Correction du devoir maison 6

Exercice 1.

- On a :
$$\forall \lambda \in \mathbf{R}, \quad \chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda-1 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda-1 \end{vmatrix} = \lambda^2(\lambda-3).$$
Il s'ensuit que $\mathrm{Sp}(A) = \{0, 3\}$.
  - ⋆ Comme 3 est valeur propre simple, on a $\dim(E_3(A)) = 1$.
  - ⋆ Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbf{R})$. On a :
$$\begin{aligned} X \in E_0(A) &\iff AX = 0 \\ &\iff x+y+z = 0 \\ &\iff x = -y-z \\ &\iff X = \begin{pmatrix} -y-z \\ y \\ z \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$
Il s'ensuit que $E_0(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. Comme les vecteurs $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires, on en déduit que $\dim(E_0(A)) = 2$.

  Comme $\dim(E_0(A)) + \dim(E_3(A)) = 3$, on en déduit que A est diagonalisable dans $\mathbf{R}$.
- On a :
$$\forall \lambda \in \mathbf{R}, \quad \chi_B(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & -3 \\ -4 & \lambda-5 & -6 \\ -7 & -8 & \lambda-9 \end{vmatrix}.$$
On commence par faire l'opération $C_2 \longleftarrow C_2 - \frac{1}{2}C_1 - \frac{1}{2}C_3$, on obtient :
$$\chi_B(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -\frac{1}{2}\lambda & -3 \\ -4 & \lambda & -6 \\ -7 & -\frac{1}{2}\lambda & \lambda-9 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} \lambda-1 & -\frac{1}{2} & -3 \\ -4 & 1 & -6 \\ -7 & -\frac{1}{2} & \lambda-9 \end{vmatrix}.$$
Pour calculer ce dernier déterminant, on fait les opérations $L_2 \longleftarrow L_2 + 2L_1$ et $L_3 \longleftarrow L_3 - L_1$ pour obtenir :
$$\chi_B(\lambda) = \lambda \begin{vmatrix} \lambda-1 & -\frac{1}{2} & -3 \\ 2\lambda-6 & 0 & -12 \\ -\lambda-6 & 0 & \lambda-6 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\lambda \begin{vmatrix} 2\lambda-6 & -12 \\ -\lambda-6 & \lambda-6 \end{vmatrix} = \lambda\left(\lambda^2 - 15\lambda - 18\right).$$
Il est facile de montrer que le trinôme $\lambda^2 - 15\lambda - 18$ a deux racines réelles toutes les deux différentes de 0. Il s'ensuit que χ_B est scindé à racines simples, on en déduit que B est diagonalisable dans $\mathbf{R}$.

- On a :

$$\forall \lambda \in \mathbf{R}, \quad \chi_C(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & \lambda-1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & \lambda-1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix}.$$

En développant par rapport à la première ligne, on a :

$$\begin{aligned} \chi_C(\lambda) &= (\lambda-1)\times \begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 & 0 \\ -1 & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & \lambda-1 & -1 \\ 0 & -1 & \lambda-1 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda-1)^2\left((\lambda-1)^2-1\right) - \left((\lambda-1)^2-1\right) \\ &= \lambda^2(\lambda-2)^2. \end{aligned}$$

On en déduit que $\mathrm{Sp}(C) = \{0, 2\}$.

$\star$ Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{4,1}(\mathbf{R})$. On a :

$$\begin{aligned} X \in E_0(C) &\iff CX = 0 \\ &\iff \begin{cases} x+t &= 0 \\ y+z &= 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x &= -t \\ y &= -z \end{cases} \\ &\iff X = \begin{pmatrix} -t \\ -z \\ z \\ t \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Il s'ensuit que $E_0(C) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$. Comme les vecteurs $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires, on en déduit que $\dim(E_0(C)) = 2$.

$\star$ Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{4,1}(\mathbf{R})$. On a :

$$\begin{aligned} X \in E_2(C) &\iff CX = 2X \\ &\iff \begin{cases} -x+t &= 0 \\ -y+z &= 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x &= t \\ y &= z \end{cases} \\ &\iff X = \begin{pmatrix} t \\ z \\ z \\ t \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Il s'ensuit que $E_2(C) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$. Comme les vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires, on en déduit que $\dim(E_2(C)) = 2$.

Comme $\dim(E_0(C)) + \dim(E_2(C)) = 4$, on en déduit que C est diagonalisable dans $\mathbf{R}$.

Exercice 2.

On note $A = \begin{pmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & d & e \\ 0 & 0 & 2 & f \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Comme A est triangulaire, on a $\chi_A(\lambda) = (\lambda - 1)^2 (\lambda - 2)^2$ et $\mathrm{Sp}(A) = \{1, 2\}$.

A est alors diagonalisable si, et seulement si, $\dim(E_1(A)) = \dim(E_2(A)) = 2$.

- On a :
$$A - \mathrm{I}_4 = \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & d & e \\ 0 & 0 & 1 & f \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
Il est clair que les deux dernières colonnes de la matrice $A - \mathrm{I}_4$ sont non colinéaires, ainsi $\mathrm{rg}(A - \mathrm{I}_4) \geq 2$.
On notera que $\mathrm{rg}(A - \mathrm{I}_4) = 2$ si, et seulement si, $a = 0$.
- On a :
$$A - 2\mathrm{I}_4 = \begin{pmatrix} -1 & a & b & c \\ 0 & -1 & d & e \\ 0 & 0 & 0 & f \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
Il est clair que les deux premières colonnes de la matrice $A - 2\mathrm{I}_4$ sont non colinéaires, ainsi $\mathrm{rg}(A - 2\mathrm{I}_4) \geq 2$.
On notera que $\mathrm{rg}(A - 2\mathrm{I}_4) = 2$ si, et seulement si, $f = 0$.

Il s'ensuit que A est diagonalisable si, et seulement si, $a = f = 0$.

Exercice 3.

1. On remarque que A n'est inversible. Si l'on introduit l'entier $m \in \mathbf{N}^*$ tel que $A^m = 0$ et $A^{m-1} \neq 0$.
Si A est inversible, on aurait $0 = A^{-1} \times A^m = A^{m-1}$, ce qui contredit la définition de m.
Ainsi, $0 \in \mathrm{Sp}(A)$, en particulier, $\mathrm{Sp}(A) \neq \varnothing$.
Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$: il existe $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K})$ non nul tel que $AX = \lambda X$. Or, $0 = A^m X = \lambda^m X$, donc $\lambda^m X = 0$. Comme X n'est pas nul, on en déduit que $\lambda = 0$, donc $\mathrm{Sp}(A) \subset \{0\}$.
On a prouvé que $\mathrm{Sp}(A) = \{0\}$.
2. On prouve les deux équivalences.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons A diagonalisable. Il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$ telle que $A = PDP^{-1}$. Comme $\mathrm{Sp}(A) = \{0\}$, on a $D = 0$, donc $A = 0$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Comme la matrice nulle est diagonale, elle est diagonalisable.

Exercice 4.

1. (a) On procède par double inclusion.

$\boxed{\subset}$ Cette inclusion est claire.

$\boxed{\supset}$ Soit $x \in \mathbf{K}$. Comme la matrice $\begin{pmatrix} x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ a pour trace x, on a $\mathbf{K} \subset \mathrm{Im}(\mathrm{Tr})$.

On a montré que $\mathrm{Im}(\mathrm{Tr}) = \mathbf{K}$.

(b) Comme $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$, le théorème du rang donne :
$$\begin{aligned} & \dim(\mathscr{M}_n(\mathbf{K})) = \dim(\mathrm{Ker}(\mathrm{Tr})) + \mathrm{rg}(\mathrm{Tr}) \\ \Longleftrightarrow \quad & \dim(\mathrm{Ker}(\mathrm{Tr})) = \dim(\mathscr{M}_n(\mathbf{K})) - \dim(\mathrm{Ker}(\mathrm{Tr})) - \mathrm{rg}(\mathrm{Tr}) = n^2 - 1. \end{aligned}$$

(c) On a : $\dim(\mathrm{Ker}(\mathrm{Tr})) = n^2 - 1$ et comme $\mathrm{I}_n \neq 0$, on a $\dim(\mathrm{Vect}(\mathrm{I}_n)) = 1$, on a $\dim(\mathrm{Ker}(\mathrm{Tr})) + \dim(\mathrm{Vect}(\mathrm{I}_n)) = n^2 - 1 + 1 = n^2 = \dim(\mathscr{M}_n(\mathbf{K}))$.
Soit $A \in \mathrm{Ker}(\mathrm{Tr}) \cap \mathrm{Vect}(\mathrm{I}_n)$: on a $\mathrm{Tr}(A) = 0$ et il existe $\lambda \in \mathbf{K}$ tel que $A = \lambda \mathrm{I_n}$. On a :

$$0 = \mathrm{Tr}(A) = \lambda \mathrm{Tr}(I_n) = \lambda n,$$

ainsi $\lambda = 0$, soit $A = 0$. On a montré que $\mathrm{Ker}(\mathrm{Tr}) \cap \mathrm{Vect}(\mathrm{I}_n) \subset \{0\}$. L'inclusion réciproque est claire, on a montré que $\mathrm{Ker}(\mathrm{Tr}) \cap \mathrm{Vect}(\mathrm{I}_n) = \{0\}$.
On a montré que $\mathscr{M}_n(\mathbf{K}) = \mathrm{Ker}(\mathrm{Tr}) \oplus \mathrm{Vect}(\mathrm{I}_n)$.

2. (a) Il est clair que, si $M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$, alors $f(M) \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$.
Soit $(M_1, M_2) \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})^2$ et $\lambda \in \mathbf{K}$. On a :

$$\begin{aligned} f(M_1 + \lambda M_2) &= (M_1 + \lambda M_2) + \mathrm{Tr}(M_1 + \lambda M_2)\,\mathrm{I}_n \\ &= M_1 + \lambda M_2 + (\mathrm{Tr}(M_1) + \lambda \mathrm{Tr}(M_2))\,\mathrm{I}_n \quad \text{par linéarité de Tr} \\ &= M_1 + \mathrm{Tr}(M_1)\,\mathrm{I}_n + \lambda(M_2 + \mathrm{Tr}(M_2)\,\mathrm{I}_n) \\ &= f(M_1) + \lambda f(M_2). \end{aligned}$$

On a montré que $f \in \mathscr{L}(\mathscr{M}_n(\mathbf{K}))$.

(b)
- Si $\mathrm{Ker}(M)$, on a $f(M) = M$. Il s'ensuit que 1 est valeur propre et $\dim(E_1(f)) \geq n^2 - 1$.
- Si $M \in \mathrm{Vect}(\mathrm{I}_n)$: il existe $\lambda \in \mathbf{K}$ tel que $M = \lambda \mathrm{I}_n$, on a :

$$f(M) = \lambda \mathrm{I}_n + \mathrm{Tr}(\lambda \mathrm{I}_n)\,\mathrm{I}_n = (n+1)\,\lambda \mathrm{I}_n = (n+1)\,M.$$

Il s'ensuit que $n+1$ est valeur propre de f et $\dim(E_{n+1}(f)) \geq 1$.

On a donc :

$$n^2 \geq \dim(E_1(f)) + \dim(E_{n+1}(f)) \geq n^2 - 1 + 1 = n^2.$$

Il s'ensuit $n^2 = \dim(E_1(f)) + \dim(E_{n+1}(f))$. Ainsi, f est diagonalisable, en particulier, $\mathrm{Sp}(f) = \{1, n+1\}$.

3. (a) Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$.En utilisant la linéarité de Tr, on a :

$$\begin{aligned} \left(g^2 - 2g + \mathrm{id}_{\mathscr{M}_n(\mathbf{K})}\right)(M) &= g^2(M) - 2g(M) + M \\ &= (M + \mathrm{Tr}(M)\,J) + \mathrm{Tr}(M + \mathrm{Tr}(M)\,J)\,J - 2\,(M + \mathrm{Tr}(M)\,J) + M \\ &= M + \mathrm{Tr}(M)\,J + (\mathrm{Tr}(M) + \mathrm{Tr}(M)\,\mathrm{Tr}(J))\,J - 2M - 2\mathrm{Tr}(M)\,J + M \\ &= 0 \quad \text{car } \mathrm{Tr}(J) = 0. \end{aligned}$$

Il s'ensuit que $g^2 - 2g + \mathrm{id}_{\mathscr{M}_n(\mathbf{K})} = 0$.

(b) Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(f)$: il existe $M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ non nulle telle que $g(M) = \lambda M$. Comme $g^2(M) = \lambda^2 M$. La relation établie à la question 3 (a) donne

$$0 = \left(g^2 - 2g + \mathrm{id}_{\mathscr{M}_n(\mathbf{K})}\right)(M) = \lambda^2 M - \lambda M + M = \left(\lambda^2 - 2\lambda + 1\right) M.$$

Comme $M \neq 0$, on a $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$. Il s'ensuit que $\lambda = 1$.
On a montré que $\mathrm{Sp}(g) \subset \{1\}$.

(c) Supposons g diagonalisable. Il s'ensuit que $\mathrm{Sp}(g) = \{1\}$, puis $g = \mathrm{id}_{\mathscr{M}_n(\mathbf{K})}$ car g n'a qu'une seule valeur propre. Or,

$$g(\mathrm{I}_n) = \mathrm{I}_n + nJ \neq \mathrm{I}_n,$$

car $J \neq 0$, ce qui donne une contradiction. Il s'ensuit que g n'est pas diagonalisable.