

Chapitre 5 : Exercices

Exercice 1.

$$\text{Soit } A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que $A^3 + A^2 - A - I_3 = 0$.
2. Montrer que si $\lambda \in \text{Sp}(A)$, alors $\lambda^3 + \lambda^2 - \lambda - 1 = 0$.
3. En déduire que $\text{Sp}(A) \subset \{-1, 1\}$.
4. Sans calculer le polynôme caractéristique de A , trouver ses valeurs propres.

Exercice 2.

$$\text{Soit la matrices } A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix} \text{ et les matrices colonnes } X_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ et } X_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que les matrices colonnes X_1 , X_2 et X_3 sont des vecteurs propres de A .
2. A est-elle diagonalisable? Si oui, la diagonaliser.
3. A est-elle inversible?

Exercice 3.

Soit f un endomorphisme d'un \mathbf{R} -espace vectoriel E tel que $f^2 + f + \text{id}_E = 0$.

1. Montrer que si $\lambda \in \text{Sp}(f)$, alors $\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$.
2. En déduire que $\text{Sp}(f) = \emptyset$.

Exercice 4.

On considère l'application φ définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ par $\varphi(M) = M + \text{Tr}(M)I_n$.

1. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.
2. Déterminer ses éléments propres.

Exercice 5.

Soit $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R})$. Soit $d : f \in E \mapsto f'$. Vérifier que d est un endomorphisme de E et déterminer ses éléments propres.

Exercice 6.

Déterminer les éléments propres des matrices suivantes de $\mathcal{M}_4(\mathbf{R})$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 7.

On considère l'endomorphisme u de $\mathbf{C}_3[X]$ défini par

$$\forall P \in \mathbf{C}_3[X], \quad u(P) = X^3 P \left(\frac{1}{X} \right).$$

1. Déterminer le polynôme caractéristique de u .
2. Donner les valeurs propres de u , ainsi que leur ordre de multiplicité.
3. Expliciter les sous-espaces propres de u . u est-il diagonalisable ?

Exercice 8.

Soit $n \in \mathbf{N}$. Soit u l'application définie sur $\mathbf{K}_n[X]$ par

$$\forall P \in \mathbf{K}_n[X], \quad u(P) = P\left(\frac{X+1}{2}\right).$$

1. Montrer que u est un endomorphisme de $\mathbf{K}_n[X]$.
2. Montrer que la matrice de u dans la base canonique de $\mathbf{K}_n[X]$ est triangulaire supérieure.
3. En déduire les valeurs propres de u et leur ordre de multiplicité.
4. Calculer, pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $u((X-1)^k)$. En déduire les sous-espaces propres de u .

Exercice 9.

Pour chacune des matrices suivantes, étudier la diagonalisabilité dans \mathbf{C} . Lorsque c'est possible, diagonaliser la matrice.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} i & -1 & -1+2i \\ 2 & 3+i & 1-3i \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 10.

Diagonaliser la matrice $(1)_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.

Exercice 11.

Discuter de la diagonalisabilité des matrices suivantes en fonction du paramètre $m \in \mathbf{R}$. Lorsque cela est possible, diagonaliser la matrice.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2-m & m-2 & m \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ m^2-7m & m-7 & m \end{pmatrix}.$$

Exercice 12.

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbf{K})$. Diagonaliser A et en déduire A^n pour $n \in \mathbf{N}$.

Exercice 13.

Soit $A = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbf{K})$.

1. Diagonaliser A .
2. En déduire $B \in \mathcal{M}_2(\mathbf{K})$ telle que $B^3 = A$.

Exercice 14.

Soit E un \mathbf{C} -espace vectoriel de dimension finie. Soit $v \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable. Montrer qu'il existe $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^2 = v$.

Exercice 15.

Montrer que l'application $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \mapsto M^T$ est diagonalisable.

Exercice 16.

Soit E un \mathbf{K} -espace vectoriel de dimension finie. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable. Soit

$$\mathcal{C} = \{v \in \mathcal{L}(E), u \circ v = v \circ u\}.$$

1. Vérifier que \mathcal{C} est un sous-espace vectoriel de E .
2. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ les valeurs propres de u deux à deux distinctes. Justifier que

$$E = \bigoplus_{i=1}^r \ker(u - \lambda_i \text{id}_E).$$

3. Soit $v \in \mathcal{C}$. Montrer que v laisse stable les sous-espaces propres de u .
4. Pour tout $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$, on note $n_i = \dim(\ker(u - \lambda_i \text{id}_E))$. Montrer que

$$\dim(\mathcal{C}) = \sum_{i=1}^r n_i^2.$$

Exercice 17.

Soient les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Comparer leurs spectres, leurs rangs, leurs traces, ainsi que la dimension des sous-espaces propres.
2. Sont-elles semblables ?

Exercice 18.

$$\text{Soient } A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -3 \\ 8 & 3 & -5 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer les éléments propres de A . A est-elle diagonalisable ?
2. Montrer que A et T sont semblables.

Exercice 19.

$$\text{Soient } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer les éléments propres de A . A est-elle diagonalisable ?
2. Montrer que A et T sont semblables.
3. Calculer A^n pour $n \in \mathbf{N}$.

Exercice 20.

Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de \mathbf{K}^3 . Soit f l'endomorphisme de \mathbf{K}^3 dont la matrice dans la base canonique est $\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -4 & 5 & -3 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

1. (a) Soit $u_1 = e_1 + e_2$. Calculer $f(u_1)$. Que peut-on en déduire pour u_1 ?
 (b) Montrer que 1 est l'unique valeur propre de f .
 (c) L'endomorphisme f est-il diagonalisable ? Bijectif ?
2. Soient u_2 et u_3 deux éléments de \mathbf{K}^3 avec $u_2 = pe_2 + qe_3$ et $u_3 = re_1 + se_3$ où $(p, q, r, s) \in \mathbf{K}^4$
 (a) Déterminer u_2 et u_3 pour que

$$f(u_2) = u_1 + u_2 \quad \text{et} \quad f(u_3) = 2u_2 + u_3.$$

- (b) Montrer que la famille $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de \mathbf{K}^3 .
 (c) Écrire la matrice A' de f dans la base \mathcal{B}' .
 (d) Calculer A'^n pour tout $n \in \mathbf{N}$.
 (e) En déduire A^n pour $n \in \mathbf{N}$.

Exercice 21.

Donner une explicite des suites $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ dans chacun des cas suivants.

- Pour tout $n \in \mathbf{N}$, $2u_{n+2} + u_{n+1} - u_n = 0$ avec $u_0 = u_1 = 1$.
- Pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+2} = 2u_n$ avec $u_0 = 1$ et $u_1 = 0$.
- Pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$ avec $u_0 = u_1 = 1$.
- Pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+2} = -2u_{n+1} - 4u_n + 3$ avec $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$.

Exercice 22.

Soit $n \in \mathbf{N}^*$. On pose $D_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}$.

- Calculer D_1 et D_2 .
- En faisant des opérations sur les lignes/colonnes, montrer que

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad D_n = \begin{vmatrix} -2 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

- En déduire que pour tout $n \geq 3$, $D_n = -2D_{n-1} - D_{n-2}$.
- En déduire l'expression de D_n pour $n \in \mathbf{N}^*$.