# Chapitre 4 : Exercices

**Exercice 1.**

Étudier la convergence et calculer la somme des séries suivantes en cas de convergence.

1. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n\,(n+1)}$ ;
2. $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \left(\frac{1}{\sqrt{n-1}} - \frac{2}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$ ;
3. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$ ;
4. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$.

**Exercice 2.**

Soit $x \in \mathbf{R}$. On s'intéresse à la nature de la série $S\,(x) = \displaystyle\sum_{n\geq 0} nx^n$.

1. Conclure lorsque $|x| \geq 1$.
2. Calculer de deux façons la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} kx^k$ où $n \in \mathbf{N}$.
3. En déduire, lorsque $|x| < 1$, que $S\,(x)$ et calculer sa somme.

**Exercice 3.**

On admet que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!}$ converge et $\mathrm{e} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}$. Montrer que les séries suivantes convergent et calculer leur somme.

1. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{n+1}{n!}$ ;
2. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{n^2-2}{n!}$ ;
3. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{n^3}{n!}$.

**Exercice 4.**

Étudier la nature des séries de terme général suivant.

1. $\dfrac{2n-1}{n^3+1}$ ;
2. $\dfrac{\sin(n)}{2^n}$ ;
3. $n\sin\left(\dfrac{1}{n}\right)$ ;
4. $\dfrac{n^2}{(-4)^n}$ ;
5. $1 - \cos\left(\dfrac{\pi}{n}\right)$ ;
6. $2^n n$ ;
7. $n^2\mathrm{e}^{-n}$ ;
8. $n\cos(n)\sin\left(\dfrac{\pi}{n^3}\right)$ ;
9. $n^2\sin\left(\dfrac{\pi}{2^n}\right)$ ;
10. $\dfrac{\cos(n)}{n^3-n}$ ;
11. $\mathrm{e} - \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ ;
12. $n^n\mathrm{e}^{-n^2}$ ;
13. $\dfrac{n^n}{n!}$ ;
14. $\dfrac{1}{n}\sin\left(\left(n+\dfrac{1}{n}\right)\pi\right)$ ;
15. $\dfrac{1}{\sqrt{n^2-1}} - \dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}$ ;
16. $\dfrac{\ln^2(n)}{n}$ ;
17. $\dfrac{2\times 4\times\cdots\times 2n}{n^n}$ ;
18. $\dfrac{1!+2!+\cdots+n!}{(n+2)!}$ ;
19. $\dfrac{\arctan(n)}{\sqrt{n}}$ ;
20. $\dfrac{\mathrm{Arcsin}\,(1/n)}{n}$ ;
21. $\mathrm{e}^{-\sqrt{n}}$.

**Exercice 5.**

Étudier la série de terme général $\displaystyle\int_0^{\pi/n} \frac{\sin(t)}{1+t}\mathrm{d}t$.

**Exercice 6.**

Soit $a \in \mathbf{R}$. Étudier la nature des séries $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{a^n}{1+a^{2n}}$ et $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{n!}{n^{an}}$.

**Exercice 7.**

Soit $(a,b) \in \mathbf{R}^2$ et $u_n = \ln(n) + a\ln(n+1) + b\ln(n+2)$.
Donner le couple $(a,b) \in \mathbf{R}^2$ pour que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n$ converge. Calculer alors la somme de la série.

**Exercice 8.**

Pour quelles valeurs de $a \in \mathbf{R}$, la série $\displaystyle\sum_{n} \left(\sqrt[3]{n^3+an} - \sqrt[3]{n^3+2}\right)$ converge-t-elle ?

**Exercice 9.**

Soient $\displaystyle\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\displaystyle\sum_{n\geq 0} v_n$ deux séries convergentes à termes strictement positifs. Montrer que les séries suivantes convergent.

1. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \max\{u_n, v_n\}$ ;
2. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \sqrt{u_n v_n}$ ;
3. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{u_n v_n}{u_n+v_n}$.

**Exercice 10.**

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{\mathrm{e}^{-u_n}}{n+1}$.
Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers 0 et déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} u_n$.

**Exercice 11.**

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de réels positifs et soit $v_n = \dfrac{u_n}{1+u_n}$.
Montrer que $\displaystyle\sum_{n\geq 0} u_n$ converge si, et seulement si, la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} v_n$ converge.

**Exercice 12.**

En utilisant la méthode de comparaison série/intégrale, donner un équivalent des suites suivantes.

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$ ;
2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ ;
3. $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$ ;
4. $\ln(n!)$ ;
5. $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k\sqrt{k}}$ ;
6. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln^2(k)$ ;
7. $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \sqrt{k}$ ;
8. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{k}$.

**Exercice 13.**

1. Montrer que, pour tout $a \in \mathbf{R}$, la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{a}{n^2+a^2}$ converge. On note $S(a)$ sa somme.
2. Encadrer $S(a)$ par deux intégrales pour $a > 0$.
3. En déduire la limite de $S(a)$ lorsque $a$ tend vers $+\infty$.

**Exercice 14.**

1. Pour quelles valeurs de $x \in \mathbf{R}$, la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^x}$ converge-t-elle ? On note $\zeta(x)$ sa somme en cas de convergence.
2. Montrer que $\zeta$ est décroissante sur $]1, +\infty[$.
3. Montrer que $\zeta$ admet une limite lorsque $x$ tend vers $+\infty$ et montrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \zeta(x) = 1$.
4. Donner un équivalent simple de $\zeta(x) - 1$ lorsque $x$ tend vers $+\infty$.
5. Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} \zeta(x) = +\infty$.
6. Donner un équivalent simple de $\zeta(x)$ en $1^-$.

**Exercice 15.**

Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on pose

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k},\ u_n = H_n - \ln(n) \text{ et } v_n = H_n - \ln(n+1).$$

1. Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ sont adjacentes.
2. En déduire qu'il existe un réel $\gamma$ tel que

$$H_n \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + o(1).$$

3. Trouver un couple $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ tel que

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad \frac{1}{n(2n-1)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{2n-1}.$$

4. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(2n-1)}$ converge et calculer sa somme.

**Exercice 16.**

Dans cet exercice, la fonction ch est la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad \mathrm{ch}(x) = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}.$$

1. Soit $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de réels positifs. Montrer que si la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} x_n$ converge, alors la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} x_n^2$ converge.
   Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{\mathrm{ch}(u_n)}.$$

2. Faire le tableau de variations de la fonction ch.
3. Donner le développement limité de ch à l'ordre 2 au voisinage de 0.
4. (a) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est strictement positive et strictement décroissante.
   (b) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est convergente et donner sa limite.
5. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on pose $v_n = \dfrac{u_{n+1}}{u_n} - 1$.
   (a) Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est strictement négative.
   (b) Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est convergente de limite nulle.
   (c) Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, simplifier $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \ln(1 + v_k)$. En déduire que la série de terme générale $v_n$ diverge.
6. (a) Montrer que $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{u_n^2}{2}$.
   (b) En déduire que la série de terme général $u_n^2$ diverge.
   (c) En déduire que la série de terme général $u_n$ diverge.