# Devoir surveillé numéro 1

Mercredi 30 septembre

**Exercice 1.**

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$. On pose :

$$\Delta_A = \left\{ M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K}),\ M + M^T = \operatorname{Tr}(M) A \right\}.$$

On note aussi $\mathscr{S}_n(\mathbf{K})$ (resp. $\mathscr{A}_n(\mathbf{K})$) l'ensemble des matrices symétriques (resp. antisymétriques).

1. Montrer que $\Delta_A$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ et montrer que $\mathscr{A}_n(\mathbf{K}) \subset \Delta_A$.
2. Montrer que $\mathscr{S}_n(\mathbf{K})$ et $\mathscr{A}_n(\mathbf{K})$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$, puis que $\mathscr{S}_n(\mathbf{K}) \oplus \mathscr{A}_n(\mathbf{K}) = \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$.
3. On suppose dans cette question que $\operatorname{Tr}(A) \neq 2$. Montrer que $\Delta_A = \mathscr{A}_n(\mathbf{K})$.
   **Indication** : On pourra appliquer Tr dans l'égalité $M + M^T = \operatorname{Tr}(M) A$.
4. On suppose dans cette question que $\operatorname{Tr}(A) = 2$.
   (a) Vérifier que pour tout $M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$, $M + M^T \in \mathscr{S}_n(\mathbf{K})$.
   (b) Déterminer $\Delta_A$ si $A \notin \mathscr{S}_n(\mathbf{K})$.
   (c) Déterminer $\Delta_A$ si $A \in \mathscr{S}_n(\mathbf{K})$.

**Exercice 2.**

1. Montrer que l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} \mathrm{d}t$ converge. On **admet** que $I = \dfrac{\pi}{2}$.
2. Soit $a \in \mathbf{R}$. Justifier alors la convergence de $I(a) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(at)}{t} \mathrm{d}t$ et calculer $I(a)$.
3. (a) Justifier la convergence de $J = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2} \mathrm{d}t$.
   (b) Calculer $J$.
4. Pour $(a, b) \in \mathbf{R}^2$, on pose $K(a, b) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(at)\cos(bt)}{t} \mathrm{d}t$.
   (a) Montrer que $K(a, b)$ converge et exprimer $K(a, b)$ en fonction de $I(a+b)$ et $I(a-b)$.
   (b) En déduire la valeur de $K(a, b)$ en discutant suivant les valeurs de $a$ et $b$.

**Exercice 3.**

On définit les intégrales $I$ et $J$ par :

$$I = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin(t))\, \mathrm{d}t \quad \text{et} \quad I = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos(t))\, \mathrm{d}t.$$

1. Montrer que l'intégrale $I$ converge.
2. En faisant le changement de variable $u = \dfrac{\pi}{2} - t$, montrer que l'intégrale $J$ converge et que $I = J$.
3. Calculer $I + J$. En déduire les valeurs de $I$ et $J$.

**Exercice 4.**

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on définit la fonction $e_n$ sur $\mathbf{R}_+$ par $e_n(x) = x^n \mathrm{e}^{-x}$. On note $E = \mathscr{C}^1(\mathbf{R}_+, \mathbf{R})$ l'espace vectoriel des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ définies sur $\mathbf{R}_+$ à valeurs dans $\mathbf{R}$.

Soit $N \in \mathbf{N}$ et $F = \mathrm{Vect}(e_0, e_1, \ldots, e_N)$.

1. Montrer que $\mathscr{B} = (e_0, e_1, \ldots, e_N)$ est une base de $F$. En déduire la dimension de $F$.
2. Pour $f \in F$, on pose $\Delta(f) = f'$.
   (a) Montrer que $\Delta$ est un endomorphisme de $F$.
   (b) Donner la matrice $A$ de $\Delta$ dans la base $\mathscr{B}$.
   (c) En déduire $\det(A)$. En déduire que $\Delta$ est un automorphisme de $F$.
   (d) (Pour 5/2) Déterminer le spectre de $A$. $\Delta$ est-il diagonalisable ?

## Problème

### Partie 1 : Étude de deux applications

Soient $f$ et $\varphi$ les applications définies sur $\mathbf{R}_2[X]$ par :

$$\forall P(X) \in \mathbf{R}_2[X], \quad f(P(X)) = \frac{1}{2}\left(P\left(\frac{X}{2}\right) + P\left(\frac{X+1}{2}\right)\right) \quad \text{et} \quad \varphi(P(X)) = P(1).$$

On note $\mathscr{B} = (1, X, X^2)$ la base canonique de $\mathbf{R}_2[X]$. On rappelle que $f^0 = \mathrm{id}_{\mathbf{R}_2[X]}$ et pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $f^n = f \circ f^{n-1}$.

1. Montrer que $f$ est un endomorphisme de $\mathbf{R}_2[X]$.
2. Montrer que $\varphi$ est linéaire.
3. Donner la matrice de $f$ dans la base $\mathscr{B}$ en détaillant les calculs.
4. L'application $f$ est-elle injective ? Surjective ?
5. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(\varphi)$. Préciser la dimension de $\mathrm{Ker}(\varphi)$.
6. L'application $\varphi$ est-elle injective ? Surjective ?

### Partie 2 : Calcul des puissances successives d'une matrice

On note $\mathrm{I}_3$ la matrice identité de $\mathscr{M}_3(\mathbf{R})$ et $A$ la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1/4 & 1/8 \\ 0 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}$. Enfin, on note $\mathscr{B}' = (1, -2X+1, 6X^2-6X+1)$.

1. Montrer que $\mathscr{B}'$ est une base de $\mathbf{R}_2[X]$.
2. Écrire la matrice de passage $Q$ de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$.
3. Écrire la matrice $M$ de $f$ dans la base $\mathscr{B}'$ en détaillant les calculs.
4. Écrire la relation de passage qui lie les matrices $A$ et $M$ en fonction de $Q$. En déduire $A^n$ pour $n \in \mathbf{N}$. On écrira les neuf coefficients de $A^n$.
5. Pour $n \in \mathbf{N}$ et $P(X) = aX^2 + bX + c$ avec $(a, b, c) \in \mathbf{R}^3$, déterminer $f^n(P(X))$ en fonction de $a$, $b$ et $c$.
6. En déduire que :
$$\forall P(X) \in \mathbf{R}_2[X], \quad \lim_{n \to +\infty} \varphi(f^n(P(X))) = \int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t.$$

### Partie 3 : Une autre preuve du résultat précédent

1. À l'aide d'un raisonnement par récurrence, montrer que :
$$\forall P(X) \in \mathbf{R}_2[X], \quad f^n(P(X)) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{2^n-1} P\left(\frac{X+k}{2^n}\right).$$
2. En reconnaissant une somme de Riemann, retrouver le résultat de la question 6 de la partie 2.