# Correction du devoir maison 5

**Exercice 1.**

1. • Déjà $(0,0,0) \in E$, donc $E$ n'est pas vide. Soient $(x_1,y_1,z_1)$ et $(x_2,y_2,z_2)$ deux éléments de $E$. Soit $\lambda \in \mathbf{K}$. Montrons que $(x_1,y_1,z_1) + \lambda(x_2,y_2,z_2) = (x_1+\lambda x_2, y_2+\lambda y_2, z_1+\lambda z_2) \in E$. On a :

$$\begin{array}{rcl} x_1+\lambda x_2 - (y_2+\lambda y_2) + (z_1+\lambda z_2) & = & x_1 - y_1 + z_1 + \lambda(x_2 - y_2 + z_2) \\ & = & 0. \end{array}$$

Il s'ensuit que $E$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{K}^3$, c'est donc un espace vectoriel.

• Soit $(x,y,z) \in \mathbf{K}^3$. On a :

$$\begin{array}{rcl} (x,y,z) \in F & \Longleftrightarrow & x - y + z = 0 \\ & \Longleftrightarrow & y = x + z \\ & \Longleftrightarrow & (x,y,z) = (x, x+z, z) \\ & \Longleftrightarrow & (x,y,z) = x(1,1,0) + z(0,1,1). \end{array}$$

Ainsi $E = \mathrm{Vect}((1,1,0),(0,1,1))$. Les vecteurs $(1,1,0)$ et $(0,1,1)$ n'étant pas colinéaires, la famille $((1,1,0),(0,1,1))$ est une base de $E$.

2. • Déjà $E$ n'est pas vide car il contient le polynôme nul. Soient $P$ et $Q$ deux éléments de $E$ et $\lambda \in \mathbf{K}$. On a :

$$(P+\lambda Q)(0) = P(0) + \lambda Q(0) = 0.$$

On montre de même que $(P+\lambda Q)(1)$. Ainsi, $P + \lambda Q \in E$, donc $E$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{K}_3[X]$, c'est donc un espace vectoriel.

• Soit $P = aX^3 + bX^2 + cX + d \in \mathbf{K}_3[X]$. On a :

$$\begin{array}{rcl} P \in E & \Longleftrightarrow & P(0) = d = 0 \text{ et } P(1) = a+b+c+d = 0 \\ & \Longleftrightarrow & d = 0 \text{ et } a = -b-c \\ & \Longleftrightarrow & P = (-b-c)X^3 + bX^2 + cX \\ & \Longleftrightarrow & P = b\left(-X^3+X^2\right) + c\left(-X^3+X\right). \end{array}$$

Ainsi, $E = \mathrm{Vect}\left(-X^3+X^2, -X^3+X\right)$. Les vecteurs $-X^3+X^2$ et $-X^3+X$ ne sont pas colinéaires, on en déduit que la famille $\left(-X^3+X^2, -X^3+X\right)$ est une base de $E$.

3. • Déjà la matrice nulle appartient à $E$, donc $E$ n'est pas vide. Soient $M$ et $N$ deux matrices de $E$ et soit $\lambda \in \mathbf{K}$. On a :

$$A(M+\lambda N) = AM + \lambda AN = 0,$$

donc $M + \lambda N \in E$. On a montré que $E$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbf{K})$, c'est donc un espace vectoriel.

- Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbf{K})$. On a :

$$\begin{array}{rcl} M \in E & \iff & AM = 0 \\ & \iff & \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ a+c & b+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ & \iff & \begin{cases} a+c & = 0 \\ b+d & = 0 \end{cases} \\ & \iff & \begin{cases} a & = -c \\ b & = -d \end{cases} \\ & \iff & \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c & -d \\ c & d \end{pmatrix} \\ & \iff & \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{array}$$

Il s'ensuit que $E = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$. Comme les deux vecteurs ne sont pas colinéaires, on en déduit que la famille $\left(\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$ est une base de $E$.

4. - Déjà $E$ est non vide car il contient le polynôme nul. Soient $P$ et $Q$ dans $E$ et $\lambda \in \mathbf{K}$. On a :

$$(P + \lambda Q)(-X) = P(-X) + \lambda Q(-X) = P(X) + \lambda Q(X) = (P + \lambda Q)(X).$$

On a montré que $P + \lambda Q \in E$, donc $E$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{K}[X]$, c'est donc un espace vectoriel.

- Soit $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$. On a :

$$\begin{array}{rcl} P \in F & \iff & P(-X) = P(X) \\ & \iff & \sum_{k=0}^{d} a_k (-X)^k = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k \\ & \iff & \sum_{k=0}^{d} a_k (-1)^k X^k = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k \\ & \iff & a_{2k+1} = 0 \text{ pour } 0 \le 2k \le d \\ & \iff & P = \sum_{0 \le 2k \le d} a_k X^k. \end{array}$$

On en déduit que $E = \text{Vect}\left(X^{2k},\ k \in \mathbf{N}\right)$. Comme la famille $\left(X^{2k},\ k \in \mathbf{N}\right)$ est une famille de $\mathbf{K}[X]$ contenant des polynômes de degré deux à deux distincts et ne contenant pas le polynôme nul, elle est libre donc forme une base de $E$.

**Exercice 2.**

1. - *Linéarité.*
Soient $(x_1, y_1, z_1)$ et $(x_2, y_2, z_2)$ deux éléments de $\mathbf{K}^3$. Soit $\lambda \in \mathbf{K}$. On a :

$$\begin{array}{rcl} u((x_1, y_1, z_1) + \lambda(x_2, y_2, z_2)) & = & u(x_1 + \lambda x_2, y_1 + \lambda y_2, z_1 + \lambda z_2) \\ & = & (x_1 + \lambda x_2 + y_1 + \lambda y_2, \lambda y_2 + z_1 + \lambda z_2, x_1 + \lambda x_2 + z_1 + \lambda z_2) \\ & = & (x_1 + y_1, y_1 + z_1, z_1 + x_1) + \lambda(x_2 + y_2, y_2 + z_2, z_2 + x_2). \end{array}$$

On a montré que $u$ est linéaire.

- *Noyau.*
  Soit $(x,y,z) \in \mathbf{K}^3$. On a :

$$\begin{array}{rcl} (x,y,z) \in \operatorname{Ker}(u) & \iff & (x+y, y+z, z+x) = (0,0,0) \\ & \iff & \begin{cases} x+y & =0 \\ y+z & =0 \\ z+x & =0 \end{cases} \\ & \iff & x=y=z=0. \end{array}$$

  Il s'ensuit que $\operatorname{Ker}(u) = \{(0,0,0)\}$.
- *Image.*
  Comme $\operatorname{Ker}(u) = \{(0,0,0)\}$, $u$ est un endomorphisme injectif de $\mathbf{K}^3$. Comme $\mathbf{K}^3$ est de dimension finie, $u$ est bijectif, donc surjectif. En particulier, $\operatorname{Im}(u) = \mathbf{K}^3$.

2.
- *Linéarité.* Soient $P_1$ et $P_2$ deux éléments de $\mathbf{K}_2[X]$. Soit $\lambda \in \mathbf{K}$. On a :

$$\begin{array}{rcll} u(P_1+\lambda P_2) & = & (X+1)(P_1+\lambda P_2)' + (P_1+\lambda P_2)(1) & \\ & = & (X+1)\left(P_1'+\lambda P_2'\right) + P_1(1) + \lambda P_2(1) & \text{linéarité de la dérivation} \\ & = & u(P_1) + \lambda u(P_2). & \end{array}$$

  On a montré que $u$ est linéaire.
- *Noyau.*
  Soit $P = aX^2 + bX + c \in K_2[X]$. On a :

$$\begin{array}{rcl} P \in \operatorname{Ker}(u) & \iff & (X+1)(2aX+b) + (a+b+c) = 0 \\ & \iff & 2aX^2 + (2a+b)X + (a+2b+c) \\ & \iff & a=b=c=0. \end{array}$$

  On a montré que $\operatorname{Ker}(u) = \{0\}$.
- *Image.*
  Il est facile de remarquer que $u$ est un endomorphisme. D'après ci-dessus, $u$ est injectif, donc bijectif car $\mathbf{K}_2[X]$ est de dimension finie. En particulier, $u$ est surjectif, donc $\operatorname{Im}(u) = \mathbf{K}_2[X]$.

3.
- *Linéarité.*
  Soient $M_1$ et $M_2$ deux éléments de $\mathscr{M}_2(\mathbf{K})$. Soit $\lambda \in \mathbf{K}$. On a

$$u(M_1+\lambda M_2) = A(M_1+\lambda M_2) = AM_1 + \lambda AM_2 = u(M_1) + \lambda u(M_2).$$

  On a montré que $u$ est linéaire.
- *Noyau.*
  Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbf{K})$. On a :

$$\begin{array}{rcl} M \in \operatorname{Ker}(u) & \iff & AM = 0 \\ & \iff & \begin{pmatrix} a-c & b-d \\ a-c & b-d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ & \iff & \begin{cases} a-c & =0 \\ b-d & =0 \end{cases} \\ & \iff & \begin{cases} a & =c \\ b & =d \end{cases} \\ & \iff & M = \begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix} \\ & \iff & M = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{array}$$

Il s'ensuit que $\mathrm{Ker}\,(u) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)$.

On remarque que $\dim\left(\mathrm{Ker}\,(u)\right) = 2$ car les deux matrices $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires.

- *Image.*
  D'après le théorème du rang, on a

$$\dim\left(\mathrm{Im}\,(u)\right) = \dim\left(\mathscr{M}_2\left(\mathbf{K}\right)\right) - \dim\left(\mathrm{Ker}\,(u)\right) = 4 - 2 = 2.$$

Or, $u\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ et $u\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$. Comme ces deux matrices forment une famille libre de $\mathrm{Im}\,(u)$ car non colinéaires, on en déduit que

$$\mathrm{Im}\,(u) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right).$$

4. - *Linéarité.*
  Soient $P_1$ et $P_2$ deux polynômes de $\mathbf{K}\left[X\right]$. Soit $\lambda \in \mathbf{K}$. On a :

$$\begin{array}{rcl} u\left(P_1 + \lambda P_2\right) & = & \left(P_1 + \lambda P_2\right)\left(X^2\right) \\ & = & P_1\left(X^2\right) + \lambda P_2\left(X^2\right) \\ & = & u\left(P_1\right) + \lambda u\left(P_2\right). \end{array}$$

On a montré que $u$ est linéaire.

- *Noyau.*
  Soit $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{d} a_k X^k \in \mathbf{K}\left[X\right]$. On a :

$$\begin{array}{rcl} P \in \mathrm{Ker}\,(u) & \Longleftrightarrow & \displaystyle\sum_{k=0}^{d} a_k X^{2k} = 0 \\ & \Longleftrightarrow & a_0 = a_1 = \cdots = a_d = 0 \text{ car la famille } \left(1, X^2, \ldots, X^{2d}\right) \text{ est libre} \\ & \Longleftrightarrow & P = 0. \end{array}$$

On a montré que $\mathrm{Ker}\,(u) = \{0\}$.

- *Image.*
  On note $P\left(\mathbf{K}\right)$ l'ensemble des polynômes pairs à coefficients dans $\mathbf{K}$. Il est clair que $\mathrm{Im}\,(u) \subset P\left(\mathbf{K}\right)$. Réciproquement, soit $Q$ un polynôme pair. On écrit $Q = \displaystyle\sum_{k=0}^{d} a_k X^k$. Comme $Q\left(X\right) = Q\left(-X\right)$, on a $a_{2k+1} = 0$ pour $0 \leq 2k+1 \leq d$. Il s'ensuit que $Q = \displaystyle\sum_{0 \leq 2k \leq n} a_{2k} X^{2k} = u\left(P\right)$ avec $P = \displaystyle\sum_{0 \leq k \leq N/2} a_{2k} X^k$.
  On en déduit que $\mathrm{Im}\,(u) = P\left(\mathbf{K}\right)$.

**Exercice 3.**

1. Comme la matrice $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ est de rang 1 et $\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}\left(\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\right)$, on en déduit que $\mathrm{Ker}\,(u) = \mathrm{Vect}\left((1, -1)\right)$.
2. Comme la matrice $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix} - 2\mathrm{I}_2 = \begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$ est de rang 1 et $\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}\left(\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\right)$, on en déduit que $\mathrm{Ker}\left(u - 2\mathrm{id}_{\mathbf{K}^2}\right) = \mathrm{Vect}\left((1, 1)\right)$.

3. Soit $x \in \operatorname{Ker}(u) \cap \operatorname{Ker}(u - 2\mathrm{id}_{\mathbf{K}^2})$. On a $u(x) = 2x = 0$, donc $x = 0$. Il s'ensuit que $\operatorname{Ker}(u) \cap \operatorname{Ker}(u - 2\mathrm{id}_{\mathbf{K}^2}) \subset \{(0,0)\}$. L'inclusion réciproque étant claire, on a $\operatorname{Ker}(u) \cap \operatorname{Ker}(u - 2\mathrm{id}_{\mathbf{K}^2}) = \{(0,0)\}$. Comme $2 = \dim(\operatorname{Ker}(u)) + \dim(\operatorname{Ker}(u - 2\mathrm{id}_{\mathbf{K}^2}))$, on en déduit que $\operatorname{Ker}(u) \oplus \operatorname{Ker}(u - 2\mathrm{id}_{\mathbf{K}^2}) = \mathbf{K}^2$. Soit $(e_1, e_2)$ une base adaptée à la somme directe. Comme $u(e_1) = 0$ et $u(e_2) = 2e_2$, la matrice de $u$ dans la base $(e_1, e_2)$ est $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.
4. En notant $P$ la matrice de passage de la base canonique vers la base $(e_1, e_2)$ (on a donc $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$), on a :
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}.$$

**Exercice 4.**

1. Soit $f : t \longmapsto \dfrac{1}{t^3 + \sqrt{t}}$. $f$ est continue sur $\mathbf{R}_+^*$. On étudie la nature des intégrales $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$.
   - On a $f(t) \underset{t \to 0}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{t}}$. Or l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$ converge (intégrale de Riemann avec $\alpha = \dfrac{1}{2} < 1$). Par comparaison par équivalence des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.
   - On a $f(t) \underset{t \to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^3}$. Or l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^3}\mathrm{d}t$ converge (intégrale de Riemann avec $\alpha = 3 > 1$). Par comparaison par équivalence des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

   Par somme l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.
2. Soit $f : t \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{t(1-t)}}$. $f$ est continue sur $]0,1[$. On étudie la nature des intégrales $\displaystyle\int_0^{1/2} f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_{1/2}^1 f(t)\,\mathrm{d}t$.
   - On a $f(t) \underset{t \to 0}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{t}}$. Or l'intégrale $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$ converge (intégrale de Riemann avec $\alpha = \dfrac{1}{2} < 1$). Par comparaison par équivalence des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{1/2} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.
   - On a $f(t) \underset{t \to 1}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{1-t}}$. Or l'intégrale $\displaystyle\int_{1/2}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t}}\mathrm{d}t$ converge (intégrale de Riemann avec $\alpha = \dfrac{1}{2} < 1$). Par comparaison par équivalence des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_{1/2}^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

   Par somme l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.
3. Soit $\varepsilon \in ]0,1[$. On pose $u : t \longmapsto \ln^2(t)$ et $v : t \longmapsto u$. Les fonctions $u$ et $v$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]\varepsilon, 1[$. La formule d'intégration par parties donne
$$\int_\varepsilon^1 \ln^2(t)\,\mathrm{d}t = \left[t \ln^2(t)\right]_\varepsilon^1 - \int_\varepsilon^1 2\frac{\ln(t)}{t} \times t\mathrm{d}t = \varepsilon \ln^2(\varepsilon) - 2\int_\varepsilon^1 \ln(t)\,\mathrm{d}t.$$
   Par croissance comparée, $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \varepsilon \ln^2(\varepsilon) = 0$. Comme l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)\,\mathrm{d}t$ converge et vaut $-1$, on a $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \displaystyle\int_\varepsilon^1 \ln(t)\,\mathrm{d}t = -1$, il s'ensuit que $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \displaystyle\int_\varepsilon^1 \ln^2(t)\,\mathrm{d}t = 2$.

L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \ln^2(t)\,\mathrm{d}t$ converge et vaut 2.

4. Soit $f : t \longmapsto \ln(\cos(t))$. $f$ est continue sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$. On pose $t = \dfrac{\pi}{2} - h$.

$$\begin{array}{rcl} \ln(\cos(t)) & = & \ln(-\sin(-h)) \\ & = & \ln(\sin(h)) \\ & \underset{h\to 0}{=} & \ln(h + o(h)) \\ & \underset{h\to 0}{=} & \ln(h(1+o(1))) \\ & \underset{h\to 0}{=} & \ln(h) + \ln(h + o(1)) \\ & \underset{h\to 0}{\sim} & \ln(h)\,. \end{array}$$

Or, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(h)\,\mathrm{d}h$ converge. Par comparaison par équivalence des intégrales de fonctions de signe constant, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(\cos(t))\,\mathrm{d}t$ converge.

**Exercice 5.**

1. Soit $n \in \mathbf{N}$. Soit $f : t \longmapsto t^n \mathrm{e}^{-t}$. $f$ est continue sur $\mathbf{R}_+$.
   Par croissance comparée, on a $f(t) \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$. Ainsi, il existe $A > 0$ tel que pour tout $t \geq A$, $t^n\mathrm{e}^{-t} \leq \dfrac{1}{t^2}$. Or, l'intégrale $\displaystyle\int_A^{+\infty} \frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$ converge (intégrale de Riemann avec $\alpha = 2 > 1$). Par comparaison par inégalité des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_A^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.
   Par somme, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.
2. 
   - D'après le cours, $I_0 = 1$.
   - Soit $A \geq 0$. On pose $u : t \longmapsto t$ et $v : t \longmapsto -\mathrm{e}^{-t}$. Les fonctions $u$ et $v$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, A]$. La formule d'intégration par parties donne
   $$\int_0^A t\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = \left[-t\mathrm{e}^{-t}\right]_0^A + \int_0^A \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = -A\mathrm{e}^{-A} - \mathrm{e}^{-A} + 1.$$
   Or, par croissance comparée, $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} \left(-A\mathrm{e}^{-A} - \mathrm{e}^{-A} + 1\right) = 1$, il s'ensuit que l'intégrale $I_1 = 1$.
3. Soient $A \geq 0$ et $n \in \mathbf{N}$. On pose $u : t \longmapsto t^{n+1}$ et $v : t \longmapsto -\mathrm{e}^{-t}$. Les fonctions $u$ et $v$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, A]$. La formule d'intégration par parties donne
   $$\int_0^A t^{n+1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = \left[-t^{n+1}\mathrm{e}^{-t}\right]_0^A + (n+1)\int_0^A t^n\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = -A^{n+1}\mathrm{e}^{-A} + (n+1)\int_0^A t^n\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t.$$
   Or, par croissance comparée, $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} -A^{n+1}\mathrm{e}^{-A} = 0$, en faisant tendre $A$ vers $+\infty$ en utilisant la convergence de $I_n$ et $I_{n+1}$, on a donc : $I_{n+1} = (n+1)\,I_n$.
4. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on pose $\mathscr{P}_n$ ; « $I_n = n!$ ».
   Comme $I_0 = 1$, $\mathscr{P}_0$ est vraie.
   On suppose $\mathscr{P}_n$ est vraie pour un certain entier naturel $n$. On a :
   $$\begin{array}{rcll} I_{n+1} & = & (n+1)\,I_n & \text{question 3} \\ & = & (n+1)\times n! & \text{hypothèse de récurrence} \\ & = & (n+1)!. & \end{array}$$
   On a montré que $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie, ce qui termine la récurrence.

**Exercice 6.**

1. Soient $A$ et $B$ deux polynômes de $\mathbf{K}[X]$ avec $B \neq 0$. Il existe un unique couple $(Q, R) \in \mathbf{K}[X]^2$ avec $\deg(R) < \deg(B)$ tel que $A = BQ + R$.
2. Comme $\deg\left(X^3 + 1\right) = 3$, il est clair que $\varphi$ est à valeurs dans $\mathbf{K}_2[X]$.
   Soit $(P_1, P_2) \in \mathbf{K}_2[X]^2$ et $\lambda \in \mathbf{K}$.
   (a) On fait la division euclidienne de $\left(X^2+1\right)(P_1 + \lambda P_2)$ par $X^3 + 1$ : il existe un polynôme $Q_1 \in \mathbf{K}[X]$ tel que
   $$\left(X^2+1\right)(P_1 + \lambda P_2) = \left(X^3+1\right) Q_1 + \varphi(P_1 + \lambda P_2).$$
   (b) On fait la division euclidienne de $\left(X^2+1\right) P_1$ et $\left(X^2+1\right) P_2$ par $X^3 + 1$ : il existe $Q_2$ et $Q_3$ dans $\mathbf{K}[X]$ tels que
   $$\left(X^2+1\right) P_1 = \left(X^3+1\right) Q_2 + \varphi(P_1)$$
   et
   $$\left(X^2+1\right) P_2 = \left(X^3+1\right) Q_3 + \varphi(P_2).$$
   Il s'ensuit que
   $$\left(X^2+1\right)(P_1 + \lambda P_2) = \left(X^3+1\right)(Q_2 + \lambda Q_3) + \varphi(P_1) + \lambda\varphi(P_2).$$
   Comme $\deg(\varphi(P_1) + \lambda\varphi(P_2)) \leq 2$ et $\deg(\varphi(P_1 + \lambda P_2)) \leq 2$, on en déduit que les polynômes $\varphi(P_1) + \lambda\varphi(P_2)$ et $\varphi(P_1 + \lambda P_2)$ sont les restes de la division euclidienne de $\left(X^2+1\right)(P_1 + \lambda P_2)$ par $X^3 + 1$. Par unicité, on en déduit que
   $$\varphi(P_1 + \lambda P_2) = \varphi(P_1) + \lambda\varphi(P_2).$$
   Cela prouve que $\varphi$ est linéaire, puis $\varphi \in \mathscr{L}(\mathbf{K}_2[X])$.
3. On calcule facilement
   $$\varphi(1) = X^2 + 1, \quad \varphi(X) = X - 1 \quad \text{et} \quad \varphi\left(X^2\right) = X^2 - X.$$
   Il s'ensuit que la matrice de $\varphi$ dans la base canonique de $\mathbf{K}_2[X]$ est $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
4. Soit $P = aX^2 + bX + c \in \mathbf{K}_2[X]$. On a :
   $$\begin{aligned} P \in \operatorname{Ker}(\varphi) \quad & \iff \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ & \iff \quad \begin{cases} c - b & = 0 \\ b - a & = 0 \\ a + c & = 0 \end{cases} \\ & \iff \quad a = b = c = 0 \\ & \iff \quad P = 0. \end{aligned}$$
   Il s'ensuit que $\operatorname{Ker}(\varphi) = \{0\}$.
5. La question 4 assure que $\varphi$ est un endomorphisme injectif. Comme $\mathbf{K}_2[X]$ est de dimension finie, $\varphi$ est un automorphisme de $\mathbf{K}_2[X]$. En particulier, $\varphi$ est surjectif, donc $\operatorname{Im}(\varphi) = \mathbf{K}_2[X]$.

**Exercice 7.**

1. La série $\displaystyle\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ diverge car c'est une série de Riemann avec $\alpha = 1$.

2. Soit $t \in [0,1]$. Comme $-t \neq 1$, on a :

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^k = \sum_{k=0}^{n} (-t)^k = \frac{1-(-t)^{n+1}}{1-(-t)},$$

soit

$$\frac{1}{1+t} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^k + \frac{(-1)^{n+1} t^{n+1}}{1+t}.$$

3. En intégrant l'inégalité établie à la question précédente entre 0 et 1 et en utilisant la linéarité de l'intégrale, on a :

$$\int_0^1 \frac{1}{1+t}\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \int_0^1 t^k \mathrm{d}t + (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t}\mathrm{d}t.$$

En calculant les différentes intégrales, on a

$$\ln(2) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} + (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t}\mathrm{d}t.$$

4. Pour tout $n \in \mathbf{N}$ et pour tout $t \in [0,1]$, on $0 \leq \dfrac{t^{n+1}}{1+t} \leq t^{n+1}$, ainsi

$$0 \leq \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t}\mathrm{d}t \leq \int_0^1 t^{n+1}\mathrm{d}t = \frac{1}{n+2}.$$

Par encadrement, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t}\mathrm{d}t = 0$. On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} = \ln(2)$.

On a montré que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{n+1}$ et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \ln(2)$.

**Exercice 8.**

1. On a :

$$\forall (j,k) \in [\![1,n]\!]^2, \quad L_j(x_k) = \begin{cases} 1 & \text{si } j = k \\ 0 & \text{si } j \neq k \end{cases}.$$

2. On commence par remarquer que pour tout $i \in [\![0,n]\!]$, $\deg(L_i) = n$, donc $L_i \in \mathbf{K}_n[X]$. Soit $(a_0,\ldots,a_n) \in \mathbf{K}^{n+1}$ tel que

$$a_0 L_0 + \cdots + a_n L_n = 0.$$

En évaluant la relation en $x_k$ ($k \in [\![0,n]\!]$), on récupère $a_k = 0$. Il s'ensuit que la famille $(L_0,\ldots,L_n)$ est libre.

Cette famille est libre, contient $n+1$ vecteurs dans un espace vectoriel de dimension $n+1$, elle est une base de $\mathbf{K}_n[X]$.

3. Comme $1 \in \mathbf{K}_n[X]$ et $(L_0,\ldots,L_n)$ est une base de $\mathbf{K}_n[X]$, il existe un unique $(n+1)$-uplet $(a_0,\ldots,a_n) \in \mathbf{K}^{n+1}$ tel que

$$1 = a_0 L_0 + \ldots + a_n L_n.$$

En évaluant cette relation en $x_k$, on obtient $a_k = 1$. Il s'ensuit que les coordonnées du polynôme 1 dans la base $(L_0,\ldots,L_n)$ est $(1,\ldots,1)$.

**Exercice 9.**

1. (a) Soit $x \in \mathbf{R}$. Comme la fonction $t \longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2}$ est continue sur le segment $[0,1]$, on en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2}\mathrm{d}t.$ converge.

(b) Soient $x_1$ et $x_2$ deux réels tels que $x_1 \leq x_2$. Pour tout $t \in [0,1]$, on a alors $\mathrm{e}^{-x_2 t} \leq \mathrm{e}^{-x_1 t}$, puis $\dfrac{\mathrm{e}^{-x_2 t}}{1+t^2} \leq \dfrac{\mathrm{e}^{-x_1 t}}{1+t^2}$. La croissance de l'intégrale donne :

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-x_2 t}}{1+t^2}\mathrm{d}t \leq \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-x_1 t}}{1+t^2}\mathrm{d}t.$$

Il s'ensuit que $f$ est décroissante sur $\mathbf{R}$.

(c)
- *Calcul de la limite de $f$ en $+\infty$*
  Pour établir la limite de $f$ en $+\infty$, on commence par trouver une majoration de $f$. Pour tout $x > 0$, on a :
  $$0 \leq f(x) = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-tx}}{1+t^2}\mathrm{d}t \leq \frac{1}{2}\int_0^1 \mathrm{e}^{-tx}\mathrm{d}t = \frac{1}{2x}\left(1-\mathrm{e}^{-x}\right).$$
  Comme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2x}\left(1-\mathrm{e}^{-x}\right) = 0$, par encadrement,
  $$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.$$

- *Calcul de $f(0)$*
  On a :
  $$\begin{aligned} f(0) &= \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t \\ &= [\operatorname{Arctan}(t)]_0^1 \\ &= \operatorname{Arctan}(1) - \operatorname{Arctan}(0) \\ &= \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

- *Tableau de variations*
  On a le tableau de variation suivant :

| $x$ | $-\infty$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $f$ | | $0$ |

2. (a) On applique l'inégalité de Taylor avec reste intégral à $f : x \longmapsto \mathrm{e}^{-x}$ avec $b = u \in [0,1]$, $a = 0$ et à l'ordre $n = 1$. On a donc :
$$\mathrm{e}^{-u} = 1 - u + \int_0^u (u-t)\,\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t,$$
soit
$$\left|\mathrm{e}^{-u} - 1 + u\right| = \left|\int_0^u (u-t)\,\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t\right| \leq \mathrm{e}\int_0^u (u-t)\,\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{e}u^2}{2}.$$

(b)
- Soient $h \in [-1,1]$ et $t \in [0,1]$. On commence par appliquer l'inégalité précédente à $u = th \in [-1,1]$. On a
  $$\left|\mathrm{e}^{-th} - 1 + th\right| \leq \frac{3t^2h^2}{2}.$$
  On multiplie cette inégalité par $\mathrm{e}^{-xt} \geq 0$, on obtient donc
  $$\left|\mathrm{e}^{-th-xt} - \mathrm{e}^{-xt} + th\mathrm{e}^{-xt}\right| \leq h^2\frac{3h^2}{2}\mathrm{e}^{-xt}.$$
  Cette inégalité donne directement
  $$\left|\mathrm{e}^{-(x+h)t} - \mathrm{e}^{-xt} + ht\mathrm{e}^{-xt}\right| \leq h^2\frac{3t^2}{2}\mathrm{e}^{-xt}.$$

- Commençons par diviser la ligne précédente par $1+t^2>0$. On a
$$\left|\frac{\mathrm{e}^{-(x+h)t}}{1+t^2}-\frac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2}+h\frac{t\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2}\right|\leq\frac{3}{2}h^2\frac{t^2\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2}.$$
Par croissance de l'intégrale, on a :
$$\int_0^1\left|\frac{\mathrm{e}^{-(x+h)t}}{1+t^2}-\frac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2}+h\frac{te^{-xt}}{1+t^2}\right|\mathrm{d}t\leq\frac{3h^2}{2}\int_0^1\frac{t^2\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2}\mathrm{d}t.$$
Comme
$$\left|\int_0^1\frac{\mathrm{e}^{-(x+h)t}}{1+t^2}-\frac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2}+h\frac{t\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2}\mathrm{d}t\right|\leq\int_0^1\left|\frac{\mathrm{e}^{-(x+h)t}}{1+t^2}-\frac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2}+h\frac{t\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2}\right|\mathrm{d}t,$$
il vient que
$$\left|\int_0^1\frac{\mathrm{e}^{-(x+h)t}}{1+t^2}-\frac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2}+h\frac{t\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2}\mathrm{d}t\right|\leq\frac{3h^2}{2}\int_0^1\frac{t^2\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2}dt.$$
Ce qui donne
$$\left|f(x+h)-f(x)+h\int_0^1\frac{t\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2}\mathrm{d}t\right|\leq\frac{3h^2}{2}\int_0^1\frac{t^2\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2}\mathrm{d}t.$$

(c) Soit $h\in[-1,1]$, $h\neq 0$. On commence par diviser la ligne précédente par $|h|>0$ pour avoir
$$\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\int_0^1\frac{t\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2}\mathrm{d}t\right|\leq\frac{3|h|}{2}\int_0^1\frac{t^2\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2}\mathrm{d}t.$$
Comme $x\in\mathbf{R}$ est fixé, on remarque que $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{3|h|}{2}\int_0^1\frac{t^2\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2}\mathrm{d}t=0$. Ainsi, il vient que
$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=-\int_0^1\frac{t\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2}\mathrm{d}t.$$
Cela prouve que $f$ est dérivable pour tout $x\in\mathbf{R}$ et
$$\forall x\in\mathbf{R},\quad f'(x)=-\int_0^1\frac{t\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2}\mathrm{d}t.$$

**Exercice 10.**

1. 
   - Pour tout $n\in\mathbf{N}$, on a $u_{n+1}-u_n=-u_n^2\leq 0$, il s'ensuit que $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est décroissante.
   - On commence par montrer que pour tout $n\in\mathbf{N}$, $u_n\in[0,1]$. On procède par récurrence et on introduit $\mathscr{P}_n$ : « $u_n\in[0,1]$ ».
   Comme $u_0=\dfrac{1}{2}$, $\mathscr{P}_0$ est vraie. On suppose $\mathscr{P}_n$ vraie pour un certain entier naturel $n$.
   On a $u_{n+1}=u_n-u_n^2=u_n(1-u_n)$. Par hypothèse de récurrence, $u_n\in[0,1]$, donc $1-u_n\in[0,1]$, donc $u_n(1-u_n)\in[0,1]$.
   On a montré que $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie, ce qui termine la récurrence.
   La suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est décroissante, minorée : elle converge. On note $\ell$ sa limite. Par continuité de $x\longmapsto x-x^2$, $\ell$ vérifie l'équation $\ell=\ell-\ell^2\iff\ell=0$. Ainsi, $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers 0.
2. Pour tout $n\in\mathbf{N}$, on a $u_n^2=u_n-u_{n+1}$. Comme la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge, la série $\sum\limits_{n\geq 0}(u_n-u_{n+1})$ converge, ainsi la série $\sum\limits_{n\geq 0}u_n^2$ converge et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}u_n^2=u_0=\dfrac{1}{2}$.

3. Soit $N \in \mathbf{N}$. On a :
$$\sum_{n=0}^{N} \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \sum_{n=0}^{N} \left(\ln\left(u_{n+1}\right) - \ln\left(u_n\right)\right) = \ln\left(u_{N+1}\right) - \ln\left(u_0\right).$$
Comme $\lim\limits_{N\to+\infty} u_{N+1} = 0$, par composition, on a $\lim\limits_{N\to+\infty} \ln\left(u_{N+1}\right) = -\infty$, donc $\lim\limits_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = -\infty$.
Il s'ensuit que la série $\sum_{n\geq 0} \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ diverge.
4. Par définition, on a $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - u_n$, donc $\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \ln\left(1-u_n\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -u_n$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.
Or, la série $\sum_{n\geq 0} \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ diverge. Par comparaison par équivalence des séries à termes de signe constant, la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ diverge.

**Exercice 11.**

1. $\boxed{\text{L'équation différentielle } y'(t) = y(t) \text{ et } y(0) = 1 \text{ a pour unique solution sur } [0,1] \text{ la fonction } \exp_{|[0,1]}.}$
2. Dans cet exemple, pour tout $(t,y) \in [0,1] \times \mathbf{R}$, $F(t,y) = y$.
Soit $n \in \mathbf{N}^*$. On a $Y_{n,0} = 1$ et pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$,
$$Y_{n,i+1} = Y_{n,i} + hY_{n,i} = (1+h)\,Y_{n,i}.$$
La suite $\left(Y_{n,i}\right)_{i\in[\![0,n]\!]}$ est géométrique de raison $1+h$, ainsi
$$\boxed{\forall i \in [\![0,n]\!], \quad Y_{n,i} = (1+h)^i\,Y_{n,0} = (1+h)^i.}$$
3. De toute évidence, la suite $\left(Y_{n,i}\right)_{i\in[\![0,n]\!]}$ est croissante, ainsi pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, la fonction $Y_n$ est croissante sur $[y_{n,i}, y_{n,i+1}]$.
Soit $(x_1, x_2) \in [0,1]^2$ tel que $x_1 \leq x_2$.
Soit $(i,j) \in [\![0, n-1]\!]^2$ tel que $x_1 \in [y_{n,i}, y_{n,i+1}]$ et $x_2 \in [y_{n,j}, y_{n,j+1}]$.
Clairement, on a $i \leq j$.
   - Si $i = j$, comme $Y_n$ est croissante sur $[y_{n,i}, y_{n,i+1}]$ est croissante, on a $Y_n(x_1) \leq Y_n(x_2)$.
   - Si $i < j$, alors $x_1 \leq y_{n,i+1} \leq y_{n,j} \leq x_2$.
   En utilisant respectivement la croissance de $Y_n$ sur $[y_{n,i}, y_{n,i+1}]$ et $[y_{n,j}, y_{n,j+1}]$, par définition de $Y_n$, on a
   $$Y_n(x_1) \leq Y_n(y_{n,i+1}) = Y_{n,i+1} \quad \text{et} \quad Y_{n,j} = Y_n(y_{n,j}) \leq Y_n(y).$$
   Par croissance de $\left(Y_{n,i}\right)_{i\in[\![0,n]\!]}$, on a $Y_{n,i+1} \leq Y_{n,j}$, ainsi
   $$Y_n(x_1) \leq Y_n(x_2).$$

   Dans tous les cas, $Y_n(x_1) \leq Y_n(x_2)$.
   $\boxed{\text{On a montré que } Y_n \text{ est croissante sur } [0,1].}$
4. (a) Soit $i \in \mathbf{N}$. On a
   $$t \in \left[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}\right[ \iff i \leq tn < i+1.$$
   Cette dernière inégalité est satisfaite si, et seulement si, $i = \lfloor tn \rfloor$.
   Comme $t \in [0,1[$, on a $tn \in [0,n[$, donc $i \in [\![0, n-1]\!]$.
   $$\boxed{\text{Si l'on pose } i_n = \lfloor tn \rfloor, \text{ on a } t \in \left[\frac{i_n}{n}, \frac{i_n+1}{n}\right[ = [t_{n,i_n}, t_{n,i_n+1}[.}$$

(b)
- Pour $t = 0$, le résultat est clair.
- On suppose $t \in ]0,1[$. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on a

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\lfloor tn \rfloor} = \exp\left(\lfloor tn \rfloor \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right).$$

  Or, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$tn - 1 \leq \lfloor tn \rfloor < tn \iff 1 - \frac{1}{tn} \leq \frac{\lfloor tn \rfloor}{tn} < 1,$$

  on en déduit que $\lfloor tn \rfloor \underset{n\to+\infty}{\sim} tn$, d'où

$$\lfloor tn \rfloor \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} t.$$

  Par continuité de la fonction exp en $t$, on en déduit que

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\lfloor tn \rfloor} = \lim_{n\to+\infty} \exp\left(\lfloor tn \rfloor \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) = \mathrm{e}^t.}$$

(c) D'après la question 4 (a), $t \in [t_{n,i_n}, t_{n,i_n+1}[$ avec $i_n = \lfloor tn \rfloor$.
Or, d'après la question 3, $Y_n$ est croissante sur $[0,1]$, ainsi

$$Y_n\left(y_{n,i_n}\right) \leq Y_n\left(t\right) \leq Y_n\left(y_{n,i_{n+1}}\right).$$

On a aussi

$$Y_n\left(y_{n,i_n}\right) = (1+h)^{i_n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{\lfloor tn \rfloor}$$

et

$$Y_n\left(y_{n,i_n+1}\right) = (1+h)^{i_n+1} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{\lfloor tn \rfloor+1}.$$

D'après la question 4 (b), on a donc

$$\lim_{n\to+\infty} Y\left(y_{n,i_n}\right) = \lim_{n\to+\infty} Y\left(y_{n,i_n+1}\right) = \mathrm{e}^t.$$

Par encadrement, $\lim\limits_{n\to+\infty} Y_n\left(t\right) = \mathrm{e}^t$.
On a aussi

$$Y_n\left(1\right) = Y_{n,n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

La même méthode utilisée que celle à la question 4 (b) montre que

$$\lim_{n\to+\infty} Y_n\left(1\right) = \mathrm{e}.$$

On a montré que pour tout $t \in [0,1]$,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} Y_n\left(t\right) = y_{\exp}\left(t\right).}$$

**Exercice 12.**

1. (a) Soit $p \in \mathbf{N}$. Soit $x \in \mathrm{Ker}\left(u^p\right)$. On a

$$u^{p+1}\left(x\right) = u\left(u^p\left(x\right)\right) = u\left(0\right) = 0.$$

Ainsi, $x \in \mathrm{Ker}\left(u^{p+1}\right)$, ce qui prouve que $\mathrm{Ker}\left(u^p\right) \subset \mathrm{Ker}\left(u^{p+1}\right)$.

(b) Soit $d_p = \dim(\mathrm{Ker}(u^p))$. D'après la question précédente, on a $d_{p+1} \geq d_p$. La suite $(d_p)_{p\in\mathbf{N}}$ est une suite croissante d'entiers naturels majorée par $n$ : elle est stationnaire. Il existe donc $p_0 \in \mathbf{N}$ tel que $d_{p_0} = d_{p_0+1}$.
Or, $\mathrm{Ker}(u^{p_0}) \subset \mathrm{Ker}\left(u^{p_0+1}\right)$ et ces deux sous-espaces vectoriels ont la même dimension, donc $\mathrm{Ker}(u^{p_0}) = \mathrm{Ker}\left(u^{p_0+1}\right)$.

(c) On procède par récurrence. Pour tout $p \geq p_0$, on pose $\mathscr{P}_p$ : « $\mathrm{Ker}(u^p) = \mathrm{Ker}(u^{p_0})$ ».
$\mathscr{P}_{p_0}$ est vraie.
On suppose $\mathscr{P}_p$ est vraie pour un certain entier $p \geq p_0$. D'après la question 1 (a), on a $\mathrm{Ker}(u^{p_0}) \subset \mathrm{Ker}\left(u^{p+1}\right)$.
Soit $x \in \mathrm{Ker}\left(u^{p+1}\right)$. On a $0 = u^{p+1}(x) = u^p(u(x))$, donc $u(x) \in \mathrm{Ker}(u^p)$. Par hypothèse de récurrence, on a $u(x) \in \mathrm{Ker}(u^{p_0})$, soit $x \in \mathrm{Ker}\left(u^{p_0+1}\right)$. Or, $\mathrm{Ker}\left(u^{p_0+1}\right) = \mathrm{Ker}(u^{p_0})$, ce qui prouve que $x \in \mathrm{Ker}(u^{p_0})$.
On a montré que $\mathrm{Ker}\left(u^{p+1}\right) = \mathrm{Ker}(u^{p_0})$, ainsi $\mathscr{P}_{p+1}$ est vraie, ce qui termine la récurrence.

2. (a) Soit $p \in \mathbf{N}$. Soit $y \in \mathrm{Im}\left(u^{p+1}\right)$ : il existe $x \in E$ tel que $y = u^{p+1}(x)$. On a :
$$y = u^{p+1}(x) = u^p(u(x)) \in \mathrm{Im}(u^p),$$
ce qui prouve que $\mathrm{Im}\left(u^{p+1}\right) \subset \mathrm{Im}(u^p)$.

(b) Le théorème du rang assure que
$$\dim(E) = \dim(\mathrm{Ker}(u^{p_0})) + \dim(\mathrm{Im}(u^{p_0})) = \dim\left(\mathrm{Ker}\left(u^{p_0+1}\right)\right) + \dim\left(\mathrm{Im}\left(u^{p_0+1}\right)\right).$$
Comme $\dim(\mathrm{Ker}(u^{p_0})) = \dim\left(\mathrm{Ker}\left(u^{p_0+1}\right)\right)$, on en déduit que $\dim(\mathrm{Im}(u^{p_0})) = \dim\left(\mathrm{Im}\left(u^{p_0+1}\right)\right)$.
Or, d'après la question 2 (a), on a $\mathrm{Im}\left(u^{p_0+1}\right) \subset \mathrm{Im}(u^{p_0})$, il s'ensuit que $\mathrm{Im}\left(u^{p_0+1}\right) = \mathrm{Im}(u^{p_0})$.

(c) On procède par récurrence. Pour tout $p \geq p_0$, on pose $\mathscr{P}_p$ : « $\mathrm{Im}(u^p) = \mathrm{Im}(u^{p_0})$ ».
$\mathscr{P}_{p_0}$ est vraie.
On suppose $\mathscr{P}_p$ est vraie pour un certain entier $p \geq p_0$. D'après la question 1 (a), on a $\mathrm{Im}\left(u^{p+1}\right) \subset \mathrm{Im}(u^{p_0})$.
Soit $y \in \mathrm{Im}(u^{p_0})$. D'après la question 2 (b), $y \in \mathrm{Im}\left(u^{p_0+1}\right)$ : il existe $x \in E$ tel que $y = u^{p_0+1}(x) = u(u^{p_0}(x))$.
Or, $u^{p_0}(x) \in \mathrm{Im}(u^{p_0})$. L'hypothèse de récurrence assure que $u^{p_0}(x) \in \mathrm{Im}(u^p)$, ainsi il existe $z \in E$ tel que $u^{p_0}(x) = u^p(z)$. On a donc :
$$y = u(u^{p_0}(x)) = u(u^p(z)) = u^{p+1}(z),$$
ce qui prouve que $y \in \mathrm{Im}\left(u^{p+1}\right)$.
On a montré que $\mathrm{Im}\left(u^{p+1}\right) = \mathrm{Im}(u^{p_0})$, ainsi $\mathscr{P}_{p+1}$ est vraie, ce qui termine la récurrence.

3. Soit $p \geq p_0$. D'après le théorème du rang, on a :
$$\dim(E) = \dim(\mathrm{Ker}(u^p)) + \dim(\mathrm{Im}(u^p)).$$
Soit $x \in \mathrm{Ker}(u^p) \cap \mathrm{Im}(u^p)$ : on a $u^p(x) = 0$ et il existe $z \in E$ tel que $x = u^z(p) = 0$. En particulier, on a $u^{2p}(z) = 0$, soit $z \in \mathrm{Ker}\left(u^{2p}\right)$.
Or, $2p \geq p \geq p_0$ et la question 1 (c) assurant que $\mathrm{Ker}(u^p) = \mathrm{Ker}\left(u^{2p}\right)$, on récupère donc $z \in \mathrm{Ker}(u^p) = 0$, soit $x = u^p(z) = 0$.
On a montré que $\mathrm{Ker}(u^p) \cap \mathrm{Im}(u^p) \subset \{0\}$. L'inclusion réciproque étant claire, on a montré que $\mathrm{Ker}(u^p) \cap \mathrm{Im}(u^p) = \{0\}$, puis $E = \mathrm{Ker}(u^p) \oplus \mathrm{Im}(u^p)$.

**Exercice 13.**

1. Soit $B = (a_{i,j})_{\substack{i\in I\\ j\in J}}$ un mineur d'ordre $k$ inversible avec $I$ et $J$ deux sous-ensembles de $[\![1, n]\!]$ de cardinal $k$.
Soient $C_{j_1}(A), \ldots, C_{j_k}(A)$ les colonnes de $A$ dont sont issues celles du mineur. Soit $(\alpha_{j_1}, \ldots, \alpha_{j_k}) \in \mathbf{K}^k$ tel que
$$a_{j_1}C_{j_1}(A) + \cdots + \alpha_{j_k}C_{j_k}(A) = 0.$$

En extrayant les lignes numérotées sur $I$, et en notant $C_{j_1}(B), \ldots, C_{j_k}(B)$ les colonnes de $B$, on obtient

$$a_{j_1} C_{j_1}(B) + \cdots + \alpha_{j_k} C_{j_k}(B) = 0.$$

Comme $B$ est inversible, la famille constituée de ses colonnes est libre, donc $\alpha_{j_1} = \cdots = \alpha_{j_k} = 0$.
On en déduit que $\dim(\mathrm{Vect}(C_1(A), \ldots, C_n(A))) \geq k$, ainsi

$$\boxed{\mathrm{rg}(A) \geq k.}$$

2. On montre les deux implications.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Comme $\mathrm{rg}(A) = k$, il existe $k$ colonnes, disons $(C_{i_1}, \ldots, C_{i_k})$ telles que

$$\mathrm{Vect}(C_1(A), \ldots, C_m(A)) = \mathrm{Vect}(C_{j_1}(A), \ldots, C_{j_k}(A)).$$

Comme la matrice $\widetilde{A} := (C_{j_1}(A) | \cdots | C_{j_k}(A))$ est de rang $k$, il existe $k$ lignes $L_{i_1}\left(\widetilde{A}\right), \ldots, L_{i_k}\left(\widetilde{A}\right)$ de la matrice $\widetilde{A}$ telle que

$$\dim\left(\mathrm{Vect}\left(L_{i_1}\left(\widetilde{A}\right), \ldots, L_{i_k}\left(\widetilde{A}\right)\right)\right) = k.$$

De toute évidence, la matrice $\begin{pmatrix} L_{i_1}\left(\widetilde{A}\right) \\ \vdots \\ L_{i_k}\left(\widetilde{A}\right) \end{pmatrix}$ est un mineur de $A$ d'ordre $k$ car son rang vaut $k$.

De plus, tous les mineurs d'ordre supérieurs à $k+1$ ne sont pas inversibles car, sinon en utilisant la question 1, le rang de $A$ serait au moins égal à $k+1$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ D'après la question 1, on a $\mathrm{rg}(A) \geq k$.
Si $\mathrm{rg}(A) \geq k+1$, d'après la première implication prouvée ci-dessus, il existerait un mineur d'ordre $\ell \geq k+1$ inversible, ce qui n'est pas le cas.

**Exercice 14.**

1. (a) C'est du cours que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-at} \mathrm{d}t$ converge pour $a > 0$ et vaut $\dfrac{1}{a}$.

   (b) Soit $x \in \mathbf{R}$ et soit $g : t \longmapsto \mathrm{e}^{-2t}\sqrt{1 + x^2\mathrm{e}^{2t}}$. $g$ est continue sur $[0, +\infty[$.

   - Si $x = 0$, alors pour tout $t \in [0, +\infty[$, $g(t) = \mathrm{e}^{-2t}$. D'après la question précédente, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ converge.
   - Si $x \neq 0$, on remarque déjà que $\sqrt{1 + x^2\mathrm{e}^{2t}} \underset{t \to +\infty}{\sim} |x|\,\mathrm{e}^t$, ainsi $g(t) \underset{t \to +\infty}{\sim} |x|\,\mathrm{e}^{-t}$. Or, d'après la question précédente, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$ converge, donc par comparaison par équivalence des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

   On a montré que pour tout $x \in \mathbf{R}$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

   (c) $f$ est définie sur $\mathbf{R}$, donc l'ensemble de définition de $f$ est centré en 0. Soit $x \in \mathbf{R}$, on a :

$$\begin{aligned} f(-x) &= \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-2t}\sqrt{1 + (-x)^2\,\mathrm{e}^{2t}}\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-2t}\sqrt{1 + x^2\mathrm{e}^{2t}}\mathrm{d}t \\ &= f(x). \end{aligned}$$

   On a montré que $f$ est paire.

2. (a) Soient $x > 0$ et $t \geq 0$.

   - Par croissance de la fonction racine sur $\mathbf{R}_+$, on a $\sqrt{1+x^2\mathrm{e}^{2t}} \geq \sqrt{x^2\mathrm{e}^{2t}} = \left|x\mathrm{e}^t\right| = x\mathrm{e}^t$ car $x\mathrm{e}^t \geq 0$.
   - On commence par écrire :

$$\begin{aligned} 1+x^2\mathrm{e}^{2t} &= \left(x\mathrm{e}^t\right)^2 + 2x\mathrm{e}^t \times \frac{\mathrm{e}^{-t}}{2x} \\ &\leq \left(x\mathrm{e}^t\right)^2 + 2x\mathrm{e}^t \times \frac{\mathrm{e}^{-t}}{2x} + \left(\frac{\mathrm{e}^{-t}}{2x}\right)^2 \\ &\leq \left(\frac{\mathrm{e}^{-t}}{2x} + x\mathrm{e}^t\right)^2. \end{aligned}$$

   Par croissance de la fonction racine sur $\mathbf{R}_+$, on a :

$$\sqrt{1+x^2\mathrm{e}^{2t}} \leq \sqrt{\left(\frac{\mathrm{e}^{-t}}{2x} + x\mathrm{e}^t\right)^2} = \left|\frac{\mathrm{e}^{-t}}{2x} + x\mathrm{e}^t\right| = \frac{\mathrm{e}^{-t}}{2x} + x\mathrm{e}^t,$$

   car $\dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{2x} + x\mathrm{e}^t \geq 0$.

   (b) On multiplie l'inégalité obtenue à la question précédente par $\mathrm{e}^{-2t} \geq 0$, ainsi pour tout $t \in [0, +\infty[$ et pour tout $x > 0$, on a :

$$x\mathrm{e}^{-t} \leq \mathrm{e}^{-2t}\sqrt{1+x^2\mathrm{e}^{2t}} \leq x\mathrm{e}^{-t} + \frac{\mathrm{e}^{-3t}}{2x}.$$

   Par croissance de l'intégrale, il vient que :

$$x\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t \leq f(x) \leq x\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t + \frac{1}{2x}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-3t}\mathrm{d}t.$$

   En utilisant la question 1 (a), on a bien montré :

$$x \leq f(x) \leq x + \frac{1}{6x}.$$

   (c) En divisant l'inégalité obtenue à la question précédente par $x > 0$, on a :

$$1 \leq \frac{f(x)}{x} \leq 1 + \frac{1}{6x^2}.$$

   Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{6x^2}\right) = 1$, par encadrement, on a montré que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x} = 1$, soit :

$$f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} x.$$

3. (a) Soit $A > 0$. On fait le changement de variable $u = x\mathrm{e}^t$ (de classe $\mathscr{C}^1$, strictement croissant et bijectif de $[0, A]$ sur $\left[x, x\mathrm{e}^A\right]$) dans l'intégrale $\displaystyle\int_0^A \mathrm{e}^{-2t}\sqrt{1+x^2\mathrm{e}^{2t}}\mathrm{d}t$. La formule du changement de variable donne :

$$\int_0^A \mathrm{e}^{-2t}\sqrt{1+x^2\mathrm{e}^{2t}}\mathrm{d}t = \int_x^{x\mathrm{e}^A}\left(\frac{x}{u}\right)^2\sqrt{1+u^2}\left(\frac{1}{u}\mathrm{d}u\right) = x^2\int_x^{x\mathrm{e}^A}\frac{\sqrt{1+u^2}}{u^3}\mathrm{d}u.$$

   Lorsque l'on fait tendre $A$ vers $+\infty$, on a :

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-2t}\sqrt{1+x^2\mathrm{e}^{2t}}\mathrm{d}t = x^2\int_x^{+\infty}\frac{\sqrt{1+u^2}}{u^3}\mathrm{d}u.$$

(b) On pose $g : x \longmapsto \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\sqrt{1+u^2}}{u^3}\mathrm{d}u$ de sorte que pour tout $x > 0$, $f(x) = x^2 g(x)$.
On remarque que $g$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et pour tout $x > 0$ :

$$g'(x) = -\frac{\sqrt{1+x^2}}{x^3}.$$

$f$ est donc de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et pour tout $x > 0$, on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x\int_x^{+\infty} \frac{\sqrt{1+u^2}}{u^3}\mathrm{d}u + x^2 \times \left(-\frac{\sqrt{1+x^2}}{x^3}\right) \\ &= \frac{2f(x)}{x} - \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} \\ &= \frac{2f(x) - \sqrt{1+x^2}}{x}. \end{aligned}$$

(c)
- On reprend l'expression de $f(x)$ de la question 3 (a). Soit $A \geq x$. On fait une intégration par parties dans l'intégrale $\displaystyle\int_x^A \frac{1}{u^3} \times \sqrt{1+u^2}\mathrm{d}u$. On pose $f : u \longmapsto \sqrt{1+u^2}$ et $g : u \longmapsto \dfrac{1}{-2u^2}$.
Les fonctions $f$ et $g$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[x, A]$ et $f' : u \longmapsto \dfrac{u}{\sqrt{1+u^2}}$ et $g' : u \longmapsto \dfrac{1}{u^3}$. On a :

$$\begin{aligned} \int_x^A \frac{1}{u^3} \times \sqrt{1+u^2}\mathrm{d}u &= \left[\sqrt{1+u^2} \times \left(\frac{-1}{2u^2}\right)\right]_x^A + \frac{1}{2}\int_x^A \frac{u}{u^2\sqrt{1+u^2}}\mathrm{d}u \\ &= -\sqrt{1+A^2} \times \frac{1}{2A^2} + \frac{\sqrt{1+x^2}}{2x^2} + \frac{1}{2}\int_x^A \frac{1}{u\sqrt{1+u^2}}\mathrm{d}u. \end{aligned}$$

Comme $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} \sqrt{1+A^2} \times \frac{1}{2A^2} = 0$ et comme l'intégrale $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{1}{u^3} \times \sqrt{1+u^2}\mathrm{d}u$ converge, en passant à la limite quand $A$ tend vers $+\infty$, on a :

$$\int_x^{+\infty} \frac{\sqrt{1+u^2}}{u^3}\mathrm{d}u = \frac{\sqrt{1+x^2}}{2x^2} + \frac{1}{2}\int_x^{+\infty} \frac{1}{u\sqrt{1+u^2}}\mathrm{d}u.$$

Or, $f(x) = x^2\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\sqrt{1+u^2}}{u^3}\mathrm{d}u$, ainsi, on a bien montré que :

$$2f(x) = \sqrt{1+x^2} + x^2\int_x^{+\infty} \frac{1}{u\sqrt{1+u^2}}\mathrm{d}u.$$

- D'après la question 3 (b), on a pour tout $x > 0$ :

$$f'(x) = \frac{2f(x) - \sqrt{1+x^2}}{x}.$$

On remplace $2f(x)$ par l'expression établie ci-dessus, ainsi :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\sqrt{1+x^2} + x^2\int_x^{+\infty} \frac{1}{u\sqrt{1+u^2}}\mathrm{d}u - \sqrt{1+x^2}}{x} \\ &= x\int_x^{+\infty} \frac{1}{u\sqrt{1+u^2}}\mathrm{d}u. \end{aligned}$$

On en déduit que $f'(x) > 0$ pour tout $x > 0$, donc $f$ est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

4. (a) Soit $A \geq x$. On fait une intégration par parties dans l'intégrale $\displaystyle\int_x^A \frac{1}{u\sqrt{1+u^2}}\mathrm{d}u$. On pose $f$ : $u \longmapsto \ln(u)$ et $g : u \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+u^2}}$. Les fonctions $f$ et $g$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[x, A]$ et $g' : u \longmapsto -\dfrac{1}{(1+u^2)^{3/2}}$, on a :

$$\begin{aligned}\int_x^A \frac{1}{u\sqrt{1+u^2}}\mathrm{d}u &= \left[\frac{\ln(u)}{\sqrt{1+u^2}}\right]_x^A + \int_x^A \frac{u\ln(u)}{(1+u^2)^{3/2}}\mathrm{d}u \\ &= \frac{\ln(A)}{\sqrt{1+A^2}} - \frac{\ln(x)}{\sqrt{1+x^2}} + \int_x^A \frac{u\ln(u)}{(1+u^2)^{3/2}}\mathrm{d}u.\end{aligned}$$

Comme $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} \frac{\ln(A)}{\sqrt{1+A^2}} = 0$ (croissance comparée), $\displaystyle\lim_{A\to+\infty}\int_x^A \frac{1}{u\sqrt{1+u^2}}\mathrm{d}u = \int_x^{+\infty}\frac{1}{u\sqrt{1+u^2}}\mathrm{d}u$, on en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{u\ln(u)}{(1+u^2)^{3/2}}\mathrm{d}u$ converge et $\displaystyle\lim_{A\to+\infty}\int_x^A \frac{u\ln(u)}{(1+u^2)^{3/2}}\mathrm{d}u = \int_x^{+\infty}\frac{u\ln(u)}{(1+u^2)^{3/2}}\mathrm{d}u.$
On a bien montré que :

$$\int_x^{+\infty}\frac{1}{u\sqrt{1+u^2}}\mathrm{d}u = -\frac{\ln(x)}{\sqrt{1+x^2}} + \int_x^{+\infty}\frac{u\ln(u)}{(1+u^2)^{3/2}}\mathrm{d}u.$$

(b) • On reprend l'expression de $f'(x)$ établie à la question 3 (c) : pour tout $x > 0$ :

$$f'(x) = \frac{\displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{1}{u\sqrt{1+u^2}}\mathrm{d}u}{x}.$$

Ce qui donne, en utilisant l'égalité établie à la question 4 (a), pour tout $x > 0$

$$f'(x) = -x\ln(x) \times \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + x\int_x^{+\infty}\frac{u\ln(u)}{(1+u^2)^{3/2}}\mathrm{d}u,$$

puis

$$\frac{f'(x)}{-x\ln(x)} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{1}{\ln(x)}\int_x^{+\infty}\frac{u\ln(u)}{(1+u^2)^{3/2}}\mathrm{d}u.$$

Montrons que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{u\ln(u)}{(1+u^2)^{3/2}}\mathrm{d}u$ converge, auquel cas on a bien

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{\ln(x)}\int_x^{+\infty}\frac{u\ln(u)}{(1+u^2)^{3/2}}\mathrm{d}u = 0$$

puis

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{1}{\ln(x)}\int_x^{+\infty}\frac{u\ln(u)}{(1+u^2)^{3/2}}du = 1$$

soit finalement

$$f'(x) \underset{x\to 0}{\sim} -x\ln(x).$$

Convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{u\ln(u)}{(1+u^2)^{3/2}}\mathrm{d}u$.

On pose $g : u \longmapsto \dfrac{u\ln(u)}{(1+u^2)^{3/2}}$. $g$ est continue sur $]0, +\infty[$ et $g$ se prolonge par continuité en 0 car $\displaystyle\lim_{u\to 0}\frac{u\ln(u)}{(1+u^2)^{3/2}} = 0$ (croissance comparée).

Comme $\dfrac{u\ln(u)}{(1+u^2)^{3/2}} \underset{u\to+\infty}{\sim} \dfrac{u\ln(u)}{u^3} \underset{u\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ln(u)}{u^2}$, on a $\lim\limits_{u\to+\infty} u^{3/2}g(u) = 0$, soit $g(u) \underset{u\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{u^{3/2}}\right)$, ainsi il existe $A \geq 1$ tel que pour tout $u \geq A$, $0 \leq g(u) \leq \dfrac{1}{u^{3/2}}$.

Or l'intégrale $\displaystyle\int_A^{+\infty} \frac{1}{u^{3/2}}\mathrm{d}u$ converge, par comparaison par inégalité des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ converge, puis par somme l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

- On utilise le résultat de la question 3 (b) : pour tout $x > 0$ :

$$f'(x) = \frac{2f(x) - \sqrt{1+x^2}}{x}$$

soit

$$f(x) - \frac{1}{2} = \frac{xf'(x)}{2} + \frac{1}{2}\left(\sqrt{1+x^2} - 1\right).$$

D'après le point précédent, $\dfrac{xf'(x)}{2} \underset{x\to0}{=} -\dfrac{x^2\ln(x)}{2} + o\left(x^2\ln(x)\right)$. Un développement limité de $\sqrt{1+x^2}$ en 0 à l'ordre 2 donne :

$$\sqrt{1+x^2} - 1 \underset{x\to0}{=} \frac{1}{2}x^2 + o\left(x^2\right).$$

Finalement

$$f(x) - \frac{1}{2} \underset{x\to0}{=} -\frac{x^2\ln(x)}{2} + \frac{1}{2}x^2 + o\left(x^2\ln(x)\right) + o\left(x^2\right).$$

Comme $x^2 \underset{x\to0}{=} o\left(x^2\ln(x)\right)$, on bien montré que

$$f(x) \underset{x\to0}{\sim} -\frac{x^2\ln(x)}{2}.$$

(c) Déjà à la question 3 (b), on a montré que $f$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$.
Comme $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{x^2\ln(x)}{2} = 0$ (croissance comparée), par le résultat de la question précédente, on a $\lim\limits_{x\to0} f(x) = \dfrac{1}{2}$. On peut prolongé $f$ par continuité en posant $f(0) = \dfrac{1}{2}$.
De plus, toujours par la question précédente, on a $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} \underset{x\to0}{\sim} -\dfrac{x\ln(x)}{2}$. Comme $\lim\limits_{x\to0} x\ln(x) = 0$ (croissance comparée), on a $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = 0$.
On a montré que $f$ est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.
Il nous reste à montrer que $f'$ est continue en 0. L'équivalent $f'(x) \underset{x\to0}{\sim} -x\ln(x)$ assure que $\lim\limits_{x\to0} f'(x) = 0 = f'(0)$.

**Exercice 15.**

1. Cette question a été traitée en cours.
2. (a) Soit $f : t \longmapsto \dfrac{\sin((2n+1)t)}{\sin(t)}$. $f$ est continue sur $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.
   On a : $f(t) \underset{t\to0}{\sim} \dfrac{(2n+1)t}{t} = 2n+1$. Il s'ensuit que $f$ est prolongeable par continuité en 0. On pose $f(0) = 2n+1$.
   L'intégrale $\displaystyle\int_0^{\pi/2} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge car c'est l'intégrale d'une fonction continue sur un segment.

(b) Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a :

$$\begin{aligned} J_{n+1} - J_n &= \int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2n+3)t) - \sin((2n+1)t)}{\sin(t)} \\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{2\sin(t)\cos((2n+2)t)}{\sin(t)} \mathrm{d}t \\ &= 2\int_0^{\pi/2} \cos(2(n+1)t)\,\mathrm{d}t \\ &= 0. \end{aligned}$$

(c) Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a :

$$J_n = J_0 = \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}.$$

3. (a) Il est clair que $\varphi$ est continue sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$. Il suffit de montrer la continuité en 0. Pour tout $t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a :

$$\varphi(t) = \frac{1}{t} - \frac{1}{\sin(t)} = \frac{\sin(t) - t}{t\sin(t)} = \frac{t - \frac{t^3}{6} + o(t^3) - t}{t(t + o(t))} = \frac{-\frac{t^3}{6} + o(t^3)}{t^2 + o(t^2)} \underset{t\to 0}{\sim} -\frac{1}{6}t.$$

Il s'ensuit que $\lim\limits_{t\to 0} \varphi(t) = 0 = \varphi(0)$, ainsi $\varphi$ est continue en 0.

Ainsi, $\varphi$ est continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

(b) $\varphi$ est dérivable sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ comme la différence de deux fonctions dérivables avec le dénominateur qui ne s'annule pas et

$$\forall t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right], \quad \varphi'(t) = -\frac{1}{t^2} + \frac{\cos(t)}{\sin^2(t)} = \frac{t^2\cos(t) - \sin^2(t)}{t^2\sin^2(t)}.$$

(c) D'une part, $t^2\sin^2(t) \underset{t\to 0}{\sim} t^4$.

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned} t^2\cos(t) - \sin^2(t) &\underset{t\to 0}{=} t^2\left(1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2)\right) - \left(t - \frac{t^3}{6} + o(t^4)\right)^2 \\ &\underset{t\to 0}{=} t^2 - \frac{t^4}{2} + o(t^4) - \left(t^2 - \frac{t^4}{3} + o(t^4)\right) \\ &= -\frac{t^4}{6} + o(t^4). \end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$\varphi'(t) \underset{t\to 0}{\sim} \frac{-\frac{1}{6}t^4}{t^4} = -\frac{1}{6},$$

donc $\lim\limits_{t\to 0} \varphi'(t) = -\frac{1}{6}$.

(d) Il est clair que $\varphi$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Le développement limité $\varphi(t) \underset{t\to 0}{=} -\frac{1}{6}t + (t)$ obtenu à la question 3 (a) assure que $\varphi$ est dérivable en 0 et $\varphi'(0) = -\frac{1}{6}$ (on rappelle qu'une fonction est dérivable en $a$ si, et seulement si elle admet un développement limité à l'ordre 1 en $a$).

D'après la question 3 (c), $\lim\limits_{t\to 0} \varphi'(t) = -\frac{1}{6} = \varphi'(0)$, donc $\varphi'$ est continue en 0.

Il s'ensuit que $\varphi$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

(e) Comme $\varphi$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\varphi'$ est continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, donc est bornée sur cet intervalle. En particulier, $|\varphi'|$ est bornée sur cet intervalle : soit $M$ un majorant de $|\varphi'|$ sur cet intervalle. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a :

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{2n+1}\int_0^{\pi/2}\varphi'(t)\cos((2n+1)t)\,\mathrm{d}t\right| &\leq \frac{1}{2n+1}\int_0^{\pi/2}\left|\varphi'(t)\cos((2n+1)t)\right|\mathrm{d}t\\ &\leq \frac{1}{2n+1}\int_0^{\pi/2}M\mathrm{d}t\\ &\leq \frac{M\pi}{4n+2}.\end{aligned}$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{M\pi}{4n+2} = 0$, par encadrement, $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{2n+1}\int_0^{\pi/2}\varphi'(t)\cos((2n+1)t)\,\mathrm{d}t = 0$.

(f) La fonction $\varphi$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, la formule d'intégration par parties donne

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2}\varphi(t)\sin((2n+1)t)\,\mathrm{d}t &= \left[-\frac{\varphi(t)\cos((2n+1)t)}{2n+1}\right]_0^{\pi/2} + \frac{1}{2n+1}\int_0^{\pi/2}\varphi'(t)\cos((2n+1)t)\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{\varphi(0)}{2n+1} + \frac{1}{2n+1}\int_0^{\pi/2}\varphi'(t)\cos((2n+1)t)\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

car $\cos\left((2n+1)\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

D'après la question 3 (e), $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{2n+1}\int_0^{\pi/2}\varphi'(t)\cos((2n+1)t)\,\mathrm{d}t = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\varphi(0)}{2n+1} = 0$, il s'ensuit que

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\pi/2}\varphi(t)\sin((2n+1)t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

4. (a) Soit $n \in \mathbf{N}$. Soit $g : t \longmapsto \frac{\sin((2n+1)t)}{t}$.

$g$ est continue sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$. De plus, $g(t) \underset{t\to 0}{\sim} \frac{(2n+1)t}{t} = 2n+1$, donc $g$ est prolongeable par continuité en 0.

Il s'ensuit que l'intégrale $\int_0^{\pi/2}\frac{\sin((2n+1)t)}{t}\mathrm{d}t$ converge.

(b) On fait le changement de variable affine $u = (2n+1)t$ dans l'intégrale $K_n$. La formule du changement de variable donne

$$K_n = \int_0^{(2n+1)\pi/2}\frac{\sin(u)}{u}\mathrm{d}u.$$

Comme l'intégrale $\int_0^{+\infty}\frac{\sin(u)}{u}\mathrm{d}u$ converge, on en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty}K_n = I.$$

(c) Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a

$$\begin{aligned}K_n - J_n &= \int_0^{\pi/2}\frac{\sin((2n+1)t)}{t}\mathrm{d}t - \int_0^{\pi/2}\frac{\sin((2n+1)t)}{\sin(t)}\mathrm{d}t\\ &= \int_0^{\pi/2}\sin((2n+1)t)\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{\sin(t)}\right)\mathrm{d}t\\ &= \int_0^{\pi/2}\sin((2n+1)t)\,\varphi(t)\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

D'après la question 3 (f), $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^{\pi/2}\sin((2n+1)t)\,\varphi(t)\,\mathrm{d}t = 0$, il s'ensuit que $\lim\limits_{n\to+\infty}(K_n - J_n) = 0$.

(d) D'après la question 2 (b), $J_n = \dfrac{\pi}{2}$ pour tout $n \in \mathbf{N}$, ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} K_n = \dfrac{\pi}{2}$. Or, la question 4 (b) assure que $\lim\limits_{n\to+\infty} K_n = I$. On en déduit que

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}.$$

**Exercice 16.**

1. On a :

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) \\ &= \ln\left(\frac{(n+1)!\mathrm{e}^{n+1}}{(n+1)^{n+1}\sqrt{n+1}} \times \frac{n^n\sqrt{n}}{n!\mathrm{e}^n}\right) \\ &= -\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+1. \end{aligned}$$

2. On fait le développement limité de $\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$ à l'ordre 3 lorsque $n$ tend vers $+\infty$, ainsi

$$v_{n+1} - v_n = 1 - \left(n+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) = -\frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

ainsi $v_{n+1} - v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{12n^2}$. Or, la série $\sum\limits_{n\geq 1} -\dfrac{1}{12n^2}$ converge, par comparaison par équivalence des séries à termes négatifs, la série $\sum\limits_{n\geq 1} (v_{n+1} - v_n)$ converge.

3. Comme la série $\sum\limits_{n\geq 1} (v_{n+1} - v_n)$ converge, la suite $(v_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge. Par continuité de la fonction exp sur $\mathbf{R}$, on en déduit que $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge vers une limite strictement positive $\ell$.

4. La question 3 assure que

$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \sqrt{n}\ell.$$

En utilisant cet équivalent dans l'équivalent admis, on a

$$\frac{\left(\dfrac{2n}{\mathrm{e}}\right)^{2n}\sqrt{2n}\ell}{\left(\left(\dfrac{n}{\mathrm{e}}\right)^n\sqrt{n}\ell 2^n\right)^2} \times \frac{\pi}{2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{4n}},$$

soit, après simplifications,

$$\ell \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi}.$$

Ainsi,

$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \sqrt{2\pi n}.$$

**Exercice 17.**

1. (a) Soit $P \in \mathbf{R}[X]$.

- *Existence.*
Il est clair que $P = \left(P - \displaystyle\int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t\right) + \displaystyle\int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t$ et que le polynôme $P - \displaystyle\int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t \in H$, il existe bien un couple $(Q, \lambda) \in H \times \mathbf{R}$ (avec $Q = P - \displaystyle\int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t$ et $\lambda = \displaystyle\int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t$) tel que $P = Q + \lambda$.

- *Unicité.*
  Supposons qu'il existe deux couples $(Q_1, \lambda)$ et $(Q_2, \lambda_2)$ de $H \times \mathbf{R}$ tel que $P = Q_1 + \lambda_1 = Q_2 + \lambda_2$. Comme $\int_0^1 Q_1(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 Q_2(t)\,\mathrm{d}t = 0$, en intégrant entre 0 et 1 l'égalité $P = Q_1 + \lambda_1 = Q_2 + \lambda_2$, on en déduit que
  $$\int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t = \lambda_1 = \lambda_2.$$
  Il s'ensuit que $Q_1 = Q_2$, d'où l'unicité.

(b) Soit $P \in \mathbf{R}[X]$ : on écrit $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$. Soient $R = \sum_{k=0}^{d} \frac{a_k}{k+1} X^{k+1}$ et $Q = R - \int_0^1 R(t)\,\mathrm{d}t$.
D'après ce qui précède, $R \in H$ et par construction $D(R) = D(Q) = P$, donc $D$ est surjective.

(c) On a déjà montré que $D$ est surjective, il suffit de montrer que $D$ est injective.
Soit $P \in H$. On a :
$$\begin{aligned} D \in \operatorname{Ker}(D) &\iff D(P) = 0 \\ &\iff P' = 0 \\ &\iff P = 0 \text{ car } \int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t = 0. \end{aligned}$$
On en déduit que $\operatorname{Ker}(D) = \{0\}$, donc $D$ est injective, puis c'est un isomorphisme de $H$.

2. (a) Il est clair que $Q$ est une fonction polynomiale. On a :
$$\int_0^1 Q(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \left(\int_0^x P(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^1 (t-1)P(t)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(\int_0^x P(t)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x + \int_0^1 (t-1)P(t)\,\mathrm{d}t.$$
On fait une intégration par parties dans la première intégrale. On pose $u : x \longmapsto \int_0^x P(t)\,\mathrm{d}t$ et $v : x \longmapsto (x-1)$. Les fonctions $u$ et $v$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$. La formule d'intégration par parties donne
$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(\int_0^x P(t)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x &= \left[(x-1)\int_0^x P(t)\,\mathrm{d}t\right]_0^1 - \int_0^1 P(x)\,\mathrm{d}x \\ &= -\int_0^1 P(x)\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$
Il s'ensuit que
$$\int_0^1 Q(t)\,\mathrm{d}t = -\int_0^1 P(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 P(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$
Ainsi, $Q \in H$.

(b) Pour $P \in \mathbf{R}[X]$ et $Q \in H$, on a :
$$\varphi(P) = Q \iff P = \varphi^{-1}(Q) = D(Q).$$
Or, on a montré à la question 2 (a) que $Q \in H$ et $P \in H$ par la question 1 (c) et il est clair que $D(Q) = P$, ainsi $\varphi(P) = Q$.

3. (a)
- On a $B_1 = \varphi(B_0)$, on a $D(B_1) = (D \circ \varphi)(B_0) = B_0 = 1$. Il s'ensuit que $B_1' = 1$, donc $B_1 = X + a$ avec $a \in \mathbf{R}$.
  Or, $B_1 = \varphi(B_0) \in H$, donc $\int_0^1 B_1(t)\,\mathrm{d}t = 0$, soit $a = -\frac{1}{2}$.
  On a : $B_1 = X - \frac{1}{2}$.

- On a $B_2 = \varphi(B_1)$, on a $D(B_2) = (D \circ \varphi)(B_1) = B_1 = X - \dfrac{1}{2}$. Il s'ensuit que $B_1' = X - \dfrac{1}{2}$, donc $B_2 = \dfrac{1}{2}X^2 - \dfrac{1}{2}X + a$ avec $a \in \mathbf{R}$.
  Or, $B_2 = \varphi(B_1) \in H$, donc $\displaystyle\int_0^1 B_2(t)\,\mathrm{d}t = 0$, soit $a = -\dfrac{1}{12}$.
  On a : $B_2 = \dfrac{1}{2}X^2 - \dfrac{1}{2}X - \dfrac{1}{12}$.

(b) Soit $n \geq 2$. Comme $B_n = \varphi(B_{n-1})$, on a $D(B_n) = (D \circ \varphi)(B_{n-1}) = B_{n-1}$.
Or, $B_{n-1} = \varphi(B_{n-2})$ $(n \geq 2)$, donc $B_{n-1} \in H$, puis $D(B_n) \in H$. Ainsi

$$0 = \int_0^1 B_n'(t)\,\mathrm{d}t = [B_n(t)]_0^1 = B_n(1) - B_n(0).$$

4. (a) On a :

$$C_{n+1}' = (-1)^{n+2} B_{n+1}'(1-X) = (-1)^n B_{n+1}'(1-X).$$

Or, $B_{n+1} = \varphi(B_n)$, donc $D(B_{n+1}) = (D \circ \varphi)(B_n)$, soit $B_{n+1}' = B_n$. Il s'ensuit que

$$C_{n+1}' = (-1)^n B_n(1-X) = C_n.$$

(b) On a :

$$\int_0^1 C_{n+1}(t)\,\mathrm{d}t = (-1)^{n+1} \int_0^1 B_{n+1}(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

car $B_{n+1} \in H$. Ainsi, $C_{n+1} \in H$.
Le résultat de la question 4 (a) se réécrit en : $D(C_{n+1}) = C_n$, puis $(\varphi \circ D)(C_{n+1}) = \varphi(C_n)$. Or, $C_{n+1} \in H$, la question 1 (c) assure que $(\varphi \circ D)(C_{n+1}) = C_{n+1}$, ce qui prouve que $C_{n+1} = \varphi(C_n)$.

(c) Pour $N \in \mathbf{N}$, on pose $\mathscr{P}_n$ : « $C_n = B_n$ ».
On a $C_0 = B_0 = 1$, donc $\mathscr{P}_0$ est vraie.
On suppose $\mathscr{P}_n$ vraie pour un certain entier naturel $n$. Par hypothèse de récurrence, on a $B_n = C_n$. Il s'ensuit que $\varphi(B_n) = \varphi(C_n)$.
Par définition de la suite $(B_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et par la question 4 (b), on a $B_{n+1} = C_{n+1}$, ce qui montre que $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie et termine la récurrence.
Ainsi, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $B_n = C_n = (-1) B_n(1-X)$.

(d) En évaluant la relation précédente en 0 pour $n$ impair, on a : $B_n(0) = -B_n(1)$. Or, d'après la question 3 (b), on a $B_n(0) = B_n(1)$.
On en déduit que $B_n(0) = B_n(1) = 0$.

**Exercice 18.**

1. Soit, pour $n \in \mathbf{N}^*$,

$$\mathscr{P}_n : \text{« } \forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K}), \quad \left(\forall j \in [\![1,n]\!],\ \sum_{i=1}^{n} |a_{i,j}| \leq 1\right) \Longrightarrow |\det(A)| \leq 1 \text{ ».}$$

$\mathscr{P}_1$ est clairement vraie. On suppose $\mathscr{P}_n$ vraie pour un certain naturel non nul $n$.

Soit $A \in \mathscr{M}_{n+1}(\mathbf{K})$ telle que pour tout $j \in [\![1, n+1]\!]$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} |a_{i,j}| \leq 1$.

En développant le déterminant par rapport à la première colonne, on a

$$|\det(A)| = \left|\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{i,1} \det(A_{i,1})\right| \leq \sum_{i=1}^{n} |a_{i,1}|\,|\det(A_{i,1})|.$$

Or, chaque matrice $A_{i,1}$ $(i \in [\![1,n]\!])$ vérifie l'hypothèse de récurrence. Ainsi,

$$|\det(A)| \leq \sum_{i=1}^{n} |a_{i,1}| \leq 1,$$

ceci termine la récurrence.

2. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ dont on note $(C_1, \ldots, C_n)$ les colonnes. On pose

$$\forall j \in [\![1, n]\!], \quad \alpha_j = \sum_{i=1}^{n} |a_{i,j}|.$$

Si l'un des colonnes est nulle, alors $\det(A) = 0$ et l'inégalité est claire. On suppose donc que toutes les colonnes de $A$ sont non nulles, ainsi $\alpha_j > 0$ pour tout $j \in [\![1, n]\!]$. Soit $M = \left(\alpha_1^{-1} C_1 | \cdots | \alpha_n^{-1} C_n\right)$.
Par construction, la somme de la valeur absolue des éléments de chaque colonne de $M$ est inférieure ou égale à 1, donc d'après la récurrence ci-dessus, on a $|\det(M)| \leq 1$.
En utilisant la linéarité du déterminant par rapport à chacune de ses variables, on a

$$\det(M) = \alpha_1^{-1} \cdots \alpha_n^{-1} \det(A).$$

On en déduit finalement que

$$|\det(A)| = \prod_{j=1}^{n} \left( \sum_{i=1}^{n} |a_{i,j}| \right) |\det(M)| \leq \prod_{j=1}^{n} \left( \sum_{i=1}^{n} |a_{i,j}| \right).$$

# Problème 1

1. Soit $n > k$. On pose $\alpha_n = [q_0, q_1, \ldots, q_n]$ et $\widetilde{\alpha}_n = [q_k, q_{k+1}, \ldots, q_n]$.
Pour tout $n > k$, on a

$$\alpha_n = [q_0, \ldots, q_{k-1}, \widetilde{\alpha}_n] = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \ddots + \cfrac{1}{q_{k-1} + \cfrac{1}{\widetilde{\alpha}_n}}}}}.$$

Cette égalité se réécrit en : pour tout $n > k$,

$$\widetilde{\alpha}_n = -q_{k-1} + \cfrac{1}{-q_{k-2} + \cfrac{1}{-q_{k-3} + \cfrac{1}{+ \ddots + \cfrac{1}{-q_1 + \cfrac{1}{\alpha_n - q_0}}}}}.$$

On notera que aucun des dénominateurs ci-dessus ne s'annule car $[q_0, q_1, \ldots]$ est une fraction continue infinie.

$\boxed{\text{Comme la suite } (\alpha_n)_{n\in\mathbf{N}} \text{ converge, la suite } (\widetilde{\alpha}_n)_{n\in\mathbf{N}} \text{ converge. Sa limite } \widetilde{\alpha} \text{ vérifie } \alpha = [q_0, q_1, \ldots, q_{k-1}, \widetilde{\alpha}].}$

2. (a) Pour $n = 1$, pour tout $\alpha \geq 1$, on a :

$$\boxed{[q_0, q_1, \alpha] = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{\alpha}} = \frac{q_0 q_1 \alpha + \alpha + q_0}{q_1 \alpha + 1} = \frac{\alpha a_1 + a_0}{\alpha b_1 + b_0}.}$$

(b) On suppose que tout réel $\widetilde{\alpha} \geq 1$,

$$[q_0, q_1, \ldots, q_n, \widetilde{\alpha}] = \frac{\widetilde{\alpha} a_n + a_{n-1}}{\widetilde{\alpha} b_n + b_{n-1}}.$$

Soit $\alpha \geq 1$. L'hypothèse à récurrence appliquée à $q_{n+1} + \dfrac{1}{\alpha} \geq 1$ donne

$$\begin{aligned}
[q_0, q_1, \ldots, q_{n+1}, \alpha] &= \left[q_0, q_1, \ldots, q_n, q_{n+1} + \frac{1}{\alpha}\right] \\
&= \frac{\left(q_{n+1} + \frac{1}{\alpha}\right) a_n + a_{n-1}}{\left(q_{n+1} + \frac{1}{\alpha}\right) \beta_n + \beta_{n-1}} \\
&= \frac{\alpha q_{n+1} a_n + \alpha a_{n-1} + a_n}{\alpha q_{n+1} \beta_n + \alpha a_{n-1} + a_n} \\
&= \boxed{\frac{\alpha a_{n+1} + a_n}{\alpha \beta_{n+1} + \beta_n}.}
\end{aligned}$$

La proposition $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.
Par le principe de raisonnement par récurrence, on a montré que

$$\boxed{\forall n \in \mathbf{N}^*,\ \forall \alpha \geq 1, \quad [q_0, q_1, \ldots, q_n, \alpha] = \frac{\alpha a_n + a_{n-1}}{\alpha b_n + b_{n-1}}.}$$

3. On procède encore par récurrence. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on définit

$$\mathscr{P}_n : \text{« } [q_0, \ldots, q_n] = \frac{a_n}{b_n} \text{ ».}$$

Pour $n = 1$, on a bien $\dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{q_0 q_1 + 1}{q_1} = q_0 + \dfrac{1}{q_1}$. Ainsi, $\mathscr{P}_1$ est vraie.
On suppose $\mathscr{P}_n$ vraie pour un certain entier naturel $n \in \mathbf{N}^*$.
En utilisant l'égalité obtenue à la question 2 avec $\alpha = q_{n+1} \geq 1$, on a

$$\boxed{[q_0, q_1, \ldots, q_n, q_{n+1}] = \frac{q_{n+1} a_n + a_{n-1}}{q_{n+1} b_n + b_{n-1}} = \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}.}$$

$\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.
Par le principe de raisonnement par récurrence, on a

$$\boxed{\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad [q_0, q_1, \ldots, q_n] = \frac{a_n}{b_n}.}$$

4. On traite séparemment les deux égalités.

- *Première égalité*
  Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on a

$$\begin{aligned} a_n b_{n+1} - a_{n+1} b_n &= a_n \left(b_n q_{n+1} + b_{n-1}\right) \\ &\quad - b_n \left(a_n q_{n+1} + a_{n-1}\right) \\ &= -\left(a_{n-1} b_n - a_n b_{n-1}\right) \end{aligned}$$

  La suite $\left(a_n b_{n+1} - a_{n+1} b_n\right)_{n \in \mathbf{N}}$ est géométrique de raison $-1$.
  Or, $a_0 b_1 - a_1 b_0 = -1$, on obtient donc

$$\boxed{\forall n \in \mathbf{N}, \quad a_n b_{n+1} - a_{n+1} b_n = (-1)^{n+1}.}$$

- *Seconde égalité*
  Soit $n \in \mathbf{N}$. Pour obtenir la seconde égalité, il suffit de diviser l'inégalité établie ci-dessus par $b_n b_{n+1} \neq 0$ pour obtenir

$$\frac{a_n b_{n+1} - a_{n+1} b_n}{b_n b_{n+1}} = \frac{(-1)^{n+1}}{b_n b_{n+1}} \iff \boxed{\frac{a_n}{b_n} - \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} = \frac{(-1)^{n+1}}{b_n b_{n+1}}.}$$

5. Soit $n \in \mathbf{N}$. De l'égalité $a_n b_{n+1} - a_{n+1} b_n = (-1)^{n+1}$, on tire

$$a_n (-1)^{n+1} b_{n+1} + b_n (-1)^{n+2} a_{n+1} = 1.$$

   De plus, une récurrence immédiate montre que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $a_n$ et $b_n$ sont des entiers relatifs.
   $\boxed{\text{Par le théorème de Bezout, } a_n \text{ et } b_n \text{ sont premiers entre eux.}}$
6. Par définition, pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a

$$b_{n+2} - b_{n+1} = (q_{n+2} - 1) b_{n+1} + b_n.$$

   Comme pour tout $n \in \mathbf{N}$, $q_{n+2} \in \mathbf{N}^*$ et $b_n \geq 1$, on a

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad b_{n+2} - b_{n+1} \geq 1.$$

   $\boxed{\text{On en déduit que la suite } (b_n)_{n \geq 2} \text{ est strictement croissante.}}$
   Une récurrence immédiate montre que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $b_n \geq n$.
   $\boxed{\text{Le théorème de comparaison assure que } \lim\limits_{n \to +\infty} b_n = +\infty.}$
7. D'après une égalité établie à la question 4, pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a :

$$\begin{aligned} a_n b_{n+2} - a_{n+2} b_n &= a_n \left(b_{n+1} q_{n+2} + b_n\right) - b_n \left(a_{n+1} q_{n+2} + a_n\right) \\ &= q_{n+2} \left(a_n b_{n+1} - a_{n+1} b_n\right) \\ &= (-1)^{n+1} q_{n+2}. \end{aligned}$$

   En divisant l'égalité établie ci-dessus par $b_n b_{n+2} \neq 0$, on a :

$$\frac{a_n}{b_n} - \frac{a_{n+2}}{b_{n+2}} = \frac{(-1)^{n+1} q_{n+2}}{b_n b_{n+2}}.$$

   En particulier, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$\frac{a_{2n}}{b_{2n}} - \frac{a_{2n+2}}{b_{2n+2}} = -\frac{q_{2n+2}}{b_{2n} b_{2n+2}} \quad \text{et} \quad \frac{a_{2n+1}}{b_{2n+1}} - \frac{a_{2n+3}}{b_{2n+3}} = \frac{q_{2n+3}}{b_{2n+1} b_{2n+3}}.$$

   Ainsi, la suite $\left(\dfrac{a_{2n}}{b_{2n}}\right)_{n \in \mathbf{N}}$ est croissante et la suite $\left(\dfrac{a_{2n+1}}{b_{2n+1}}\right)_{n \in \mathbf{N}}$ est décroissante.

De plus, en utilisant une égalité établie à la question 4, on a

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{a_{2n}}{b_{2n}}-\frac{a_{2n+1}}{b_{2n=1}}\right)=0$$

car $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{(-1)^{2n+1}}{b_{2n}b_{2n+1}}=0$ car $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} b_n=+\infty$ (question 6).

$\boxed{\text{On a montré que les suites } \left(\frac{a_{2n}}{b_{2n}}\right)_{n\in\mathbf{N}} \text{ et } \left(\frac{a_{2n+1}}{b_{2n+1}}\right)_{n\in\mathbf{N}} \text{ sont adjacentes.}}$

8. D'après la question 3, pour tout $n\in\mathbf{N}$, on a :

$$[q_0,q_1,\dots,q_n]=\frac{a_n}{b_n}.$$

Or, les suites $\left(\frac{a_{2n}}{b_{2n}}\right)_{n\in\mathbf{N}}$ et $\left(\frac{a_{2n+1}}{b_{2n+1}}\right)_{n\in\mathbf{N}}$ sont adjacentes, donc convergent vers une même limite $\ell$.
Il s'ensuit que la suite $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers $\ell$.

$\boxed{\text{On a montré que la fraction continue } [q_0,q_1,\dots] \text{ converge.}}$

9. Si $\alpha\notin\mathbf{Z}$, on a $\alpha\neq\lfloor\alpha\rfloor$. On pose $\boxed{q_0=\lfloor\alpha\rfloor.}$

Comme $0<\alpha-q_0<1$, on a $\dfrac{1}{\alpha-q_0}>1$. On pose $\boxed{\alpha_1=\dfrac{1}{\alpha-q_0}.}$

10. (a) C'est le même raisonnement que celui de la question 9 : comme $\alpha_1\notin\mathbf{Z}$, on a $\lfloor\alpha_1\rfloor\neq\alpha_1$.

On pose $\boxed{q_1=\lfloor\alpha_1\rfloor.}$ On a $0<\alpha_1-q_1<1$, ainsi si l'on $\boxed{\alpha_2=\dfrac{1}{\alpha_1-q_1}>1,}$ on a

$$\alpha_2>1 \quad\text{et}\quad \alpha_1=q_1+\frac{1}{\alpha_2}.$$

(b) En utilisant les égalités établies aux questions 9 et 10 (a), on a :

$$\boxed{\alpha=q_0+\cfrac{1}{q_1+\cfrac{1}{\alpha_2}}=[q_0,q_1,\alpha_2]\,.}$$

11. Par commodité, on pose $\alpha_0=\alpha$.
On procède par récurrence. Pour tout $n\in\mathbf{N}^*$, on introduit la proposition $\mathscr{P}_n$ : « si $\alpha_n\notin\mathbf{Z}$, il existe $\alpha_{n+1}>1$ tel que $\alpha_n=q_n+\dfrac{1}{\alpha_{n+1}}$ où $q_n=\lfloor\alpha_n\rfloor$ et $\alpha=[q_0,q_1,\dots,q_n,\alpha_{n+1}]$ ».
$\mathscr{P}_1$ est vraie d'après la question 10 (a).
Supposons $\mathscr{P}_n$ vraie pour un certain entier naturel $n$ non nul.
Si l'on pose $q_n=\lfloor\alpha_n\rfloor$, on a $q_n<\alpha_n<q_n+1$ et $0<\alpha_n-q_n<1$.
Il s'ensuit que $\alpha_n=q_n+(\alpha_n-q_n)=q_n+\dfrac{1}{\alpha_{n+1}}$ où l'on a posé

$$\alpha_{n+1}=\frac{1}{\alpha_n-q_n}>1.$$

On a aussi

$$\alpha=[q_0,q_1,\dots,q_n,\alpha_{n+1}]\,.$$

On a montré que $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.

$\boxed{\text{Par le principe de raisonnement par récurrence, } \mathscr{P}_n \text{ est vraie pour tout entier naturel non nul } n.}$

12. On prouve les deux implications.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Soit $x \in \mathbb{Q}$ : on écrit $x = \dfrac{a}{b}$ avec $a \in \mathbf{Z}$ et $b \in \mathbf{N}^*$. On écrit l'algorithme d'Euclide pour calculer $a \wedge b$ (le PGCD de $a$ et $b$) :

$$\begin{array}{rcl} a & = & bq_0 + r_0 \\ b & = & r_0 q_1 + r_1 \\ & \vdots & \\ r_{k-1} & = & r_k q_{k+1}. \end{array}$$

Il s'ensuit que

$$\begin{array}{rcl} x & = & \dfrac{a}{b} \\ & = & q_0 + \dfrac{1}{\dfrac{b}{r_0}} \\ & = & q_0 + \dfrac{1}{q_1 + \dfrac{1}{\dfrac{r_0}{r_1}}} \\ \vdots & & \\ & = & [q_0, q_1, \ldots, q_k, q_{k+1}] . \end{array}$$

$\boxed{\Longleftarrow}$ On a $[q_0, \ldots, q_n] \in \mathbb{Q}$ car les $q_i \in \mathbf{Z}^*$, ainsi $\alpha \in \mathbb{Q}$.

$\boxed{\text{On a montré qu'un réel est rationnel si, et seulement si, son développement en fraction continue est fini.}}$

13. Par commodité, on pose $\alpha_0 = \alpha$.
On procède par récurrence et pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on pose la proposition

$$\mathscr{P}_n : \text{« il existe un irrationnel } \alpha_n > 1 \text{ tel que } \alpha_{n-1} = \lfloor \alpha_{n-1} \rfloor + \frac{1}{\alpha_n} \text{ ».}$$

Comme $\alpha \notin \mathbb{Q}$, on a $\alpha \neq \lfloor \alpha \rfloor$. Or,

$$\alpha = \lfloor \alpha \rfloor + (\alpha - \lfloor \alpha \rfloor) = \lfloor \alpha \rfloor + \frac{1}{\alpha_1}$$

où $\alpha_1 = \dfrac{1}{\alpha - \lfloor \alpha \rfloor} > 1$ car $0 < \alpha - \lfloor \alpha \rfloor < 1$.
Il est clair que $\alpha_1 \notin \mathbb{Q}$ car $\alpha \notin \mathbb{Q}$, donc $\mathscr{P}_1$ est vraie.
Supposons $\mathscr{P}_n$ vraie pour un certain entier naturel $n$ non nul.
Comme $\alpha_n \notin \mathbb{Q}$, on a $\alpha_n \neq \lfloor \alpha_n \rfloor$. Or,

$$\alpha_n = \lfloor \alpha_n \rfloor + (\alpha_n - \lfloor \alpha_n \rfloor) = \lfloor \alpha_n \rfloor + \frac{1}{\alpha_{n+1}}$$

où $\alpha_{n+1} = \dfrac{1}{\alpha_n - \lfloor \alpha_n \rfloor} > 1$ car $0 < \alpha_n - \lfloor \alpha_n \rfloor < 1$.
On note aussi que $\alpha_{n+1}$ est irrationnel : en effet s'il était rationnel, alors $\alpha_n$ le serait, ce qui est exclu grâce à l'hypothèse de récurrence.
On a montré que $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.

$\boxed{\text{Par le principe de raisonnement par récurrence, il existe une suite d'irrationnels } (\alpha_n)_{n\in\mathbf{N}^*} \text{ vérifiant les conditions demandées.}}$

14. La question 11 assure que

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad \alpha = [q_0, q_1, \ldots, q_n, \alpha_{n+1}] .$$

Or, par la question 2 (b), on a

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad [q_0, q_1, \ldots, q_n, \alpha_{n+1}] = \frac{\alpha_{n+1} a_n + a_{n-1}}{\alpha_{n+1} b_n + b_{n-1}}.$$

En utilisant une égalité établie à la question 4, pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a :

$$\begin{aligned} \alpha - \frac{a_n}{b_n} &= \frac{\alpha_{n+1} a_n + a_{n-1}}{\alpha_{n+1} b_n + b_{n-1}} - \frac{a_n}{b_n} \\ &= \frac{a_{n-1} b_n - a_n b_{n-1}}{b_n \left(\alpha_{n+1} b_n + b_{n-1}\right)} \\ &= \frac{(-1)^n}{b_n \left(\alpha_{n+1} b_n + b_{n-1}\right)}. \end{aligned}$$

De cette relation, on en déduit que

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad \frac{a_{2n}}{b_{2n}} < \alpha < \frac{a_{2n+1}}{b_{2n+1}}.$$

Or, d'après la question 8, la suite $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n \in \mathbf{N}}$ converge : elle converge donc vers $\alpha$.

$\boxed{\text{On a montré que la suite } \left([q_0, q_1, \ldots, q_n]\right)_{n \in \mathbf{N}} \text{ converge vers } \alpha.}$

15. À la question 14, on a établi en particulier que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\alpha$ est compris entre $\frac{a_n}{b_n}$ et $\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}$, ainsi

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad \left|\alpha - \frac{a_n}{b_n}\right| < \left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}\right|,$$

l'inégalité étant stricte car $\alpha$ est irrationnel.
Or, en utilisant une égalité établie à la question 4, on récupère

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad \left|\alpha - \frac{a_n}{b_n}\right| < \left|\frac{a_n b_{n+1} - b_n a_{n+1}}{b_n b_{n+1}}\right| = \left|\frac{(-1)^{n+1}}{b_n b_{n+1}}\right| = \frac{1}{b_n b_{n+1}}.$$

Comme la suite $(b_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est croissante, on en déduit que

$$\boxed{\forall n \in \mathbf{N}, \quad \left|\alpha - \frac{a_n}{b_n}\right| < \frac{1}{b_n^2}.}$$

16. On procède par récurrence et pour tout $n \in \mathbf{N}$, on pose

$$\mathscr{P}_n : \text{« } q_n = q'_n \quad \text{et} \quad [q_{n+1}, q_{n+2}, \ldots] = \left[q'_{n+1}, q'_{n+2}, \ldots\right] \text{ ».}$$

D'après la question 13, il existe deux nombres irrationnels $\beta$ et $\beta'$ strictement supérieurs à 1 tels que

$$\alpha = q_0 + \frac{1}{\beta} \quad \text{et} \quad \alpha = q_0 + \frac{1}{\beta'}.$$

On en déduit

$$\left|q_0 - q'_0\right| < \left|\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\beta'}\right| < 1$$

car $\beta$ et $\beta'$ sont strictement supérieurs à 1.
Comme $q_0$ et $q'_0$ sont des entiers, on a $q_0 = q'_0$, ainsi $\mathscr{P}_0$ est vraie. De plus, d'après la question 1,

$$[q_0, q_1, q_2, \ldots] = [q_0, [q_1, q_2, \ldots]]$$

et

$$[q'_0, q'_1, q'_2, \ldots] = [q'_0, [q'_1, q'_2, \ldots]]$$

et en utilisant le fait que $q_0 = q'_0$, on en déduit que

$$[q_1, q_2, \dots] = [q'_1, q'_2, \dots] .$$

Soit $n \in \mathbf{N}$. On suppose $\mathscr{P}_n$ vraie. D'après l'hypothèse de récurrence, on a

$$[q_{n+1}, q_{n+2}, \dots] = [q'_{n+1}, q'_{n+2}, \dots] ,$$

ainsi, il existe deux nombres irrationnels $\beta$ et $\beta'$ strictement supérieurs à 1 tels que

$$\alpha = q_{n+1} + \frac{1}{\beta} \quad \text{et} \quad \alpha = q'_{n+1} + \frac{1}{\beta'}.$$

Le même raisonnement fait lors de l'initialisation montre que

$$q_{n+1} = q'_{n+1} \quad \text{et} \quad [q_{n+2}, q_{n+3}, \dots] = [q'_{n+2}, q'_{n+3}, \dots] .$$

$\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie. Par le principe de raisonnement par récurrence, en particulier, on a

$$\boxed{\forall n \in \mathbf{N}, \quad q_n = q'_n.}$$

17. On garde les notations de la question 13. Comme $q_0 = \lfloor \sqrt{2} \rfloor = 1$, on a

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{\alpha_1} \quad \text{avec} \quad \alpha_1 = \sqrt{2} + 1.$$

Or, $q_1 = \lfloor \alpha_1 \rfloor = 2$, donc on peut écrire

$$\alpha_1 = 2 + \frac{1}{\alpha_2} \quad \text{avec} \quad \alpha_2 = \sqrt{2} + 1.$$

Ainsi, $q_2 = 2$.
Une récurrence immédiate montre que

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad \alpha_n = 2 \quad \text{et} \quad q_n = 2.$$

Ainsi,

$$\boxed{\sqrt{2} = [1, 2, 2, \dots] .}$$

18. On peut écrire :

```
from math import *
def fractioncontinue(alpha,n):
    l=[floor(alpha)]
    a=alpha-floor(alpha)
    for k in range(n):
        if a==floor(a):
            break
        else:
            a=1/(float(a-floor(a)))
            l.append(floor(a))
    return l
```

Le programme permet de conjecturer que

$$\sqrt{3} = [1, 1, 2, 1, 2, 1, 2, \dots]$$

et

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} = [1, 1, 1, \dots] .$$

Dans les deux cas, on remarque que le développement est périodique à partir d'un certain rang.

# Problème 2

1. Comme pour tout $n \in \mathbf{N}$, $a \leq u_n \leq b$, on a $\ell \in [a, b]$.
   La continuité de $f$ en $\ell \in [a, b]$ assure que $\lim\limits_{n \to +\infty} f(u_n) = f(\ell)$.

   $\boxed{\text{Comme } \lim\limits_{n \to +\infty} u_{n+1} = \ell, \text{ par unicité de la limite, on a } \ell = f(\ell).}$

2. On prouve les deux implications.

   $\boxed{\Longrightarrow}$ Comme $f$ est dérivable en $\ell$ et $|f'(\ell)| > 1$, par continuité de $\ell$, il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in [\ell - \alpha, \ell + \alpha] \cap [a, b]$, $|f'(x)| > 1$.
   Soit $k = \min\limits_{x \in [\ell - \alpha, \ell + \alpha] \cap [a,b]} |f'(x)|$. Ce minimum existe en vertu du théorème des bornes atteintes de Weierstrass et est strictement supérieur à 1.
   Comme la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge vers $\ell$, il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $u_n \in [\ell - \alpha, \ell + \alpha] \cap [a, b]$.
   En appliquant l'inégalité des accroissements finis, on obtient : pour tout $n \geq N$, $|f(u_n) - f(\ell)| \geq k\,|u_n - \ell|$, soit
   $$|u_{n+1} - \ell| \geq k\,|u_n - \ell|\,.$$
   Soit $n \geq N$, il est facile de montrer par récurrence que pour tout $p \in \mathbf{N}$, $|u_{n+p+1} - \ell| \geq k^p\,|u_n - \ell|$.
   Comme $\lim\limits_{p \to +\infty} k^p = +\infty$, on en déduit que l'on doit avoir $|u_n - \ell| = 0$ soit $u_n = \ell$.
   Il est alors facile de montrer que pour tout $m \geq n$, $u_m = \ell$ : la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ stationne.

   $\boxed{\Longleftarrow}$ C'est immédiat.

   $\boxed{\text{L'équivalence est montrée.}}$

3. Comme $|f'(\ell)| < 1$, par continuité de $f'$, il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in [\ell - \alpha, \ell + \alpha] \cap [a, b]$ tel que $|f'(x)| < 1$.
   Soit $k = \max\limits_{x \in [\ell - \alpha, \ell + \alpha] \cap [a,b]} |f'(x)|$. Ce maximum existe en vertu du théorème des bornes atteintes de Weierstrass et est strictement inférieur à 1.
   Par l'inégalité des accroissements finis, pour tout $x \in [\ell - \alpha, \ell + \alpha] \cap [a, b]$, on a :
   $$|f(x) - f(\ell)| \leq k\,|x - \ell|$$
   soit
   $$|f(x) - \ell| \leq k\,|x - \ell|\,.$$
   En particulier, $f(x) \in [\ell - \alpha, \ell + \alpha] \cap [a, b]$.
   Soit $J = [\ell - \alpha, \ell + \alpha] \cap [a, b]$.
   Il est alors facile de montrer par récurrence que si
   $$\boxed{u_0 \in J, \text{ alors pour tout } n \in \mathbf{N},\ u_n \in J}$$
   et
   $$\boxed{\forall n \in \mathbf{N}, \quad |u_n - \ell| \leq k^n\,|u_0 - \ell|\,.}$$
   Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} k^n = 0$ (car $k \in ]-1, 1[$), par encadrement, on en déduit que
   $$\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = \ell.}$$

4. (a) Il est clair que $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$.
   En utilisant l'inégalité suivante : pour tout $x \geq 0$, $\sin(x) \leq x$, il est facile de montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $0 \leq u_n \leq 1$.
   L'inégalité $\sin(x) \leq x$ valable pour tout $x \geq 0$ appliquée à $x = u_n$ donne $u_{n+1} \leq u_n$ pour tout $n \geq 0$.
   La suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est décroissante, minorée par 0 : elle converge.
   Le seul point fixe de $f$ dans l'intervalle $[0, 1]$ est 0, $f$ étant continue sur $[0, 1]$, on a $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0.}$

(b) Il est clair que $f(0) = 0$ et que $f'(0) = 1$.
Montrons que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $v_n \geq 1$. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on introduit la proposition « $v_n \geq 1$ ».
Comme $v_0 = 1$, $\mathscr{P}_0$ est vraie.
On suppose que $\mathscr{P}_n$ vraie pour un certain entier naturel $n$, montrons que $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.
Par hypothèse de récurrence, $v_n \geq 1$, on a $\ln(1 + v_n) \geq 0$ et $v_n^2 \geq 1$, donc $v_{n+1} \geq 1$.
Ainsi, $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.
Par le principe de raisonnement par récurrence, la proposition $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel $n$.
Comme pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a :

$$v_{n+1} - v_n = \ln(v_n + 1) + v_n (v_n - 1) \geq 0.$$

La suite $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est croissante.
Si la suite $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est majorée : elle converge vers un point fixe de $f$. Or, il est facile de voir que $f$ n'a pas de point fixe sur $[1, +\infty[$.
Donc $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est croissante et non majorée : $\boxed{\text{elle diverge vers } +\infty.}$

5. (a)
   - *Existence*
     Soit $g$ la fonction définie sur $[a, b]$ par $g(x) = f(x) - x$.
     On a $g(a) = f(a) - a \geq 0$ car $f(a) \geq a$ et $g(b) = f(b) - b \leq 0$ car $f(b) \leq b$.
     $g$ étant continue sur $[a, b]$ car $f$ l'est, le théorème des valeurs intermédiaires assure que $g$ s'annule sur $[a, b]$, donc $f$ admet au moins un point fixe sur $[a, b]$.
   - *Unicité*
     Supposons que $f$ ait deux points fixes $x_1$ et $x_2$.
     Comme $f$ est dérivable sur $[a, b]$ et pour tout $x \in [a, b]$,

$$|f'(x)| \leq k < 1,$$

     l'inégalité des accroissements finis assure que

$$|f(x_1) - f(x_2)| = |x_1 - x_2| \leq k\,|x_1 - x_2|\,.$$

     Cette inégalité ne peut être satisfaite que si $x_1 = x_2$.

   $\boxed{\text{On a montré que } f \text{ admet un unique point fixe sur } [a, b].}$

   (b) Soit $u_0 \in [a, b]$. En utilisant l'inégalité des accroissements finis, on a

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad |u_{n+1} - \ell| = |f(u_n) - f(\ell)| \leq k\,|u_n - \ell|\,.$$

   Ensuite, une récurrence immédiate montre que

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad |u_n - \ell| \leq k^n\,|u_0 - \ell|\,.$$

   Comme $k \in ]0, 1|$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} k^n = 0$, par encadrement, on en déduit que

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell.}$$

6. (a) Soit $\varepsilon > 0$. Comme $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers $\ell$, il existe $N_1 \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $n \geq N_1$, $|u_n - \ell| \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Ainsi, pour tout $n \geq N_1$, on a

$$\begin{aligned} |v_n - \ell| &= \frac{1}{n+1}\left|\sum_{k=0}^{n}(u_k-\ell)\right| \\ &= \frac{1}{n+1}\left|\sum_{k=0}^{N_1-1}(u_k-\ell) + \frac{1}{n+1}\sum_{k=N_1}^{n}(u_k-\ell)\right| \\ &\leq \frac{1}{n+1}\left|\sum_{k=0}^{N_1-1}(u_k-\ell)\right| + \frac{1}{n+1}\sum_{k=N_1}^{n}|u_k-\ell| \\ &\leq \frac{1}{n+1}\left|\sum_{k=0}^{N_1-1}(u_k-\ell)\right| + \frac{\varepsilon}{2}\times\frac{n-N_1+1}{n+1} \\ &\leq \frac{1}{n+1}\left|\sum_{k=0}^{N_1-1}(u_k-\ell)\right| + \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Or, $N_1$ étant fixé, on a

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1}\left|\sum_{k=0}^{N_1-1}(u_k-\ell)\right| = 0,$$

donc, il existe $N_2 \in \mathbf{N}$ tel que

$$\forall n \geq N_2, \quad \frac{1}{n+1}\left|\sum_{k=0}^{N_1-1}(u_k-\ell)\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ainsi, pour tout $n \geq N = \max\{N_1, N_2\}$, on a

$$|v_n - \ell| \leq \varepsilon.$$

$\boxed{\text{On a montré que la suite } (v_n)_{n\in\mathbf{N}} \text{ converge vers } \ell.}$

(b) En utilisant le résultat de la question 6 (a), on en déduit que la suite $\left(\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}(v_{k+1}-v_k)\right)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers $\ell$. Or, par télescopage,

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}(v_{k+1}-v_k) = \frac{1}{n+1}v_{n+1} - \frac{v_0}{n+1}.$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{v_0}{n+1} = 0$, on en déduit que

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\frac{v_{n+1}}{n+1} = \ell \iff \lim_{n\to+\infty}\frac{v_n}{n} = \ell.}$$

7. Comme $f_a$ est une fonction trinôme, on établit facilement que $f_a$ est croissante sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$, décroissante sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ et $f_a\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}a$.

Comme $f_a(0) = f_a(1) = 0$, on a $f_a([0,1]) \subset \left[0, \frac{1}{4}a\right] \subset [0,1]$ car $a \in ]0,4]$.

$\boxed{\text{On a montré que } f_a \text{ est croissante sur } \left[0,\frac{1}{2}\right]\text{, décroissante sur } \left[\frac{1}{2},1\right] \text{ et que } I \text{ est stable par } f_a.}$

8. Soit $u_0 \in I$. Comme $I$ est stable par $f_a$, on montre facilement par récurrence que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n \in I$.
   $\boxed{\text{La suite } (u_n)_{n\in\mathbf{N}} \text{ est bien définie pour tout } u_0 \in I.}$
9. Pour tout $x \in [0,1]$, on a :
   $$f_a(x) = x \iff x(ax + (1-a)) = 0.$$
   On en déduit que $x = 0$ ou $x = 1 - \dfrac{1}{a}$.
   Il est clair que $0 \in I$ et $1 - \dfrac{1}{a} \in I \iff a \geq 1$.
   $\boxed{\text{Donc, si } a \in ]0,1],\ f_a \text{ admet un unique point fixe 0 et si } a \in ]1,4],\ f_a \text{ a deux points fixes 0 et } 1 - \dfrac{1}{a}.}$
10. Il est facile de voir que pour tout $x \in I$, $f_a(x) \leq x$.
    Comme pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n \in I$ (question 8), ainsi $f_a(u_n) \leq u_n$ soit
    $$u_{n+1} \leq u_n.$$
    La suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est décroissante, minorée par 0 : elle converge vers un point fixe de $f$ dans $[0,1]$.
    Lorsque $a \in ]0,1[$, $f_a$ admet un unique point fixe dans $[0,1]$ : 0.
    $\boxed{\text{On a montré que } \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0.}$
11. (a) On procède par rcurrence et pour tout $n \in \mathbf{N}$, on introduit la proposition $\mathscr{P}_n$ : « $0 < u_n < 1$ ».
    Par hypothèse, $\mathscr{P}_0$ est vraie.
    Supposons $\mathscr{P}_n$ vraie pour un certain entier naturel $n$. Comme $u_n \in ]0,1[$ (hypothèse de récurrence), on a
    $$u_{n+1} = au_n(1 - u_n) > 0.$$
    On a montré que $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.
    Par le principe de raisonnement par récurrence, on a en particulier montré que
    $$\boxed{\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_n > 0.}$$
    (b) D'après la question 11 (a), pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n > 0$, donc
    $$\forall n \in \mathbf{N}, \quad \ln(u_{n+1}) = \ln(u_n) + \ln(a) + \ln(1 - u_n). \tag{1}$$
    Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$, on obtient donc que
    $$\lim_{n\to+\infty} (\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)) = \ln(a).$$
    Par le *Lemme de l'escalier*, on récupère
    $$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (\ln(u_{k+1}) - \ln(u_k)) = \ln(a).$$
    Comme pour tout $n \in \mathbf{N}^*$,
    $$\sum_{k=0}^{n-1} (\ln(u_{k+1}) - \ln(u_k)) = \ln(u_n) - \ln(u_0),$$
    on déduit donc que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} \ln(u_n) = \ln(a)$, soit
    $$\boxed{\ln(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(a)\, n.}$$

(c) D'après le résultat de la question 11 (b), il existe $N \in \mathbf{N}^*$ tel que

$$\forall n \geq N, \quad \frac{\ln(u_n)}{\ln(a)\, n} \geq \frac{1}{2}.$$

$$\forall n \geq N, \quad \ln(u_n) \leq \frac{1}{2}\ln(a)\, n.$$

Ainsi, par croissance de la fonction exp sur $\mathbf{R}$,

$$\forall n \geq N, \quad u_n \leq \exp\left(\frac{1}{2}\ln(a)\, n\right).$$

Comme la série $\sum\limits_{n\geq N} \exp\left(\frac{1}{2}\ln(a)\, n\right)$ converge (car $\ln(a) < 0$) et comme $u_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbf{N}$, par comparaison, on en déduit que la série $\sum\limits_{n\geq N} u_n$ converge, ainsi $\boxed{\sum\limits_{n\geq 0} u_n \text{ converge.}}$

(d) On reprend l'égalité (1) établie à la correction de la question 11 (b),

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad \ln(u_{n+1}) = \ln(u_n) + \ln(a) + \ln(1-u_n).$$

Soit $N \in \mathbf{N}^*$. En sommant l'inégalité précédente entre 0 et $N-1$, on a

$$\ln(u_N) - \ln(u_0) = N\ln(a) + \sum_{n=0}^{N-1} \ln(1-u_n).$$

D'où, en composant par la fonction exp, on a

$$u_N = \exp\left(\ln(u_0) + \sum_{n=0}^{N-1} \ln(1-u_n)\right) a^N.$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$, on a $\ln(1-u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} -u_n$. Comme la série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ converge (question 11 (c)), par équivalence des séries à signe constant, on en déduit que la série $\sum\limits_{n\geq 0} \ln(1-u_n)$ converge. Soit

$$\alpha = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} \ln(1-u_n).$$

Par continuité de la fonction exp, on a

$$\lim_{N\to+\infty} \exp\left(\ln(u_0) + \sum_{n=0}^{N-1} \ln(1-u_n)\right) = \exp(\ln(u_0) + \alpha).$$

On pose $A = \exp(\ln(u_0) + \alpha)$. On a donc

$$\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} A a^n.}$$

12. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a $u_{n+1} - u_n = -u_n^2 \leq 0$, ainsi la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est décroissante.
Comme la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est minorée, elle converge vers un point fixe de $f_a$ dans $I$.
D'après la question 9, l'unique point fixe de $f_a$ est 0.
$\boxed{\text{On a montré que } \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0.}$

13. (a) $\boxed{\text{C'est la même récurrence que celle faite à la question 11 (a).}}$

(b) Soit $\beta \in \mathbf{R}$. Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$, pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a (notons que $u_n^\beta$ est bien défini d'après la question 13 (a)) :

$$\begin{aligned} u_{n+1}^\beta &= u_n^\beta (1-u_n)^\beta \\ &\underset{n\to+\infty}{=} u_n^\beta (1 - \beta u_n + o(u_n)) \\ &\underset{n\to+\infty}{=} u_n^\beta - \beta u_n^{\beta+1} + o\left(u_n^{\beta+1}\right). \end{aligned}$$

En prenant $\beta = -1$, on obtient

$$\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} \underset{n\to+\infty}{=} 1 + o(1).$$

$\boxed{\text{Pour } \beta = -1, \text{ on a } \lim\limits_{n\to+\infty} \left(u_{n+1}^\beta - u_n^\beta\right) = 1.}$

(c) En appliquant le *Lemme de l'escalier*, on a

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{u_{k+1}} - \frac{1}{u_k}\right) \underset{n\to+\infty}{=} 1 + o(1).$$

Or $\sum\limits_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{u_{k+1}} - \frac{1}{u_k}\right) = \frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_0}$, on obtient donc

$$\frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_0} \underset{n\to+\infty}{\sim} n.$$

$\boxed{\text{On a montré que } u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}.}$

14. • Si $u_0 = 0$, alors pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = 0$, donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0.}$

    • Si $u_0 = \alpha$, alors pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = \alpha$, donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \alpha.}$

    • Si $u_0 = 1$, alors pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $u_n = 0$, donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0.}$

15. On distingue plusieurs cas selon la valeur de $u_0$.

    • Si $u_0 \in ]0, \alpha[$. Il est facile de vérifier que $f_a(]0,\alpha[) = ]0,\alpha[$ et pour tout $x \in ]0,\alpha[$, $f_a(x) \geq x$.
    Il s'ensuit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est strictement croissante, majorée par $\alpha$ : elle converge vers un point fixe $\ell$ de $f_a$ de $[0,\alpha]$.
    Sur l'intervalle $[0,\alpha]$, $f_a$ a deux points fixes : 0 et $\alpha$.
    Comme $u_0 > 0$ et $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ croissante, ainsi $\ell \geq u_0 > 0$. Il s'ensuit que $\ell = \alpha$.
    $\boxed{\text{On a montré que } \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \alpha.}$

    • On suppose $u_0 \in \left]\alpha, \frac{1}{2}\right[$. Il est facile de vérifier que $f_a\left(\left]\alpha, \frac{1}{2}\right[\right) = \left]\alpha, \frac{1}{2}\right[$ et pour tout $x \in \left]\alpha, \frac{1}{2}\right[$, $f_a(x) \leq x$.
    Il s'ensuit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est strictement décroissante, minorée par $\alpha$ : elle converge vers un point fixe $\ell$ de $f_a$ de $\left[\alpha, \frac{1}{2}\right]$.
    Sur l'intervalle $\left[\alpha, \frac{1}{2}\right]$, $f_a$ a un seul point fixe : $\alpha$.
    $\boxed{\text{On a montré que } \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \alpha.}$

- Si $u_0 \in \left]\frac{1}{2}, \frac{1}{a}\right[$. Comme $f_a$ est décroissante sur $\left]\frac{1}{2}, \frac{1}{a}\right[$, on a

$$u_1 \in \left] f_a\left(\frac{1}{a}\right), f_a\left(\frac{1}{2}\right)\right[.$$

  Or $f_a\left(\frac{1}{a}\right) = \alpha$ et $f_a\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{a}{4} \leq \frac{1}{2}$ car $a < 2$.
  Il s'ensuit que $u_1 \in \left]\alpha, \frac{1}{2}\right[$. En suivant le deuxième point de cette question 15, on en conclut que $\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \alpha.}$

- Si $u_0 = \frac{1}{a}$, alors $u_1 = 1 - \frac{1}{a} = \alpha$, donc la suite

$$\boxed{(u_n)_{n\in\mathbf{N}} \text{ stationne sur } \alpha.}$$

- Si $u_0 \in \left]\frac{1}{a}, 1\right[$. La décroissance de $f$ sur $\left]\frac{1}{a}, 1\right[ \subset \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ (question 7) assure que $u_1 \in \left] f_a(1), f_a\left(\frac{1}{a}\right)\right[ = ]0, \alpha[$.
  On conclut, comme dans le premier point de cette question 15 que

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \alpha.}$$

16. (a) S'il existait un entier $n$ tel que $v_n = 0$, alors $u_n = \alpha$ : la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ serait stationnaire, ce qui est exclu.
$\boxed{\text{On a montré que pour tout } n \in \mathbf{N},\ v_n \neq 0.}$

(b) Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a $v_n = u_n + \alpha$, ainsi

$$v_{n+1} + \alpha = a(v_n + \alpha)(1 - v_n - \alpha).$$

En développant cette expression, en utilisant le fait que $\alpha = a\alpha(1-\alpha)$ et $\alpha = 1 - \frac{1}{a}$ (question 9), on en déduit que :

$$v_{n+1} = v_n(2 - a - av_n),$$

soit

$$|v_{n+1}| = |v_n|\,|2 - a - av_n|.$$

Or, $|v_n| > 0$ et $|v_{n+1}| > 0$ (question 16 (a)), on a $|2 - a - av_n| > 0$, puis

$$\ln(|v_{n+1}|) = \ln(|v_n|) + \ln(|2 - a - av_n|). \tag{2}$$

Comme $(|v_n|)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers 0, ainsi la suite $(\ln(|v_{n+1}|) - \ln(|v_n|))_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers $\ln(2-a) \neq 0$.
D'après le *Lemme de l'escalier*, on en déduit que la suite $\left(\frac{\ln(|v_n|)}{n}\right)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge vers $\ln(2-a)$.
$\boxed{\text{On a montré que } \ln(|v_n|) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(2-a)\,n.}$

(c) C'est la même idée que celle utilisée pour la question 11 (c).
D'après le résultat de la question 16 (b), il existe $N \in \mathbf{N}^*$ tel que

$$\forall n \geq N, \quad \ln(|v_n|) \leq \frac{1}{2}\ln(2-a)\,n.$$

Ainsi, par croissance de la fonction exp sur $\mathbf{R}$,

$$\forall n \geq N, \quad |v_n| \leq \exp\left(\frac{1}{2}\ln(2-a)\,n\right).$$

Comme la série $\sum\limits_{n\geq N} \exp\left(\frac{1}{2}\ln(2-a)\,n\right)$ converge (car $\ln(2-a)<0$) et comme $|v_n|\geq 0$ pour tout $n\in\mathbf{N}$, par comparaison, on en déduit que $\boxed{\text{la série } \sum\limits_{n\geq 0}|v_n| \text{ converge.}}$

(d) On reprend l'égalité (2) établie à la question 16 (b). On a

$$\forall n\in\mathbf{N},\quad \ln(|v_{n+1}|)=\ln(|v_n|)+\ln(|2-a-av_n|),$$

d'où (car $2-a>0$)

$$\ln(|v_{n+1}|)=\ln(|v_n|)+\ln(2-a)+\ln\left(\left|1-\frac{a}{2-a}v_n\right|\right).$$

Soit $N\in\mathbf{N}^*$. En sommant cette inégalité entre 0 et $N-1$, on récupère

$$\ln(|v_N|)=\ln(|v_0|)+N\ln(2-a)+\sum_{k=0}^{N-1}\ln\left(\left|1-\frac{a}{2-a}v_k\right|\right),$$

puis en composant par la fonction exp,

$$|v_N|=\exp\left(\ln(|v_0|)+\sum_{k=0}^{N-1}\ln\left(\left|1-\frac{a}{2-a}v_k\right|\right)\right)(2-a)^N.$$

Comme $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers 0, il s'ensuit

$$\left|\ln\left(\left|1-\frac{a}{2-a}v_k\right|\right)\right| \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{a}{2-a}|v_k|.$$

Or, la série $\sum\limits_{k\geq 0}|v_k|$ converge (question 16 (c)), par équivalence des séries à termes positifs, la série $\sum\limits_{k\geq 0}\left|\ln\left(1-\frac{a}{2-a}v_k\right)\right|$ converge, donc la série $\sum\limits_{k\geq 0}\ln\left(1-\frac{a}{2-a}v_k\right)$ converge.

Soit $\alpha=\lim\limits_{N\to+\infty}\sum\limits_{k=0}^{N-1}\ln\left(\left|1-\frac{a}{2-a}v_k\right|\right)$. Par continuité de la fonction exp sur $\mathbf{R}$, on a

$$\lim_{N\to+\infty}\exp\left(\ln(|v_0|)+\sum_{k=0}^{N-1}\ln\left(\left|1-\frac{a}{2-a}v_k\right|\right)\right)=A.$$

où l'on a posé $A=\exp(\ln|v_0|+\alpha)$. On a montré que

$$\boxed{|u_n-\alpha| \underset{n\to+\infty}{\sim} A(2-a)^n.}$$

17. 
- Si $u_0=0$, alors pour tout $n\in\mathbf{N}$, $u_n=0$, donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0.}$
- Si $u_0=\frac{1}{2}$, alors pour tout $n\in\mathbf{N}$, $u_n=\frac{1}{2}$, donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\frac{1}{2}.}$
- Si $u_0=1$, alors pour tout $n\in\mathbf{N}^*$, $u_n=0$, donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0.}$

18. (a) On procède par récurrence : pour tout $n\in\mathbf{N}^*$, on introduit la proposition $\mathscr{P}_n$ : « $u_n<\frac{1}{2}$ ».
Comme $u_0\neq\frac{1}{2}$, on a $2u_0(1-u_0)<\frac{1}{2}$, donc $\mathscr{P}_1$ est vraie.
On suppose $\mathscr{P}_n$ vraie pour un certain entier naturel non nul $n$, montrons que $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.
On a $u_{n+1}=2u_n(1-u_n)<\frac{1}{2}$ car $u_n\neq\frac{1}{2}$ par hypothèse de récurrence.

On a montré que $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.
Par le principe de raisonnement par récurrence, la proposition $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel $n$ non nul.

$\boxed{\text{On a montré que pour tout } n \in \mathbf{N}^*,\ u_n < \frac{1}{2}.}$

(b) On pose $v_n = \frac{1}{2} - u_n$. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a

$$u_{n+1} = 2u_n\left(1 - u_n\right) \iff v_{n+1} = 2v_n^2 = \left(\sqrt{2}v_n\right)^2.$$

Cette relation de récurrence permet de conjecturer que

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad v_n = \sqrt{2}^{2^{n+1}-2} v_0^{2^n}.$$

On démontre cette conjecture par récurrence. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on introduit la proposition $\mathscr{P}_n$ : « $v_n = \sqrt{2}^{2^{n+1}-2} v_0^{2^n}$ ».
De toute évidence, $\mathscr{P}_0$ est vraie.
On suppose $\mathscr{P}_n$ vraie pour un certain entier naturel $n$. On a

$$v_{n+1} = \left(\sqrt{2}v_n\right)^2 = \sqrt{2}^2\sqrt{2}^{2^{n+2}-4} v_0^{2^{n+1}} = \sqrt{2}^{2^{n+2}-2} v_0^{2^{n+1}}.$$

Ainsi, $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie. On a montré par récurrence que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbf{N}, \quad \frac{1}{2} - u_n = \sqrt{2}^{2^{n+1}-2}\left(\frac{1}{2} - u_0\right)^{2^n}.}$$

(c) Comme $u_0 \neq \frac{1}{2}$, l'expression de $\frac{1}{2} - u_n$ trouvée à la question 18 (b) donne

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbf{N}, \quad u_n &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2}^{2^{n+1}}\left(\frac{1}{2} - u_0\right)^{2^n} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(1 - 2u_0\right)^{2^n}. \end{aligned}$$

Comme $u_0 \in \left]0, 1\right[$, on a $1 - 2u_0 \in \left]-1, 1\right[$, donc

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = \frac{1}{2}.}$$

19. On remarque facilement que si :
   - si $u_0 = 0$, alors $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbf{N},\ u_n = 0}$;
   - si $u_0 = 1 - \frac{1}{a}$, alors $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbf{N},\ u_n = 1 - \frac{1}{a}}$;
   - si $u_0 = 1$, alors $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbf{N}^*,\ u_n = 0.}$

20. (a)
   - Si $u_0 \in \left]0, 1 - \frac{1}{a}\right[$, c'est terminé.
   - On suppose donc $u_0 \in \left]1 - \frac{1}{a}, 1\right[$. Comme $a \in \left]2, 3\right[$, on a $1 - \frac{1}{a} \in \left]\frac{1}{2}, 1\right[$.

     Par la question 7, $f_a$ est décroissante sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$, donc sur $\left]1 - \frac{1}{a}, 1\right[$.

Comme $f_a$ est continue sur $\left]1-\dfrac{1}{a},1\right[$ et décroissante sur cet intervalle, on en déduit que

$$\begin{aligned} u_1 = f_a(u_0) \in f_a\left(\left]1-\frac{1}{a},1\right]\right) &= \left]f_a(1), f_a\left(1-\frac{1}{a}\right)\right[ \\ &= \left]0, 1-\frac{1}{a}\right[. \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, quitte à étudier la suite } (u_n)_{n\in\mathbf{N}} \text{ à partir du rang 1, on peut supposer } u_0 \in \left]0, 1-\frac{1}{a}\right[.}$$

(b) D'après la question 20 (a), on a $u_0 \in \left]0, 1-\frac{1}{a}\right[$.

- Si $u_0 \in \left[\dfrac{1}{a}, 1-\dfrac{1}{a}\right]$, c'est terminé : $0 \in \left\{n \in \mathbf{N},\ \dfrac{1}{a} \leq u_n \leq 1-\dfrac{1}{a}\right\}$.
- On suppose $u_0 < \dfrac{1}{a}$ et on suppose que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n < \dfrac{1}{a}$. On remarque

$$\forall x \in \left[0, \frac{1}{a}\right], \quad f_a(x) \geq x.$$

Soit $n \in \mathbf{N}$. En prenant $x = u_n$ dans l'inégalité précédente (possible car $0 \leq u_n \leq \dfrac{1}{a}$), on a $u_{n+1} \geq u_n$.
La suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est croissante, majorée par $\dfrac{1}{a}$ : elle converge. On note $\ell$ sa limite.
Comme $f_a$ est continue sur $[0,1]$, $\ell$ est un point fixe de $f_a$, donc

$$\ell \in \left\{0, 1-\frac{1}{a}\right\}.$$

Or, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $0 < u_0 \leq u_n \leq \dfrac{1}{a} < 1-\dfrac{1}{a}$, donc $u_0 \leq \ell \leq \dfrac{1}{a}$ et il n'est pas possible que $\ell \in \left\{0, 1-\dfrac{1}{a}\right\}$. On obtient une contradiction.
Ainsi, l'ensemble $\left\{n \in \mathbf{N},\ \forall k \in [\![0,n]\!],\ u_k \leq \dfrac{1}{a}\right\}$ est non vide (car il contient 0), majorée, donc il admet un plus grand élément $n_0$.
Par définition de $n_0$, on a $u_{n_0+1} > \dfrac{1}{a}$. De plus, comme

$$u_{n_0} \leq \frac{1}{a} \leq \frac{1}{2},$$

par croissance de $f_a$ sur $\left[0, \dfrac{1}{2}\right]$, on a

$$u_{n_0+1} = f_a(u_{n_0}) \leq f_a\left(\frac{1}{a}\right) = 1-\frac{1}{a}.$$

On a donc $u_{n_0+1} \in \left[\dfrac{1}{a}, 1-\dfrac{1}{a}\right]$.

$$\boxed{\text{On a montré l'ensemble } \left\{n \in \mathbf{N},\ \frac{1}{a} \leq u_n \leq 1-\frac{1}{a}\right\} \text{ n'est pas vide.}}$$

(c) On procède par étapes.

- Une étude de la fonction $f_a$ permet de montrer que

$$f_a\left(\left[\frac{1}{a},1-\frac{1}{a}\right]\right)=\left[1-\frac{1}{a},\frac{a}{4}\right].$$

et

$$\begin{aligned} f_a^2\left(\left[\frac{1}{a},1-\frac{1}{a}\right]\right) &= f_a\left(\left[1-\frac{1}{a},\frac{a}{4}\right]\right) \\ &= \left[f_a\left(\frac{a}{4}\right),f_a\left(1-\frac{1}{a}\right)\right] \\ &= \left[\frac{a^2(4-a)}{16},1-\frac{1}{a}\right]. \end{aligned}$$

Or,

$$\frac{a^2(4-a)}{16}-\frac{1}{a}=\frac{a^3(4-a)-16}{16}.$$

Une simple étude de la fonction

$$a\in\,]2,3[\,\longmapsto a^3(4-a)-16$$

montre que pour tout $a\in\,]2,3[$, $a^3(4-a)-16\geq 0$. Ainsi,

$$\frac{a^3(4-a)}{16}\geq\frac{1}{a}\quad\text{et}\quad f_a^2\left(\left[\frac{1}{a},1-\frac{1}{a}\right]\right)\subset\left[\frac{1}{a},1-\frac{1}{a}\right].$$

- L'étape précédente permet de montrer facilement par récurrence que

$$\forall n\in\mathbf{N},\quad v_n\in\left[\frac{1}{a},1-\frac{1}{a}\right]\quad\text{et}\quad w_n\in\left[1-\frac{1}{a},\frac{a}{4}\right].$$

- On montre que la suite $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge. On commence par donner l'expression de $f_a^2$ : pour tout $x\in[0,1]$,

$$\begin{aligned} f_a^2(x) &= aax(1-x)(1-ax(1-x)) \\ &= -a^3x^4+2a^3x^3-a^2(1+a)x^2+a^2x. \end{aligned}$$

On en déduit donc : pour tout $x\in[0,1]$,

$$\left(f_a^2\right)'(x)=-4a^3x^3+6a^3x^2-2a^2(1+a)x+a^2$$

et

$$\begin{aligned} (f_a)''(x) &= -12a^3x^2+12a^3x-2a^2(1+a) \\ &= -2a^2\left(6ax^2-6ax+1+a\right). \end{aligned}$$

Comme $v_n\in\left[\frac{1}{a},1-\frac{1}{a}\right]$ pour tout $n\in\mathbf{N}^*$, nous allons étudier le signe de $(f_a)''(x)$ pour $x\in\left[\frac{1}{a},1-\frac{1}{a}\right]$.

Le discriminant $\Delta$ du trinôme $6ax^2-6ax+1+a$ vaut $\Delta=12a(a-2)$ et est strictement positif car $a>2$.

On en déduit que le trinôme $6ax^2-6ax+1+a$ a deux racines réelles $x_1<x_2$.

Le calcul suivant

$$6a\times\left(\frac{1}{a}\right)^2-6a\times\frac{1}{a}+1+a=\frac{(a-2)(a-3)}{a}<0$$

permet de conclure que $x_1<\frac{1}{a}$.

De même, on a
$$6a\left(1-\frac{1}{a}\right)^2-6a\left(1-\frac{1}{a}\right)+1+a=\frac{-5a^2+a+6}{a}.$$
Le trinôme $-5a^2+a+6$ est aisé à étudier : son discriminant vaut 121 et ses racines sont $\frac{6}{5}$ et $-1$.
Ainsi, pour tout $a\in\,]2,3[$, $6a\left(1-\frac{1}{a}\right)^2-6a\left(1-\frac{1}{a}\right)+1+a\leq 0$.
Cela permet de conclure que $x_2>1-\frac{1}{a}$. On en déduit donc que
$$\forall x\in\left[\frac{1}{a},1-\frac{1}{a}\right],\quad \left(f_a^2\right)''(x)\geq 0.$$
La fonction $\left(f_a^2\right)'$ est croissante sur $\left[\frac{1}{a},1-\frac{1}{a}\right]$. Or,
$$\forall x\in[0,1],\quad \left(f_a^2\right)'(x)=f_a'(x)\,f_a'\left(f_a(x)\right).$$
Comme
$$\begin{aligned}\left(f_a^2\right)'\left(\frac{1}{a}\right) &= f_a'\left(\frac{1}{a}\right)f_a'\left(f_a\left(\frac{1}{a}\right)\right)\\ &= (a-2)\,a\left(1-2\left(1-\frac{1}{a}\right)\right)\\ &= -(a-2)^2\end{aligned}$$
et
$$\left(f_a^2\right)'\left(1-\frac{1}{a}\right)=f_a'\left(1-\frac{1}{a}\right)^2=(a-2)^2,$$
on a montré que
$$\forall x\in\left[\frac{1}{a},1-\frac{1}{a}\right],-(a-2)^2\leq\left(f_a^2\right)'(x)\leq(a-2)^2.$$
On a montré que $f_a^2$ est une application de $\left[\frac{1}{a},1-\frac{1}{a}\right]$ à valeurs dans $\left[\frac{1}{a},1-\frac{1}{a}\right]$ et vérifiant : pour tout $x\in\left[\frac{1}{a},1-\frac{1}{a}\right]$,
$$\left|\left(f_a^2\right)'(x)\right|\leq(a-2)^2<1,$$
car $a\in\,]2,3[$.
D'après la question 5 (b), la suite $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers l'unique point fixe de $f_a^2$ sur cet intervalle.
Or $1-\frac{1}{a}$ est un point fixe de $f_a$ sur $\left[\frac{1}{a},1-\frac{1}{a}\right]$, c'est aussi un point fixe de $f_a^2$. Par unicité (question 5 (a)), c'est le seul point fixe de $f_a^2$ sur $\left[\frac{1}{a},1-\frac{1}{a}\right]$. On en déduit que la suite $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers $1-\frac{1}{a}$.

- On montre que la suite $(w_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge.

  On remarque que pour tout $n\in\mathbf{N}$, $w_n=f_a(v_n)$. Comme $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers $1-\frac{1}{a}$, par continuité de $f_a$ sur en $1-\frac{1}{a}$, on en déduit que la suite $(w_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers $f_a\left(1-\frac{1}{a}\right)=1-\frac{1}{a}$.

On a montré que les suites $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbf{N}}$ convergent vers $1-\dfrac{1}{a}$.

(d) Il faut discuter si $n_1$ est pair ou impair.

- Si $n_1$ est pair, alors pour tout $n \geq \dfrac{n_1}{2}$, $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$.
- Si $n_1$ est impair, alors pour tout $n \geq \dfrac{n_1}{2}$, $v_n = u_{2n+1}$ et $w_n = u_{2n}$.

Dans tous les cas, comme les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbf{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbf{N}}$ convergent vers la même limite $1-\dfrac{1}{a}$, on peut affirmer que $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers $1-\dfrac{1}{a}$.

21. On propose

```
def suitelogistique(a,u0,n):
    u=u0
    for k in range(n-1):
        u=a*u*(1-u)
    return u
```

22. On propose

```
def equivalent(u0,n):
    u=u0
    for k in range(n):
        u=u*(1-u)
    return n*u
```

La valeur renvoyée pour $n = 1000$ est proche de 0,993. Cela confirme le résultat trouvé à la question 13 (c) à savoir $\lim\limits_{n\to+\infty} nu_n = 1$.