Interrogation 3

Mardi 6 octobre

Exercice 1.

Calculer le déterminant suivant (soyez « astucieux » !) :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ 1 & 4 & 7 & 10 \end{vmatrix}.$$

Exercice 2.

Pour $x \in \mathbf{K}$ et $n \in \mathbf{N}^*$, on pose le déterminant de taille $n \times n$ suivant :

$$D_n = \begin{vmatrix} 1+x^2 & x & 0 & \cdots & 0 \\ x & 1+x^2 & x & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & x & 1+x^2 & x \\ 0 & \cdots & 0 & x & 1+x^2 \end{vmatrix}.$$

On a donc $D_1 = 1 + x^2$.

1. Calculer les valeurs de D_2 et D_3.
2. Soit $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 3$. En développant par rapport à la première colonne, montrer que
$$D_n = \left(1 + x^2\right) D_{n-1} - x^2 D_{n-2}.$$
3. En déduire par récurrence que
$$\forall n \in \mathbf{N},\ n \geq 2, \quad D_n - D_{n-1} = x^{2(n-2)} \left(D_2 - D_1\right).$$
4. En déduire que pour tout $n \geq 2$, $D_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^{2k}$.

Exercice 3.

Soient A et B deux matrices inversibles de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ telles que $AB + BA = 0$. Montrer que n est pair.