraction continue infinie****.*

Dans toute la suite, nous appelerons **fraction continue**, une fraction continue finie ou infinie.

Définition 4. *Convergence.*
Soit $[q_0, q_1, \ldots]$ *une fraction continue infinie.*
Si la suite $([q_0, q_1, \ldots, q_n])_{n \in \mathbf{N}}$ ***converge*** *vers une limite* α*, nous dirons que la fraction continue infinie* $[q_0, q_1, \ldots]$ *converge vers* α *et on note*

$$\alpha = \lim_{n \to +\infty} [q_0, q_1, \ldots, q_n] = [q_0, q_1, \ldots] .$$

1. Soit $[q_0, q_1, \ldots]$ une fraction continue infinie convergente.
   Montrer que pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, la fraction continue $[q_k, q_{k+1}, \ldots]$ converge et

$$[q_0, q_1, q_2, \ldots] = [q_0, \ldots, q_{k-1}, [q_k, \ldots]] .$$

Le but de la fin de cette partie est de montrer la convergence de toute fraction continue infinie.
Avant de prouver cela, nous aurons besoin du lemme suivant :

Lemme 1. *Calcul des fractions continues.*
Soit $(q_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ *une suite d'entiers telle que* $q_0 \in \mathbf{N}$ *et pour tout* $i \geq 1$, $q_i \in \mathbf{N}^*$.
Soient $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ *et* $(b_n)_{n \in \mathbf{N}}$ *deux suites telles que*

$$\begin{cases} a_0 = q_0,\ a_1 = q_0 q_1 + 1, & \forall n \in \mathbf{N},\ a_{n+2} = a_{n+1} q_{n+2} + a_n \\ b_0 = 1,\ b_1 = q_1, & \forall n \in \mathbf{N},\ b_{n+2} = b_{n+1} q_{n+2} + b_n \end{cases} .$$

Alors, nous avons :

i) $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $\forall \alpha \geq 1$, $\quad [q_0, q_1, \ldots, q_n, \alpha] = \dfrac{\alpha a_n + a_{n-1}}{\alpha b_n + b_{n-1}}$ *;*

ii) $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $\quad [q_0, q_1, \ldots, q_n] = \dfrac{a_n}{b_n}$.

Nous prouvons le lemme.

2. Preuve de i). On prouve le résultat par récurrence sur n.
   (a) Faire l'initialisation.
   (b) Faire l'hérédité.
   Indication : On pourra appliquer l'hypothèse de récurrence à $q_{n+1} + \dfrac{1}{\alpha}$.
3. Prouver ii).

Nous énonçons maintenant le théorème qui assure que toute fraction continue infinie converge.

Théorème 1. *Convergence des fractions continues infinies.*
Les mêmes notations sont les mêmes que celles utilisées au lemme précédent. On a :

i) *Pour tout* $n \in \mathbf{N}$,

$$a_n b_{n+1} - a_{n+1} b_n = (-1)^{n+1} \quad \text{et} \quad \frac{a_n}{b_n} - \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} = \frac{(-1)^{n+1}}{b_n b_{n+1}}\,;$$

ii) *Pour tout* $n \in \mathbf{N}$, *les entiers* a_n *et* b_n *sont premiers entre eux ;*

iii) *La suite* $(b_n)_{n\geq 2}$ *est strictement croissante et* $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = +\infty$ *;*

iv) *Les suites* $\left(\dfrac{a_{2n}}{b_{2n}}\right)_{n\in\mathbf{N}}$ *et* $\left(\dfrac{a_{2n+1}}{b_{2n+1}}\right)_{n\in\mathbf{N}}$ *sont adjacentes ;*

v) *La fraction continue* $[q_0, q_1, \dots]$ *converge.*

Nous prouvons le théorème.

4. Montrer i) à l'aide des définitions des suites $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$.
5. En déduire ii).
6. À l'aide de la définition de la suite $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$, montrer iii).
7. En simplifiant $a_n b_{n+2} - a_{n+2} b_n$, montrer iv).
8. En utilisant le lemme *Calcul des fractions continues*, montrer v).

2 Développement en fraction continue d'un réel

9. Montrer que si $\alpha \notin \mathbf{Z}$, il existe un réel $\alpha_1 > 1$ et un entier relatif q_0 tels que

$$\alpha = q_0 + \frac{1}{\alpha_1}.$$

   Exprimer q_0 à l'aide de α.

10. (a) Montrer que, si $\alpha_1 \notin \mathbf{Z}$, alors il existe $q_1 \in \mathbf{N}^*$ et $\alpha_2 > 1$ tels que

$$\alpha_1 = q_1 + \frac{1}{\alpha_2}.$$

    (b) Montrer que l'on a aussi $\alpha = [q_0, q_1, \alpha_2]$.

11. Montrer qu'une telle construction peut se poursuivre tant que $\alpha_n \notin \mathbf{Z}$: il existe un réel $\alpha_{n+1} > 1$ et $q_n = \lfloor \alpha_n \rfloor \in \mathbf{Z}$ tels que $\alpha_n = q_n + \dfrac{1}{\alpha_{n+1}}$ et on a alors

$$\alpha = [q_0, q_1, \dots, q_n, \alpha_{n+1}]\,.$$

2.1 Développement en fraction continue d'un rationnel

12. Soit $\alpha \in \mathbf{R}^*$. Montrer que $\alpha \in \mathbf{Q}$ si, et seulement si, il existe une fraction continue finie telle que $\alpha = [q_0, q_1, \dots, q_n]$.

2.2 Développement en fraction continue d'un irrationnel

Soit α un nombre irrationnel.

13. Montrer que l'on peut peut construire une suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ de nombres irrationnels supérieurs à 1 tels que : $\alpha = \lfloor \alpha \rfloor + \dfrac{1}{\alpha_1}$ et pour tout $i \in \mathbf{N}^*$, $\alpha_i = \lfloor \alpha_i \rfloor + \dfrac{1}{\alpha_{i+1}}$.

On notera dans la suite $(q_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite définie par $q_0 = \lfloor \alpha \rfloor$ et pour tout $i \geq 1$, $q_i = \lfloor \alpha_i \rfloor$.

14. Montrer que la fraction continue $[q_0, q_1, \dots]$ converge vers α.
15. Montrer que
$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad \left| \alpha - \frac{a_n}{b_n} \right| < \frac{1}{b_n^2}$$
où les suites $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ sont définies au lemme *Calcul des fractions continues.*
16. Montrer que si $[q_0, q_1, q_2, \dots] = [q'_0, q'_1, q'_2, \dots] = \alpha$, alors pour tout $n \in \mathbf{N}$, $q_n = q'_n$.

3 Exemples et algorithmes

17. Écrire le développement en fraction continue de $\sqrt{2}$.
18. Écrire un programme `Python` qui prend en entrée un réel x et un entier naturel n et qui permet de calculer $[q_0, q_1, \dots, q_n]$.

    Le tester pour $\sqrt{3}$ et $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. Que remarque t-on ?

Problème 2

1 Généralités

Nous commençons par prouver la proposition suivante sur l'attractivité des points fixes.

Proposition 1. *Attractivité des points fixes.*
Soient $a < b$ deux réels et soit $f : [a,b] \longrightarrow [a,b]$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$.
Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par : $u_0 \in [a,b]$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. Soit $\ell \in \mathbf{R}$.
Alors :

i) *Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers ℓ, alors ℓ est un point fixe de f.*
Dans toute la suite, ℓ est un point fixe de f.

ii) *Si $|f'(\ell)| > 1$ (**point fixe répulsif**), alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers ℓ si, et seulement si, $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ stationne à ℓ.*

iii) *Si $|f'(\ell)| < 1$ (**point fixe attractif**), il existe un intervalle J non trivial contenant ℓ tel que pour tout $u_0 \in J$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers ℓ.*
De plus, il existe $k \in]0,1[$ tel que

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad |u_n - \ell| \leq k^n |u_0 - \ell| .$$

iv) *Si $|f'(\ell)| = 1$, on ne peut rien conclure sur la convergence.*

1. Prouver i).
2. Prouver ii).
3. Prouver iii).
4. *Deux exemples pour la proposition* iv).
   (a) Soit $f : x \longmapsto \sin(x)$. Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par $u_0 = \dfrac{\pi}{2}$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
   Vérifier que 0 est un point fixe de f vérifiant $f'(0) = 1$ et montrer que $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers 0.
   (b) Soit $f : x \longmapsto \ln(1+x) + x^2$. Soit la suite $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par $v_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $v_{n+1} = f(v_n)$.
   Vérifier que 0 est un point fixe de f vérifiant $f'(0) = 1$ et montrer que $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ diverge vers $+\infty$.
5. Soit $(a,b) \in \mathbf{R}^2$ tel que $a < b$. Soit $f : [a,b] \longrightarrow [a,b]$ une fonction dérivable. On suppose qu'il existe $k \in]0,1[$ tel que
$$\forall x \in [a,b], \quad \left|f'(x)\right| \leq k.$$
   (a) Montrer que f admet un unique point fixe ℓ sur $[a,b]$.
   (b) Montrer que pour la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers ℓ pour n'importe quelle valeur de $u_0 \in [a,b]$.
6. (a) Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite qui converge vers un réel ℓ. Montrer que la suite $\left(\dfrac{1}{n+1}\sum\limits_{k=0}^{n} u_k\right)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers ℓ.
   (b) En déduire que que si $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite telle que $(v_{n+1} - v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers un réel ℓ, alors la suite $\left(\dfrac{v_n}{n}\right)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge vers ℓ.
   Cette conséquence de la question 6 (a) sera appelée *Lemme de l'escalier* dans la suite du problème.

2 Étude de la suite logistique

On note $I = [0,1]$. Pour $a \in]0,4]$, on définit sur I la fonction f_a par

$$f_a(x) = ax(1-x).$$

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est définie par : $u_0 \in I$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$u_{n+1} = f_a(u_n).$$

7. Étudier les variations de f_a et montrer que f_a laisse stable I.
8. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est bien définie pour toute valeur de $u_0 \in I$.
9. Étudier les éventuels points fixes de f_a.

Le but de cette partie est d'établir la proposition suivante.

Proposition 2. *Convergence de la suite logistique.*
Lorsque $a \in]0,3[$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge pour toute valeur $u_0 \in I$.

Pour prouver cette proposition, nous distinguons cinq cas.

2.1 Premier cas

Dans cette sous-partie, on suppose $a \in]0,1[$.

10. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers 0.
11. On suppose $u_0 \notin \{0,1\}$. On se propose de donner un équivalent de u_n.
    (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n > 0$.
    (b) En appliquant le *Lemme de l'escalier*, montrer que
    $$\ln(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(a)\, n.$$
    (c) Montrer que la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge.
    (d) En déduire qu'il existe $A > 0$ tel que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} Aa^n$.

2.2 Second cas

Dans cette sous-partie, on suppose que $a = 1$.

12. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers 0.
13. On suppose $u_0 \notin \{0,1\}$. On se propose de donner un équivalent de la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$.
    (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n \neq 0$.
    (b) Montrer qu'il existe un réel β, dont on donnera la valeur, pour lequel la suite $\left(u_{n+1}^{\beta} - u_n^{\beta}\right)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers un réel non nul.
    (c) En appliquant le *Lemme de l'escalier*, donner un équivalent simple de u_n en $+\infty$.

2.3 Troisième cas

Dans cette sous-partie, on suppose $a \in]1,2[$. On note α le point fixe non nul de f_a.

14. Conclure lorsque $u_0 \in \{0,1,\alpha\}$.
15. On suppose $u_0 \notin \{0,1,\alpha\}$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers α.
16. On suppose dans cette question que $u_0 \notin \{0,1,\alpha\}$. On se propose de donner un équivalent de $|u_n - \alpha|$. On pose, pour $n \in \mathbf{N}$, $v_n = u_n - \alpha$. On suppose aussi que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ n'est pas stationnaire.
    (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $v_n \neq 0$.
    (b) Montrer que
    $$\forall n \in \mathbf{N}, \quad \ln(|v_{n+1}|) = \ln(|v_n|) + \ln(|2 - a - v_n|).$$
    (c) En déduire que
    $$\ln(|v_n|) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(2-a)\, n.$$
    (d) Montrer que la série $\sum_{n\geq 0} |v_n|$ converge. En déduire un équivalent de $|u_n - \alpha|$.

2.4 Quatrième cas

Dans cette sous-partie, on suppose $a = 2$.

17. Conclure lorsque $u_0 \in \left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}$.
18. On suppose $u_0 \notin \left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}$.
    (a) Montrer que
    $$\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad u_n < \frac{1}{2}.$$
    (b) Donner une expression explicite de la suite $\left(\frac{1}{2} - u_n\right)_{n\in\mathbf{N}^*}$.
    (c) En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$.

2.5 Cinquième cas

Dans cette sous-partie, on suppose $a \in \left]2, 3\right[$.

19. Traiter les cas où $u_0 \in \left\{0, 1 - \frac{1}{a}, 1\right\}$.
20. On suppose $u_0 \notin \left\{0, 1 - \frac{1}{a}, 1\right\}$.
    (a) Montrer que, quitte à considérer la suite suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$, on peut supposer $u_0 \in \left]0, 1 - \frac{1}{a}\right[$. On fait cette hypothèse dans la suite de la question 20.
    (b) Montrer que l'ensemble $\left\{n \in \mathbf{N},\ \frac{1}{a} \leq u_n \leq 1 - \frac{1}{a}\right\}$ n'est pas vide. Soit n_1 le plus petit élément de cet ensemble.
    (c) Montrer que les suites $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définies par : pour tout $n \in \mathbf{N}$
    $$v_{n+1} = f_a^2(v_n),\ w_{n+1} = f_a^2(w_n) \text{ et } v_0 = u_{n_1},\ w_0 = f_a(u_{n_1})$$
    convergent.
    Indication : L'application f_a^2 est $f_a \circ f_a$.
    (d) Conclure.

3 Étude avec `Python`

21. Écrire un programme `suitelogistique(a,u0,n)`, qui calcule u_n où $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est la suite définie par $u_0 \in [0, 1]$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = au_n(1 - u_n)$ ($a \in [0, 3]$).
22. Modifier le programme précédent pour retrouver le résultat de la question 13 (c).