Programme de colle : du 12 au 16 octobre

1 Déterminant

1. Existence et unicité d'une application définie sur $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ à valeurs dans $\mathbf{K}$ linéaire par rapport à chaque colonne, est multipliée par -1 lorsque l'on permute deux colonnes et valant 1 en I_n.
2. Interprétation géométrique du déterminant.
3. Une matrice ayant deux colonnes égales a un déterminant nul.
4. Influence des opérations élémentaires sur les colonnes sur le déterminant.
5. $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$.
6. Une matrice est inversible si, et seulement si, le déterminant est non nul.
7. $\det(AB) = \det(A)\det(B)$, $\det\left(A^T\right) = \det(A)$ et $\det\left(A^{-1}\right) = \det(A)^{-1}$ si A est inversible.
8. Développement d'un déterminant par rapport à une ligne ou une colonne.
9. Déterminant d'une famille de vecteurs. Si $\mathscr{B}$ est une base de E (dimension n), la famille $(v_1, \ldots, v_n)$ est une base si, et seulement si, le déterminant $\det_{\mathscr{B}}(v_1, \ldots, v_n) \neq 0$.
10. Définition du déterminant d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie. Les propriétés sont les mêmes que celles énoncées pour les matrices.
11. Déterminant de deux matrices semblables. Définition du déterminant d'un endomorphisme. Les règles de calcul pour le déterminant d'un endomorphisme sont les mêmes que pour les matrices.

2 Séries numériques

1. Définition de la convergence d'une série. Somme partielle, reste d'une série.
2. Si la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge, alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$. La réciproque est fausse. Divergence grossière.
3. Linérité pour les séries.
4. Lien suite/série : la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge si, et seulement si, la série $\sum_{n\geq 0}(u_{n+1} - u_n)$ converge.
5. Séries géométriques. Caractérisation de la convergence. Calcul de la somme en cas de convergence.
6. Étude des séries à termes positifs. La série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge si, et seulement si, la suite des sommes partielles est majorée. Théorèmes de comparaison par inégalité, par équivalence Règle de d'Alembert. Exemples.
7. Comparaison série/intégrale. Applications à la recherche d'équivalents de sommes partielles d'une série divergente ou de reste d'une série convergente.
8. Séries de Riemann.
9. Convergence absolue. La convergence absolue entraîne la convergence. La réciproque est fausse.
10. Développement décimal illimité propre d'un réel. Caractérisation des nombres rationnels.