Interrogation 4

Jeudi 15 octobre

Exercice 1.

Justifier la convergence des séries suivantes.

1. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{n^2}{n^4+\sin(n)}$;
2. $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$;
3. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \left(1-\cos\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$;
4. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{n^2}{(n-1)!}$.

Exercice 2.

1. Montrer que pour tout couple $(a,b)\in\mathbf{R}^2$, $ab\leq \frac{1}{2}\left(a^2+b^2\right)$.
2. En déduire que si $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est une suite positive telle que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n$ converge, alors la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{\sqrt{u_n}}{n}$ converge.

Exercice 3.

1. Donner un équivalent de $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}$ lorsque n tend vers $+\infty$.
2. (a) Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\frac{1}{x^2+n^2}$ converge pour tout réel $x>0$. On note $S(x)$ sa somme.

   (b) En faisant une comparaison série/intégrale, encadrer $S(x)$ pour $x>0$.

   (c) En déduire que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} S(x)=0$.