Chapitre 4 : Séries numériques

Table des matières

Dans le chapitre, $\mathbf{K}$ est le corps $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$ et $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et un élément de $\mathbf{K}^{\mathbf{N}}$.

1 Convergence d'une série numérique

1.1 Généralités

Définition 1. *Série numérique.*
La série de terme général $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$, notée $\sum_{n\geq 0} u_n$ est la suite $(S_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathbf{K}^{\mathbf{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + \cdots + u_n.$$

*La suite $(S_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est appelée la **suite des sommes partielles** de la série $\sum_{n\geq 0} u_n$.*

Définition 2. *Convergence d'une série.*
*On dit que la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ **converge** si la suite des sommes partielles converge, et **divergente** sinon.*

Définition 3. *Somme et reste d'une série.*
Si $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge, alors :

(i) *on appelle **somme de la série** la limite de la suite des sommes partielles que l'on note $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.*

(ii) *la reste d'ordre $n \in \mathbf{N}$ de la série est le nombre $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$. On notera que l'on a $S_n + R_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.*

⚠On veillera à n'utiliser ces notions qu'**après** avoir prouvé la convergence d'une série.

Remarque 1.

1. Si la série commence à $p \in \mathbf{N}$, on note $\sum_{n\geq p} u_n$.
2. Si la série est convergente, sa somme est notée $\sum_{n=p}^{+\infty} u_n$.
3. La nature de la série (convergente ou divergente) ne dépend pas des premiers termes.

Exemple 1. La série $\sum_{n\geq 0} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ converge car

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2.$$

Exemple 2. La série $\sum_{n\geq 0} \left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$ diverge car

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad \sum_{k=0}^{n} \left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right) = \sqrt{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Proposition 1. *Une condition nécessaire de convergence.*
Si la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge, alors $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers 0.

Démonstration. Il suffit de remarquer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $u_n = S_n - S_{n-1}$. Comme $(S_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers une limite finie, on en déduit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers 0. □

⚠Cette proposition est loin de donner une condition suffisante de convergence !

Définition 4. *Divergence grossière.*
On dit que la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ ***diverge grossièrement*** *si* $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *ne converge pas vers* 0.

Exemple 3. Les séries $\sum_{n\geq 0} (-1)^n$ et $\sum_{n\geq 0} n$ divergent grossièrement.

⚠La réciproque est fausse.

Proposition 2. *Linéarité de la somme.*
Soient $(a, b) \in \mathbf{K}^2$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathbf{K}^{\mathbf{N}}$. *Si les séries* $\sum_{n\geq 0} u_n$ *et* $\sum_{n\geq 0} v_n$ *convergent, alors la série* $\sum_{n\geq 0} (au_n + bv_n)$ *converge et*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (au_n + bv_n) = a\sum_{n=0}^{+\infty} u_n + b\sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$

Démonstration. Il suffit de remarquer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\sum_{k=0}^{n} (au_k + bv_k) = a\sum_{k=0}^{n} u_k + b\sum_{k=0}^{n} v_k$ et de remarquer que le membre de droite converge, lorsque n tend vers $+\infty$, vers $a\sum_{n=0}^{+\infty} u_n + b\sum_{n=0}^{+\infty} v_n$. □

Proposition 3. *Lien suite/série.*
La suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *converge si, et seulement si, la série* $\sum_{n\geq 0} (u_{n+1} - u_n)$ *converge.*

Démonstration. La preuve est en deux temps.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a

$$\sum_{k=0}^{n} (u_{k+1} - u_k) = u_{n+1} - u_0.$$

Comme la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge, on en déduit que la série $\sum_{n\geq 0} (u_{n+1} - u_n)$ converge.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Il suffit à nouveau de remarquer que

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad u_n = \sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) + u_0.$$

□

Exemple 4. La série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$ converge car pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$.

1.2 Série géométrique

Définition 5. *Série géométrique.*
Pour $q \in \mathbf{C}$, *la série* $\sum_{n\geq 0} q^n$ *s'appelle la* ***série géométrique*** *de raison* q.

Proposition 4. *Soit $q \in \mathbf{C}$. La série géométrique* $\sum_{n \geq 0} q^n$ *converge si, et seulement si,* $|q| < 1$*, et on a alors :*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}.$$

Démonstration. Déjà, si $q = 1$, la série $\sum_{n \geq 0} q^n$ diverge grossièrement. On suppose donc $q \neq 1$. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1-q}.$$

Or, $\left(q^{n+1}\right)_{n \in \mathbf{N}}$ converge si, et seulement si, $|q| < 1$ (rappelons que $q \neq 1$). Le cas échéant, on a alors $\lim_{n \to +\infty} q^{n+1} = 0$, d'où

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1}{1-q}.$$

□

Remarque 2. Parfois, il faut factoriser par le premier terme pour faire apparaître une « vraie » série géométrique. Ainsi, la série $\sum_{n \geq p} q^n$ converge si, et seulement si, $|q| < 1$ et le cas échéant, on a alors :

$$\sum_{n=p}^{+\infty} q^n = \frac{q^p}{1-q}.$$

2 Séries à termes positifs

Avant de rentrer dans le vif du sujet, nous énonçons un résultat qui nous servira constamment dans cette partie.

Proposition 5. *Caractérisation de la convergence des séries à termes positifs.*
Soit $(u_n)_{n \in \mathbf{N}} \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ *une suite de termes* ***positifs****. La série* $\sum_{n \geq 0} u_n$ *converge si, et seulement si, la suite des sommes partielles est majorée.*

Démonstration. La preuve se fait en deux temps.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Comme $u_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbf{N}$, on remarque que

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad \sum_{k=0}^{n} u_k \leq \sum_{k=0}^{+\infty} u_k.$$

Ainsi, la suite des sommes partielles est majorée.

$\boxed{\Longleftarrow}$ On note $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$. On commence par remarquer que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $S_{n+1} - S_n = u_{n+1} \geq 0$. Ainsi, la suite $(S_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est croissante. $(S_n)_{n \in \mathbf{N}}$ étant majorée, par le théorème de la limite monotone, elle converge. Autrement dit, la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge.

□

2.1 Les théorèmes de comparaisons

Théorème 1. *Théorème de comparaison par inégalité.*
Soient $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *deux suites de réels positifs telles que pour tout* $n \in \mathbf{N}$, $0 \leq u_n \leq v_n$.

(i) *Si la série* $\sum_{n\geq 0} v_n$ *converge, alors la série* $\sum_{n\geq 0} u_n$ *converge et,*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$

(ii) *Si la série* $\sum_{n\geq 0} u_n$ *diverge, la série* $\sum_{n\geq 0} v_n$ *diverge.*

Remarque 3. Il est suffisant d'avoir l'inégalité $0 \leq u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang pour pouvoir utiliser le théorème de comparaison.

Démonstration. (i) En utilisant la positivité de la suite $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$, on remarque que pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} u_k \leq \sum_{k=0}^{n} v_k \leq \sum_{k=0}^{+\infty} v_k. \tag{1}$$

La suite des sommes partielles de la suite positive $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est majorée, donc d'après la proposition 5 converge.

Par passage à la limite dans la ligne (1), on récupère finalement,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$

(ii) Si la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ diverge, alors comme la suite $\left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right)_{n\in\mathbf{N}}$ est croissante, on a $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k = +\infty$.

Or, pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a $\sum_{k=0}^{n} u_k \leq \sum_{k=0}^{n} v_k$, le théorème de comparaison (pour les suites !) permet de conclure que $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} v_k = +\infty$: la série $\sum_{n\geq 0} v_n$ diverge.

□

Exemple 5. On s'intéresse à la nature de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n2^n}$. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on a $0 \leq \frac{1}{n2^n} \leq \frac{1}{2^n}$. Or la série $\sum_{n\geq 1} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ (série géomeétrique de raison $\frac{1}{2}$).

Par comparaison par inégalité des séries à termes positifs, la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n2^n}$ converge.

Théorème 2. *Théorème de comparaison par équivalence.*
Soient $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *deux suites positives sur un voisinage de* $+\infty$ *telles que* $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$. *Alors,*

$$\sum_{n\geq 0} u_n \text{ converge} \iff \sum_{n\geq 0} v_n \text{ converge.}$$

⚠*En cas de convergence, on ne peut rien dire sur les sommes.*

Remarque 4. Le résultat se généralise aux suites négatives sur un voisinage de $+\infty$.

Démonstration. On rappelle que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ si, par définition, il existe une suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de limite nulle telle que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = (1+\varepsilon_n)\, v_n$.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $\varepsilon_n \leq 1$ de sorte que $u_n \leq 2v_n$ pour $n \geq N$.
Ainsi, si la série $\sum\limits_{n\geq 0} v_n$ converge, par comparaison par inégalité des séries à termes positifs, on en déduit que la série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ converge.

$\boxed{\Longleftarrow}$ La preuve est analogue.

$\square$

Exemple 6. 1. Comme $\dfrac{1}{n^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n\,(n+1)}$. Or, d'après l'exemple 3, la série $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{1}{n\,(n+1)}$ converge. Le théorème de comparaison par équivalence des séries à termes positifs assure que la série $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{1}{n^2}$ converge.

2. Comme $\sin(3^{-n}) \underset{n\to+\infty}{\sim} 3^{-n}$ et la série $\sum\limits_{n\geq 0} 3^{-n}$ converge (série géométrique de raison $1/3$), par comparaison par équivalence des séries à termes positifs, la série $\sum\limits_{n\geq 0} \sin\left(3^{-n}\right)$ converge.

Proposition 6. *Règle de d'Alembert.*
*Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite à termes **strictement positifs** telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$.*

(i) *Si $\ell < 1$, la série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ converge.*

(ii) *Si $\ell > 1$, la série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ diverge.*

⚠Lorsque $\ell = 1$, on ne peut rien dire. Par exemple, la série $\sum\limits_{n\geq 0} 1$ diverge (grossièrement), alors que la série $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{1}{n^2}$ converge.

Remarque 5. La réciproque de la règle de d'Alembert est fausse. Par exemple, soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est définie par :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_n = \begin{cases} \left(\dfrac{1}{2}\right)^n & \text{si } n \text{ est pair} \\ \left(\dfrac{1}{3}\right)^n & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}.$$

On vérifie facilement que $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbf{N}$, que la série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ converge et pourtant la suite $\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n\in\mathbf{N}}$ n'a pas de limite en $+\infty$.

Démonstration. (i) Soit $a = \dfrac{\ell+1}{2} \in \,]\ell, 1[$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$, il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq a$, soit $u_{n+1} \leq a u_n$.
Une récurrence immédiate montre alors que

$$\forall p \in \mathbf{N}, \quad u_{N+p} \leq a^p u_N.$$

Comme la série $\sum\limits_{p\geq 0} a^p$ converge (série géométrique dont la raison est comprise entre -1 et 1 strictement), par comparaison par inégalité des séries à termes positifs, la série $\sum\limits_{p\geq 0} u_{N+p}$ converge, donc la série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ converge.

(ii) La preuve est analogue. Soit $a = \dfrac{\ell+1}{2} \in]1, \ell[$. Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$, il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geq a$, soit $u_{n+1} \geq a u_n$.
Une récurrence immédiate montre alors que

$$\forall p \in \mathbf{N}, \quad u_{N+p} \geq a^p u_N.$$

Comme la série $\sum\limits_{p \geq 0} a^p$ diverge (série géométrique la raison est strictement plus grande que 1), par comparaison par inégalité des séries à termes positifs, la série $\sum\limits_{p \geq 0} u_{N+p}$ diverge, donc la série $\sum\limits_{n \geq 0} u_n$ diverge.

□

Exemple 7. La série $\sum\limits_{n \geq 0} \dfrac{1}{n!}$ converge car pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\dfrac{1}{n!} > 0$ et

$$\frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0 < 1.$$

2.2 Comparaison série/intégrale

Proposition 7. *Comparaison série/intégrale.*

Soit $n_0 \in \mathbf{N}$. Soit $f : [n_0, +\infty[\longrightarrow \mathbf{R}_+$ une fonction continue et décroissante. Alors, la série $\sum\limits_{n \geq n_0} f(n)$ et l'intégrale $\displaystyle\int_{n_0}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature.

Remarque 6. (i) La méthode de comparaison série/intégrale permet aussi de donner des équivalents simples.
(ii) La méthode s'adapte pour les fonctions croissantes.

Démonstration. Soit $k \geq n_0$ un entier naturel. En utilisant la décroissance de f, on peut écrire :

$$\forall t \in [k, k+1], \quad f(k+1) \leq f(t) \leq f(k).$$

En intégrant cette égalité sur le segment $[k, k+1]$ (f y est continue), on a

$$\int_k^{k+1} f(k+1)\,\mathrm{d}t \leq \int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_k^{k+1} f(k)\,\mathrm{d}t,$$

soit

$$f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leq f(k).$$

Soit $N \geq n_0$. En sommant l'inégalité précédente entre n_0 et N, on obtient :

$$\sum_{k=n_0}^{N} f(k+1) \leq \sum_{k=n_0}^{N} \int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leq \sum_{k=n_0}^{N} f(k).$$

La relation de Chasles donne alors

$$\sum_{k=n_0}^{N} f(k+1) \leq \int_{n_0}^{N+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leq \sum_{k=n_0}^{N} f(k).$$

(i) On suppose que la série $\sum_{k\geq n_0} f(k)$ converge. Ainsi,

$$\forall N \geq n_0, \quad \int_{n_0}^{N+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leq \sum_{k=n_0}^{N} f(k) \leq \sum_{k=n_0}^{+\infty} f(k).$$

La fonction $x \in [n_0, +\infty[\longmapsto \int_{n_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$ est croissante (car f est positive), majorée, donc elle admet une limite finie en $+\infty$: l'intégrale $\int_{n_0}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

(ii) On suppose que l'intégrale $\int_{n_0}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge. Comme f est positive, on a

$$\forall N \geq n_0, \quad \sum_{k=n_0}^{N} f(k+1) \leq \int_{n_0}^{N+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_{n_0}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

D'après la proposition 5, la série $\sum_{n\geq n_0} f(k)$ converge.

$\square$

Exemple 8. On se propose de donner un équivalent simple de $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

Soit $f : t \in [1, +\infty[\longmapsto \frac{1}{t}$. f est clairement décroissante sur $[1, +\infty[$, ainsi pour tout $k \in \mathbf{N}$, $k \geq 2$, on a

$$\int_{k}^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leq \frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^{k} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Soit $n \geq 2$. En sommant entre 2 et n, on a

$$\sum_{k=2}^{n} \int_{k}^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leq \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leq \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} f(t)\,\mathrm{d}t,$$

d'où, en utilisant la relation de Chasles,

$$\int_{2}^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leq \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leq \int_{1}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Puis en ajoutant 1 et en calculant les intégrales :

$$\ln(n+1) - \ln(2) + 1 \leq H_n \leq \ln(n) + 1.$$

Or, $\ln(n+1) = \ln(n) + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$, ainsi en divisant la ligne précédente par $\ln(n)$, on a

$$1 + \frac{1 - \ln(2) + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} \leq \frac{H_n}{\ln(n)} \leq 1 + \frac{1}{\ln(n)}.$$

En remarquant que

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1 - \ln(2) + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\ln(n)}\right) = \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{\ln(n)}\right) = 1,$$

par encadrement, on a $\lim_{n\to+\infty} \frac{H_n}{\ln(n)} = 1$, soit $H_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.

Exemple 9. On se propose de déterminer un équivalent simple de $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^3}$.

$f : t \in [1, +\infty[\longmapsto \mathbf{R}$ est clairement décroissante. Soit $k \in \mathbf{N}$, $k \geq 2$. On a donc

$$\int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leq \frac{1}{k^3} \leq \int_{k-1}^{k} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Comme $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^3}$ converge, on peut sommer ces inégalités pour $k \geq n+1$, ainsi (après avoir utilisé la relation de Chasles)

$$\int_{n+1}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^3} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^3} \leq \int_{k=n}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^3}.$$

Mais, si $A \geq n$, on a

$$\int_n^A \frac{\mathrm{d}t}{t^3} = \left[\frac{1}{-2t^2}\right]_n^A = -\frac{1}{2A^2} + \frac{1}{2n^2} \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2n^2}.$$

On montre de même que $\displaystyle\int_{n+1}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^3} = \frac{1}{2(n+1)^2}$, ainsi

$$\frac{1}{2(n+1)^2} \leq R_n \leq \frac{1}{2n^2},$$

soit

$$\frac{n^2}{(n+1)^2} \leq 2n^2 R_n \leq 1.$$

Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = 1$, par encadrement on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 2n^2 R_n = 1$, soit $R_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2n^2}$.

Définition 6. *Séries de Riemann.*

*Pour $\alpha \in \mathbf{R}$, la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ s'appelle une **série de Riemann**.*

Proposition 8. *Caractérisation de la convergence des séries de Riemann.*

Pour tout $\alpha \in \mathbf{R}$, la série de Riemann $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si, et seulement si, $\alpha > 1$.

Démonstration. Soit la fonction f définie sur $[1, +\infty[$ par $f(t) = \dfrac{1}{t^\alpha}$. f est continue, positive et décroissante.

(i) Si $\alpha \leq 0$, la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ diverge grossièrement.

(ii) Si $\alpha > 0$. Soit la fonction f définie sur $[1, +\infty[$ par $f(t) = \dfrac{1}{t^\alpha}$. f est continue, positive et décroissante. On distingue le cas où $\alpha = 1$ ou non.

   (a) Si $\alpha = 1$. On a $\displaystyle\int_1^n f(t)\,\mathrm{d}t = [\ln(t)]_1^n = \ln(n)$. Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \ln(n) = +\infty$, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge.

   Par la proposition 7, la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ diverge.

   (b) Si $\alpha \neq 1$. On a $\displaystyle\int_1^n f(t)\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_1^n = \frac{1}{(-\alpha+1)\,n^{1-\alpha}} + \frac{1}{\alpha-1}$.

   Or, la suite $\displaystyle\left(\frac{1}{(-\alpha+1)\,n^{1-\alpha}}\right)_{n\geq 1}$ converge si, et seulement si, $\alpha > 1$. Le cas échéant, elle converge vers 0.

□

3 Séries absolument convergentes

Définition 7. *Convergence absolue.*
On dit que la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ ***converge absolument*** *si la série* $\sum_{n\geq 0} |u_n|$ *converge.*

Proposition 9. *La convergence absolue entraîne la convergence.*

Démonstration. Soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ une série qui convergence absolument. Soit $v_n = u_n + |u_n|$. Il est clair que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $0 \leq v_n \leq 2|u_n|$.

Par comparaison par inégalité des séries à termes positifs, la série $\sum_{n\geq 0} v_n$ converge.

Pour conclure, il suffit de remarquer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = v_n - |u_n|$ et d'utiliser la proposition 2. □

⚠La réciproque est fausse, on peut montrer que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ converge mais ne converge pas absolument.

Proposition 10. *Inégalité triangulaire pour les séries.*
Soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ *une série absolument convergente. Alors,*

$$\left|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|.$$

Démonstration. Il suffit de remarquer que (inégalité triangulaire pour les sommes finies)

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad \left|\sum_{k=0}^{n} u_k\right| \leq \sum_{k=0}^{n} |u_k|$$

et de faire tendre n vers $+\infty$. □

4 Développement décimal d'un réel

Théorème 3. *Développement décimal illimité propre.*
Soit $x \in \mathbf{R}$. *Il existe* $a_0 \in \mathbf{Z}$ *et une unique suite* $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*} \in [\![0,9]\!]^{\mathbf{N}^*}$ *telle que*

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{10^k} \leq x < \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{10^k} + \frac{1}{10^n}.$$

De plus, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, *on a La suite* $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *s'appelle le* ***développement décimal illimité propre*** *du réel* x.

Remarque 7. Le théorème 3 assure en particulier que $x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{10^n}$.

Démonstration. On procède par analyse-synthèse.

Analyse. On suppose qu'une telle suite existe. Alors, on a :

$$\forall p \in \mathbf{N}, \quad \sum_{k=0}^{p} \frac{a_k}{10^k} \leq x < \sum_{k=0}^{p} \frac{a_k}{10^k} + \frac{1}{10^p}. \tag{2}$$

En prenant $p = 0$ dans (2), on a

$$a_0 \leq x < a_0 + 1,$$

donc $a_0 = \lfloor x \rfloor$: a_0 est unique.
Soit $n \in \mathbf{N}$, on suppose que $a_0, a_1, \dots, a_n$ vérifient (2) et sont les seuls à vérifier la relation (2) avec $p = n$.
En prenant $p = n+1$ dans (2), on a donc

$$\sum_{k=0}^{n+1} \frac{a_k}{10^k} \leq x < \sum_{k=0}^{n+1} \frac{a_k}{10^k} + \frac{1}{10^{n+1}}$$

d'où

$$a_{n+1} \leq 10^{n+1} \left(x - \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{10^k} \right) < a_{n+1} + 1.$$

Il s'ensuit que $a_{n+1} = \lfloor 10^{n+1} \left(x - \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{10^k} \right) \rfloor$, ainsi a_{n+1} est uniquement défini.
Si la suite $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ existe, elle est unique.

Synthèse. Soit $x \in \mathbf{R}$. Soit la suite $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ définie ci-dessus : $a_0 = \lfloor x \rfloor$ et pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $a_n = \lfloor 10^n \left(x - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{10^k} \right) \rfloor$.
Par définition de la partie entière, il est clair que l'on a :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{10^k} \leq x < \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{10^k} + \frac{1}{10^n}.$$

Il est clair que $a_0 \in \mathbf{Z}$. Par définition de a_0, on a $x - a_0 \in [0, 10[$. Ainsi :

$$a_1 = \lfloor 10\,(x - a_0) \rfloor \in [\![0, 9]\!].$$

Si l'on suppose $a_1, \dots, a_n \in [\![0, 9]\!]$, par définition de a_{n+1}, on a

$$a_{n+1} = \lfloor 10^{n+1} \left(x - \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{10^k} \right) \rfloor.$$

Or, on a

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{10^k} \leq x < \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{10^k} + \frac{1}{10^n},$$

d'où

$$0 \leq 10^{n+1} \left(x - \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{10^k} \right) < 10.$$

Ainsi, $a_{n+1} \in [\![0, 9]\!]$.
Cela montre que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $a_n \in [\![0, 9]\!]$.
On a montré qu'une telle suite $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ existe et vérifie les conditions requises.

□

En fait, on peut simplifier l'expression de la suite $(a_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ obtenue. Nous utiliserons le résultat suivant :

Lemme 1. *Pour tout $(x, n) \in \mathbf{R} \times \mathbf{Z}$, on a $\lfloor x + n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$.*

Démonstration. Par définition, on a $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$, ainsi $\lfloor x \rfloor + n \leq x + n < \lfloor x \rfloor + n + 1$.
Comme $\lfloor x \rfloor + n \in \mathbf{Z}$ et $\lfloor x \rfloor + n + 1 \in \mathbf{Z}$, on en déduit que $\rfloor x + n \lfloor = \lfloor x + \rfloor x + n$.

□

Proposition 11. *En reprenant les notations du théorème 3, on a*

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad a_n = \lfloor 10^n n \rfloor - 10 \lfloor 10^{n-1} x \rfloor.$$

Démonstration. D'après la preuve du théorème 3, on a

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{10^k} \leq x < \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{10^k} + \frac{1}{10^n} \tag{3}$$

et, on avait obtenu

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad a_n = \lfloor 10^n \left(x - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{10^k} \right) \rfloor = \lfloor 10^n x - 10 \sum_{k=0}^{n-1} a_k 10^{n-1-k} \rfloor. \tag{4}$$

La ligne (3) donne en particulier

$$\sum_{k=0}^{n-1} a_k 10^{n-1-k} \leq 10^{n-1} x < \sum_{k=0}^{n-1} a_k 10^{n-1-k} + 1.$$

Comme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a_k 10^{n-1-k} \in \mathbf{Z}$, on a $\lfloor 10^{n-1} x \rfloor = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a_k 10^{n-1-k}$. Ainsi, en reprenant (3), on a

$$a_n = \lfloor 10^n x - 10 \lfloor 10^{n-1} x \rfloor \rfloor.$$

Le lemme 1 donne finalement

$$a_n = \lfloor 10^n x \rfloor - 10 \lfloor 10^{n-1} x \rfloor.$$

□

La notion de développement décimal illimité propre permet de caractériser les nombres rationnels.

Proposition 12. *Caractérisation des rationnels.*
Soit $x \in \mathbf{R}$. x est rationnel si, et seulement si, la suite $(a_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ est périodique à partir d'un certain rang.

Démonstration. On traite séparemment les deux équivalences.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Si x est un rationnel positif, on pose la division du numérateur p par le dénominateur q, division que l'on poursuit après la virgule. À chaque étape de la division, il n'y a que q restes possibles, l'un des nombres $0, 1, \ldots, q-1$ et, après au plus $q+1$ étapes, on aura obtenu deux restes égaux (principe des tiroirs). La même séquence de décimales recommence alors.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Comme $x \in \mathbf{Q}$ si, et seulement si $x - \lfloor x \rfloor \in \mathbf{Q}$, on peut supposer $x \in [0, 1[$. On écrit alors

$$x = 0{,}d_1 \ldots d_m c_1 \ldots c_p c_1 \ldots c_p \ldots.$$

Or, $x \in \mathbf{Q}$ si, et seulement si $10^m x - \lfloor 10^m x \rfloor \in \mathbf{Q}$, ainsi il suffit de montrer que $y = 0{,}c_1 \ldots c_p c_1 \ldots c_p \ldots \in \mathbf{Q}$. On remarque que

$$10^p y = c_1 10^{p-1} + \cdots + c_p + y \iff y = \frac{c_1 10^{p-1} + \cdots + c_p}{10^p - 1}.$$

Or $c_1 10^{p-1} + \cdots + c_p \in \mathbf{N}$, on en déduit que $y \in \mathbf{Q}$, puis que $x \in \mathbf{Q}$.

□

Exemple 10. On a $\dfrac{22}{7} = 3{,}142857\,142857\ldots$.

5 Exemples

Pour étudier la nature d'une série $\displaystyle\sum_{n \geq 0} u_n$, on peut essayer d'appliquer le plan suivant :

1. On vérifie (rapidement) que la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge vers 0. Si ce n'est pas le cas, la série $\displaystyle\sum_{n \geq 0} u_n$ diverge grossièrement.

2. Un équivalent de u_n ou $|u_n|$.
3. Une inégalité portant sur u_n ou $|u_n|$.
4. La règle de d'Alembert avec $|u_n|$.
5. Une comparaison série/intégrale.

Exemple 11. On s'intéresse à la nature de la série $\sum_{n\geq 1} \cos\left(\frac{1}{n}\right)$.

Comme $\lim_{n\to+\infty} \cos\left(\frac{1}{n}\right) = 1$, on en déduit que la série $\sum_{n\geq 1} \cos\left(\frac{1}{n}\right)$ diverge grossièrement.

Exemple 12. On s'intéresse à la nature de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2+1}$.

On a

$$\left|\frac{(-1)^n}{n^2+1}\right| \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}.$$

Or, la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge, par comparaison par équivalence des séries à termes positifs, la série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2+1}$ converge absolument, donc converge.

Exemple 13. On s'intéresse à la nature de la série $\sum_{n\geq 0} \frac{\cos(n)+\sin(n)}{2^n}$.

On a

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad \left|\frac{\cos(n)+\sin(n)}{2^n}\right| \leq \frac{2}{2^n} \leq \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Or, la série $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{2^{n-1}}$, par comparaison par inégalité des séries à termes positives, la série $\sum_{n\geq 0} \frac{\cos(n)+\sin(n)}{2^n}$ converge absolument, donc converge.

Exemple 14. On s'intéresse à la nature de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{\ln(n)}{n}$.

On a

$$\forall n \geq 3, \quad \frac{\ln(n)}{n} \geq \frac{1}{n}.$$

Or, la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ diverge. Par comparaison par inégalité des séries à termes positifs, la série $\sum_{n\geq 1} \frac{\ln(n)}{n}$ diverge.

Exemple 15. On s'intéresse à la nature de la série $\sum_{n\geq 1} \left(\sin\left(\frac{1}{n}\right) - \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{n}\right)\right)$.

En utilisant les développements limités de sin et Arctan en 0, on a

$$\sin\left(\frac{1}{n}\right) - \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) - \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) = \frac{1}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Ainsi

$$\sin\left(\frac{1}{n}\right) - \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{6n^3}.$$

Or, la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{6n^3}$ converge, par comparaison par équivalence des séries à termes positifs, la série $\sum_{n\geq 1} \left(\sin\left(\frac{1}{n}\right) - \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{n}\right)\right)$ converge.

Exemple 16. On s'intéresse à la nature de la série $\sum_{n\geq 0} \frac{n^2-1}{2^n}$.

On a

$$\forall n \geq 2, \quad \frac{\frac{(n+1)^2-1}{2^{n+1}}}{\frac{n^2-1}{2^n}} = \frac{\frac{(n+1)^2-1}{n^2-1}}{2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}.$$

D'après le critère de d'Alembert, on en déduit que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{n^2-1}{2^n}$ converge.

Exemple 17. On s'intéresse à la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{n^n}{n!}$.

On a

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad \frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{n^n}{n!}} = \frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}.$$

Or, $\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$, puis $n\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} 1$, d'où par continuité de exp en 1, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \mathrm{e} > 1.$$

Par le critère de d'Alembert, la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{n^n}{n!}$ diverge.

Exemple 18. On s'intéresse à la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n\ln(n)}$.

Soit $f : t \in [2, +\infty[\longmapsto \dfrac{1}{t\ln(t)}$. f est continue, décroissante et de limite nulle.

D'après le théorème de comparaison série/intégrale, il suffit de s'intéresser à la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$. Soit $A \geq 2$, on a

$$\int_2^A \frac{\mathrm{d}t}{t\ln(t)} = [\ln(\ln(t))]_2^A = \ln(\ln(A)) - \ln(\ln(2)) \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

On en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge, ainsi la série $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n\ln(n)}$ diverge.

6 Compléments

6.1 Théorème d'Abel

Nous nous proposons de prouver le résultat suivant.

Théorème 4. *Théorème d'Abel.*

Soient $(a_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathbf{K}^{\mathbf{N}}$ telle que la suite $\left(\displaystyle\sum_{k=0}^n a_k\right)_{n\in\mathbf{N}}$ soit bornée. Soit aussi $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de réels décroissante et de limite nulle.

Alors, la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} a_n b_n$ converge.

Démonstration. Pour $n \in \mathbf{N}$, on pose $A_n = \displaystyle\sum_{k=0}^n a_k$. On pose aussi $A_{-1} = 0$. On remarque donc que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $a_n = A_n - A_{n-1}$.

Soit $n \in \mathbf{N}$. On a

$$\sum_{k=0}^n a_k b_k = \sum_{k=0}^n (A_k - A_{k-1})\, b_k = \sum_{k=0}^n A_k b_k - \sum_{k=0}^n A_{k-1} b_k = \sum_{k=0}^n A_k b_k - \sum_{k=0}^{n-1} A_k b_{k+1} = A_n b_n + \sum_{k=0}^{n-1} A_k\,(b_k - b_{k+1})\,. \tag{5}$$

Comme $(A_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est bornée et $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de limite nulle, on en déduit que la suite $(A_n b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers 0.

De plus, en notant $M \in \mathbf{R}_+$ un majorant de la suite $(A_n)_{n\in\mathbf{N}}$

$$\sum_{k=0}^{n-1} |A_k (b_k - b_{k+1})| \leq M \sum_{k=0}^{n-1} |b_k - b_{k+1}| .$$

En utilisant la décroissance de $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$, on a pour tout $k \in \mathbf{N}$, $|b_k - b_{k+1}| = b_k - b_{k+1}$ et en notant que $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ prend des valeurs positives, on a

$$\sum_{k=0}^{n-1} |A_k (b_k - b_{k+1})| \leq M \sum_{k=0}^{n-1} (b_k - b_{k+1}) \leq M b_0.$$

D'après la proposition 5, on en déduit que la série $\sum_{n\geq 0} A_n (b_n - b_{n+1})$ converge absolument, donc converge. En particulier, la suite $\left(\sum_{k=0}^{n-1} A_n (b_n - b_{n+1})\right)_{n\in\mathbf{N}}$ admet une limite finie lorsque n tend vers $+\infty$.

En reprenant la ligne (5), on en déduit que la série $\sum_{n\geq 0} a_n b_n$ converge.

□

Exemple 19. On s'intéresse à la nature de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{\cos(n)}{\sqrt{n}}$.

On pose $a_n = \cos(n)$ et $b_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$. La suite $(b_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est décroissante et de limite nulle. De plus,

$$\begin{aligned}
\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad \sum_{k=1}^{n} \cos(k) &= \operatorname{Re}\left(\sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k}\right) \\
&= \operatorname{Re}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}} \times \frac{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}n}}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}}}\right) \\
&= \operatorname{Re}\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}n/2}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}/2}} \times \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n/2}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}n/2}}{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}/2}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}/2}}\right) \\
&= \operatorname{Re}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)/2} \times \frac{-2\mathrm{i}\sin(n/2)}{-2\mathrm{i}\sin(1/2)}\right) \\
&= \frac{\sin(n/2)\cos((n+1)/2)}{\sin(1/2)}
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad \left|\sum_{k=1}^{n} \cos(k)\right| \leq \frac{1}{\sin(1/2)}.$$

La suite $\left(\sum_{k=1}^{n} \cos(k)\right)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est donc bornée. D'après le théorème d'Abel, la série $\sum_{n\geq 1} \frac{\cos(n)}{\sqrt{n}}$ converge.

6.2 Formule de Stirling

Proposition 13. *Formule de Stirling.*

On a

$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \sqrt{2\pi n}.$$

Démonstration. On pose, pour $n \in \mathbf{N}^*$, $u_n = \dfrac{n!\mathrm{e}^n}{n^n\sqrt{n}}$ et $v_n = \ln(u_n)$. On a :

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) \\ &= \ln\left(\frac{(n+1)!\mathrm{e}^{n+1}}{(n+1)^{n+1}\sqrt{n+1}} \times \frac{n^n\sqrt{n}}{n!\mathrm{e}^n}\right) \\ &= -\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + 1. \end{aligned}$$

On fait le développement limité de $\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$ à l'ordre 3 lorsque n tend vers $+\infty$, ainsi

$$v_{n+1} - v_n = 1 - \left(n+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) = -\frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

ainsi $v_{n+1} - v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{12n^2}$. Or, la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} -\frac{1}{12n^2}$ converge, par comparaison par équivalence des séries à termes négatifs, la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} (v_{n+1} - v_n)$ converge.

D'après la proposition 3, la suite $(v_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge. Par continuité de la fonction exp sur $\mathbf{R}$, on en déduit que $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge vers une limite strictement positive ℓ. On a donc

$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \sqrt{n}\ell. \tag{6}$$

Pour obtenir la valeur de ℓ, on utilise le résultat obtenu à la sous-partie 5.1 du chapitre 2 sur les intégrales de Wallis :

$$\frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \times \frac{\pi}{2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{4n}}. \tag{7}$$

En utilisant (7) dans (6), on obtient

$$\frac{\left(\dfrac{2n}{\mathrm{e}}\right)^{2n}\sqrt{2n}\ell}{\left(\left(\dfrac{n}{\mathrm{e}}\right)^n\sqrt{n}\ell 2^n\right)^2} \times \frac{\pi}{2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{4n}},$$

soit, après simplifications,

$$\ell \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi}.$$

Ainsi,

$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \sqrt{2\pi n}.$$

□

6.3 Étude des séries de Bertrand

Nous nous proposons d'établir le résultat suivant qui précise la proposition 8.

Proposition 14. *Séries de Bertrand.*

Soit $(\alpha,\beta) \in \mathbf{R}^2$. La série $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta(n)}$ converge si, et seulement si, $\alpha > 1$ ou $\alpha = 1$ et $\beta > 1$.

Démonstration. Nous commence par discuter suivant la valeur de α.

(i) Si $\alpha > 1$. Soit $\gamma = \dfrac{1+\alpha}{2} \in \,]1, \alpha[$. On a

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\frac{1}{n^\alpha \ln^\beta(n)}}{\frac{1}{n^\gamma}} = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n^{\alpha-\gamma} \ln^\beta(n)} = 0$$

car $\alpha - \gamma > 0$. Ainsi, il existe $N \in \mathbf{N}$, $N \geq 2$ tel que

$$\forall n \geq N, \quad \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta(n)} \leq \frac{1}{n^\gamma}.$$

Or, la série $\displaystyle\sum_{n \geq N} \frac{1}{n^\gamma}$ converge. Par comparaison par inégalité des séries à termes positifs, la série $\displaystyle\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta(n)}$ converge.

(ii) Si $\alpha < 1$. Soit $\gamma = \dfrac{1+\alpha}{2} \in \,]\alpha, 1[$. On a

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\dfrac{1}{n^\alpha \ln^\beta(n)}}{\dfrac{1}{n^\gamma}} = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n^{\alpha-\gamma} \ln^\beta(n)} = +\infty$$

car $\alpha - \gamma > 0$. Ainsi, il existe $N \in \mathbf{N}$, $N \geq 2$ tel que

$$\forall n \geq N, \quad \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta(n)} \geq \frac{1}{n^\gamma}.$$

Or, la série $\displaystyle\sum_{n \geq N} \frac{1}{n^\gamma}$ diverge. Par comparaison par inégalité des séries à termes positifs, la série $\displaystyle\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta(n)}$ diverge.

(iii) Si $\alpha = 1$.

(a) Si $\beta = 1$. Ce cas a déjà été fait dans l'exemple 18 : la série $\displaystyle\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n \ln(n)}$ diverge.

(b) Si $\beta \neq 1$. On pose $f : t \in [2, +\infty[\longmapsto \dfrac{1}{t \ln^\beta(t)}$. On a

$$\forall t \geq 2, \quad f'(t) = -\frac{\ln^{\beta-1}(t)\left(\ln(t) + \beta\right)}{\left(t \ln^\beta(t)\right)^2}.$$

On remarque que $f'(t) < 0$ pour $t > \mathrm{e}^{-\beta}$. Soit $n_0 \in \mathbf{N}$ avec $n_0 \geq \mathrm{e}^{-\beta}$.
D'après le théorème de comparaison série/intégrale, il suffit de s'intéresser à la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_{n_0}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t \ln^\beta(t)}$. Soit $A \geq n_0$, on a

$$\int_{n_0}^{A} \frac{\mathrm{d}t}{t \ln^\beta(t)} = \left[\frac{\ln^{-\beta+1}(t)}{-\beta+1}\right]_{n_0}^{A} = \frac{1}{-\beta+1}\left(\ln^{-\beta+1}(A) - \ln^{-\beta+1}(n_0)\right).$$

Or, $A \longmapsto \ln^{-\beta+1}(A)$ admet une limite finie en $+\infty$ si, et seulement si, $\beta > 1$.
Ainsi, la série $\displaystyle\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n \ln^\beta(n)}$ converge si, et seulement si, $\beta > 1$.

□