Correction du devoir surveillé numéro 2

Exercice 1.

1. Il est clair que Δ est diagonalisable car diagonale, que N est nilpotente car $N^2 = 0$, que $\Delta N = N\Delta$ et enfin que $A = N + \Delta$.
2. (a) Pour tout $\lambda \in \mathbf{K}$, on a :

$$\begin{array}{rcl} \chi_A(\lambda) & = & \begin{vmatrix} \lambda-3 & -1 & 1 \\ 2 & \lambda & -2 \\ 0 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix} \\ & = & (\lambda-1)\begin{vmatrix} \lambda-3 & -1 \\ 2 & \lambda \end{vmatrix} \\ & = & (\lambda-1)\left((\lambda-3)\lambda+2\right) \\ & = & (\lambda-1)\left(\lambda^2-3\lambda+2\right) \\ & = & (\lambda-1)^2(\lambda-2). \end{array}$$

On en déduit facilement que $\mathrm{Sp}(A) = \{1, 2\}$.

(b) Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbf{K})$. On a :

$$\begin{array}{rcl} X \in E_1(A) & \Longleftrightarrow & AX = X \\ & \Longleftrightarrow & \begin{cases} 3x+y-z & = x \\ -2x+2z & = y \\ z & = z \end{cases} \\ & \Longleftrightarrow & \begin{cases} 2x+y-z & = 0 \\ -2x-y+2z & = 0 \\ 0 & = 0 \end{cases} \\ & \Longleftrightarrow & \begin{cases} 2x+y-z & = 0 \\ z & = 0 \end{cases} \quad L_2 \longleftarrow L_2 - L_1 \\ & \Longleftrightarrow & \begin{cases} y & = -2x \\ z = 0 \end{cases} \\ & \Longleftrightarrow & X = \begin{pmatrix} x \\ -2x \\ 0 \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{array}$$

On en déduit que $E_1(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$. Comme $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ n'est pas nul, on en déduit que $\dim(E_1(A)) = 1 \neq 2$. Ainsi, A n'est pas diagonalisable.

3. (a) On a :

$$\Delta X_1 = 2X_1, \quad \Delta X_2 = X_2 \quad \text{et} \quad \Delta X_3 = X_3.$$

(b) • Il est clair que la famille (X_1, X_2, X_3) est libre, donc forme une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbf{K})$. Il s'ensuit que Δ est diagonalisable car il existe une base de vecteurs propres de Δ de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbf{K})$.

- Si l'on pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, on a bien $\Delta = PDP^{-1}$.

(c) Soit $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$. On cherche $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ tel que $PX = Y$. On a :

$$\begin{aligned} PX = Y & \iff \begin{cases} x_1 + x_3 & = y_1 \\ -x_1 - 2x_3 & = y_2 \\ x_2 & = y_3 \end{cases} \\ & \iff \begin{cases} x_1 + x_3 & = y_1 \\ -x_3 & = y_2 + y_1 \\ x_2 & = y_3 \end{cases} \quad L_2 \longleftarrow L_2 + L_1 \\ & \iff \begin{cases} x_1 & = 2y_1 + y_2 \\ x_3 & = -y_1 - y_2 \\ x_2 & = y_3 \end{cases}. \end{aligned}$$

On en déduit que P est inversible et $P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

4. (a) On remarque facilement que $N^2 = 0$, donc N est nilpotente.

(b) On remarque facilement que Δ et N commutent et que $A = \Delta + N$. De plus, on a montré que Δ est diagonalisable et N nilpotente, donc (Δ, N) est une décomposition de Dunford de A.

(c) Soit $n \in \mathbf{N}$. Comme $A = \Delta + N$ et $\Delta N = N\Delta$, la formule du binôme de Newton donne :

$$\begin{aligned} A^n & = (\Delta + N)^n \\ & = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k \Delta^{n-k} \\ & = \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} N^k \Delta^{n-k} \quad \text{car } N^k = 0 \text{ pour } k \geq 2 \\ & = \Delta^n + nN\Delta^{n-1} \quad \text{car } \binom{n}{0} = 1 \text{ et } \binom{n}{1} = n. \end{aligned}$$

(d) On procède par récurrence. Pour $k \in \mathbf{N}^*$, on pose $\mathscr{P}_k$: « $\Delta^k N = N$ ».
Un simple calcul assure que $\mathscr{P}_1$ est vraie.
On suppose $\mathscr{P}_k$ vraie pour un certain entier naturel k non nul. On a :

$$\begin{aligned} \Delta^{k+1} N & = \Delta \times \Delta^k N \\ & = \Delta N \quad \text{hypothèse de récurrence} \\ & = N \quad \text{car } \mathscr{P}_1 \text{ est vraie.} \end{aligned}$$

On a montré que $\mathscr{P}_{k+1}$ est vraie, ce qui termine la récurrence.

(e) Comme les matrices N et Δ commutent, on a d'après la question 4 (d), $N\Delta^k = N$ pour tout $k \in \mathbf{N}^*$.
En reprenant le résultat de la question 4 (c), on a :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad A^n = \Delta^n + nN.$$

Comme Δ est diagonalisable, Δ^n l'est aussi. Il est clair que nN est nilpotente, donc une décomposition de Dunford de A^n est (Δ^n, nN).

Problème

Partie 1 : Un exemple en dimension 3

1. C'est une simple vérification.
2. Il est clair que les coefficients de la matrice sont positifs et que la somme des coefficients de chaque colonne vaut 1.
3. De simples calculs donnent $\mathrm{Tr}\,(A) = \dfrac{7}{10} + \dfrac{2}{5} = \dfrac{11}{10}$ et $\det\,(A) = 0$, ainsi A n'est pas inversible.
4. On a $A^T = \begin{pmatrix} 7/10 & 3/10 & 0 \\ 2/5 & 0 & 3/5 \\ 1/2 & 1/10 & 2/5 \end{pmatrix}$. Un simple calcul donne alors $A^T \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   Ainsi, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur associé à la valeur propre 1.
5. (a) Pour tout $\lambda \in \mathbf{K}$, on a :

   $$\begin{aligned} \chi_{M^T}(\lambda) &= \det\left(\lambda \mathrm{I}_3 - M^T\right) \\ &= \det\left(\lambda \mathrm{I}_3^T - M^T\right) \quad \text{car } \mathrm{I}_3 \text{ est symétrique} \\ &= \det\left(\left(\lambda \mathrm{I}_3 - M\right)^T\right) \quad \text{par linéarité de la transposition} \\ &= \det\left(\lambda \mathrm{I}_3 - M\right) \quad \text{par invariance du déterminant par transposition} \\ &= \chi_M(\lambda). \end{aligned}$$

   Il s'ensuit que $\chi_{M^T} = \chi_M$.

   (b) χ_M est scindé dans $\mathbf{C}$, donc d'après le théorème de Gauss-d'Alembert, M admet trois valeurs propres λ_1, λ_2 et λ_3.

   En particulier, M est trigonalisable sur $\mathbf{C}$ et donc M est semblable à une matrice du type $\begin{pmatrix} \lambda_1 & \star & \star \\ 0 & \lambda_2 & \star \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$.

   Deux matrices semblables ayant même trace, on a $\mathrm{Tr}\,(M) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$.
6. Comme $\chi_A = \chi_{A^T}$, on en déduit que $\mathrm{Sp}\,(A) = \mathrm{Sp}\left(A^T\right)$.
   Comme A n'est pas inversible, 0 est valeur propre de A.
   Comme 1 est valeur propre de A^T, d'après la remarque ci-dessus, 1 est valeur propre de A.
   D'après la question 5 (b), A a trois valeurs complexes (éventuellement confondues) et la somme de ces trois valeurs propres est égale à $\mathrm{Tr}\,(A) = \dfrac{11}{10}$.
   Or, 0 et 1 sont déjà valeur propre, donc la troisième valeur propre de A, notée λ, vérifie $0 + 1 + \lambda = \dfrac{11}{10}$, ainsi $\lambda = \dfrac{11}{10} - 1 = \dfrac{1}{10}$.
   Il s'ensuit que les valeurs propres de A sont 0, 1 et $\dfrac{1}{10}$.
7. De simples calculs donnent

   $$E_0(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}\right), \quad E_1(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \quad \text{et} \quad E_{1/10}(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right).$$

   Si l'on pose $P = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$, on a $A = PDP^{-1}$ avec D donnée par l'énoncé.

8. On pose $Q = \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & -10 & -5 \\ -3 & 7 & 2 \end{pmatrix}$. Un simple calcul donne $PQ = \mathrm{I}_3$, donc P est inversible et $P^{-1} = Q = \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & -10 & -5 \\ -3 & 7 & 2 \end{pmatrix}$.
9. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on pose $\mathscr{P}_n$: « $X_n = PD^nP^{-1}X_0$ ».
   $\mathscr{P}_0$ est clairement vraie.
   On suppose $\mathscr{P}_n$ vraie pour un certain entier naturel n. On a :
   $$\begin{aligned} X_{n+1} &= AX_n \quad \text{question 1} \\ &= PDP^{-1}PD^nP^{-1}X_0 \quad \text{hypothèse de récurrence et question 7} \\ &= PD^{n+1}P^{-1}X_0. \end{aligned}$$
   On a montré que $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie, ce qui termine la récurrence.
10. (a) Comme D est diagonale, pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a : $D^n = \operatorname{diag}(1, 1/10^n, 0)$. Il s'ensuit que pour tout $n \in \mathbf{N}$,
    $$\begin{aligned} X_n &= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/10^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & -10 & -5 \\ -3 & 7 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 - \dfrac{5}{2 \times 10^n} \\ 1 - \dfrac{5}{2 \times 10^n} \\ 1 + \dfrac{5}{10^n} \end{pmatrix} \quad \text{calcul pénible !.} \end{aligned}$$
    (b) Il est clair que les coefficients de X_n sont positifs et que la somme de ces coefficients vaut 1.
11. Comme $10 > 1$, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{10^n} = 0$, on en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = \dfrac{3}{5}$, $\lim\limits_{n \to +\infty} y_n = \dfrac{1}{5}$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} z_n = \dfrac{1}{5}$.
12. Il est clair que le vecteur $L = \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est stochastique et est un vecteur propre pour la valeur propre 1.

Partie 2 : Cas de la dimension 2

1. On écrit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Comme A est stochastique, on a $a \geq 0$, $b \geq 0$, $c \geq 0$, $d \geq 0$, $a + c = 1$ et $b + d \geq 0$.
   On en déduit que $c = 1 - a$ et $d = 1 - b$. Comme c et d sont positifs, on en déduit que $a \leq 1$ et $b \leq 1$, donc $a \in [0,1]$ et $b \in [0,1]$, ainsi $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 1-a & 1-b \end{pmatrix}$.
2. On pose $\mathscr{P}_n$: « $x_n \geq 0$, $y_n \geq 0$ et $x_n + y_n = 1$ ».
   Comme X_0 est stochastique, par définition, $\mathscr{P}_0$ est vraie.
   On suppose $\mathscr{P}_n$ vraie pour un certain entier naturel n. En utilisant le résultat de la question 1, on peut écrire
   $$X_{n+1} = AX_n = \begin{pmatrix} a & b \\ 1-a & 1-b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax_n + by_n \\ (1-a)\,x_n + (1-b)\,y_n \end{pmatrix}.$$
   Comme $a \in [0,1]$, $b \in [0,1]$, $x_n \geq 0$ et $y_n \geq 0$ (hypothèse de récurrence), il est alors clair que $x_{n+1} \geq 0$ et $y_{n+1} \geq 0$. De plus,
   $$x_{n+1} + y_{n+1} = ax_n + by_n + (1-a)\,x_n + (1-b)\,y_n = x_n + y_n = 1$$
   car d'après l'hypothèse de récurrence, $x_n + y_n = 1$.
   Ainsi, $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie, ce qui termine la récurrence.
3. On a $\operatorname{Tr}(A) = 1 + a - b$ Or, a et b sont compris entre 0 et 1, donc $-1 \leq a - b \leq 1$, puis $1 + a - b \in [0,2]$.

4. (a) Si $a > 0$ ou $b < 1$, on en déduit que $\mathrm{Tr}\,(A) > 0$, ce qui est impossible. Ainsi, $a = 0$ et $b = 1$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
   On remarque que $A^2 = \mathrm{I}_2$, puis $A^{2k} = \mathrm{I}_2$ pour tout $k \in \mathbf{N}$ et $A^{2k+1} = A$ pour tout $k \in \mathbf{N}$. Il s'ensuit que
   $$\forall n \in \mathbf{N}, \quad X_{2n} = X_0 \quad \text{et} \quad X_{2n+1} = X_1.$$
   (b) Si $\mathrm{Tr}\,(A) = 2$, alors $A = \mathrm{I}_2$, ainsi pour tout $n \in \mathbf{N}$, $X_n = X_0$.
5. Si $a - b \in \{-1, 1\}$, alors $\mathrm{Tr}\,(A) \in \{0, 2\}$, ce qui est impossible, ainsi $-1 < a - b < 1$.
6. (a) Un simple calcul donne $AV = (a - b)\,V$. Comme $V \neq 0$, V est un vecteur propre de A pour la valeur propre $q = a - b$.
   (b) D'après la question 5, on a $-1 < q < 1$, donc $|q| < 1$.
7. Soit $W = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Un simple calcul donne $AW = W$, donc W est un vecteur propre (car non nul) pour la valeur propre 1.
8. La matrice A est de taille 2×2, a deux valeurs propres 1 et $a - b$ distinctes, donc A est diagonalisable.
9. On pose $W = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. La famille (W, V) est clairement une famille libre de $\mathscr{M}_{2,1}\,(\mathbf{K})$, donc est une base de $\mathscr{M}_{2,1}\,(\mathbf{R})$.
   Ainsi, il existe $(\mu, \lambda) \in \mathbf{K}^2$ tel que $X_0 = \mu W + \lambda V = L + \lambda V$.
   Comme $W \in E_1\,(A)$, on a $L = \mu W \in E_1\,(A)$, donc $AL = L$.
10. On pose pour $n \in \mathbf{N}$, $\mathscr{P}_n$: « $X_n = L + q^n \lambda V$ ».
    $\mathscr{P}_0$ est clairement vraie.
    On suppose $\mathscr{P}_n$ vraie pour un certain entier naturel n. On a
    $$\begin{array}{rcll} X_{n+1} & = & AX_n & \\ & = & A\,(L + q^n \lambda V) & \text{hypothèse de récurrence} \\ & = & AL + q^n \lambda AV & \\ & = & L + q^{n+1} \lambda V & \text{car } AL = L \text{ et } AV = qV. \end{array}$$
    On a montré que $\mathscr{P}_{n+1}$, ce qui termine la récurrence.
11. D'après la question 10, on a :
    $$\forall n \in \mathbf{N}, \quad X_n = L + q^n \lambda V = \begin{pmatrix} \ell_x + q^n \lambda \\ \ell_y - q^n \lambda \end{pmatrix}.$$
    Comme $|q| < 1$, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$, on en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = \ell_x$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} y_n = \ell_y$.
12. D'après la question 2, pour tout $n \in \mathbf{N}$, X_n est stochastique, donc $x_n \geq 0$, $y_n \geq 0$ et $x_n + y_n = 1$.
    Comme $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ (resp. $(y_n)_{n \in \mathbf{N}}$) converge vers ℓ_x (resp. ℓ_y), en faisant tendre n vers $+\infty$, on en déduit que $\ell_x \geq 0$, $\ell_y \geq 0$ et $\ell_x + \ell_y = 1$. On en déduit que L est stochastique.
13. Comme $AT = T$, on a $T \in E_1\,(A) = \mathrm{Vect}\,(L)$. Il existe $\lambda \in \mathbf{K}$ tel que $T = \lambda L$. Comme la somme des coefficients de T et de L vaut 1, on en déduit que $\lambda = 1$, donc $T = L$.